석사학위논문

초등 예비교사의 측정 영역에 관한 오개념 분석 -적분 개념을 바탕으로-

A Survey on Pre-Elementary Teacher's Misconception about Measurement Domain based on the Concepts of Integrals

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

하 성 찬

2023년 2월

초등 예비교사의 측정 영역에 관한 오개념 분석
-적분 개념을 바탕으로-

A Survey on Pre-Elementary Teacher's Misconception about Measurement Domain based on the Concepts of Integrals

지도교수　이　호　수

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

하　성　찬

2022년 11월

하 성 찬의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 김 해 규 인

심사위원 최 근 배 인

심사위원 이 호 수 인

제주대학교 교육대학원

2022년 12월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국 문 초 록

초등 예비교사의 측정과정에서 오개념 분석
-적분을 바탕으로-

하 성 찬

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 이 호 수

본 연구는 J대학교 초등교육과 1학년 학생 59명(초등 예비교사)를 대상으로 측정에 관한 오개념을 알기 위해 연구자가 작성한 설문지를 이용해 진행됐다. 초등 예비교사의 점, 선, 넓이, 부피 간의 이해 정도 파악, 원의 넓이를 구하는 과정을 통해 적분(구분구적법)의 이해정도 파악, 단위와 속성의 관계 이해 정도 파악이 설문의 주된 내용이다. 초등 예비교사들의 설문 결과는 다음과 같다.

첫째, 대부분이(약 90%) 점, 선, 넓이, 부피 간의 관계에 대해서 오개념을 가지고 있었다. 둘째, 응답자들은 구분구적법에 대해 정확하게 인지하지 못했다. 셋째, 대부분은 (약 70%) 단위와 속성의 관계를 정확히 이해하지 못했다.

바른 측정 지도를 하기 위해서 첫째, 단위 넓이(부피)에 대한 이해를 바르게 하고 공식 위주의 형식적 이해보다 개념 위주의 지도를 할 필요가 있다. 둘째, 비록 초등학생이 직접적으로 적분의 개념을 배우지는 않지만 교과서에 이미 적분의 내용이 들어있는 점을 착안할 때, 예비교사들이 구분구적법의 의미를 바르게 이해하고 초등학교 수준에 맞는 바른 교수학적 용어를 쓸 필요가 있다. 셋째, 단위와 속성을 생각하여 바른 교수학적 장면과 용어를 제시하는 것이다.

이를 통해 예비교사들이 측정에 대해 바르게 이해를 하고, 바른 교수학습 방법 및 용어를 통해 초등학생들이 측정에 대한 오개념을 갖지 않게 할 것이라 기대한다.

핵심어 : 구분구적법, 적분, 점, 선, 넓이, 부피, 단위, 속성, 측정

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

6학년 학생을 지도하던 중 한 변의 길이가 $6cm$인 정육면체를 보고 이 도형의 겉넓이의 합과 부피를 같은 것으로 생각하는 학생을 발견했다. 각 값은 숫자만 같을 뿐 차원이 다른 개념임에도 불구하고, 연구자가 지도하는 학생들은 그 차이를 쉽게 인지하지 못했다. 위와 같은 맥락으로 고신애(2014)는 학생들은 도형의 둘레와 넓이 관계에 인지적 오류가 있고 이는 측정 속성 간의 관계를 이해하지 못하는 것이라 말하고, 변의 길이가 둘레와 넓이에 연관돼서 둘레의 길이나 넓이의 측정값에 특정한 상관관계가 있다는 오개념이 있다고 했다. 이와 같이 많은 학생이 같은 도형 안에서 길이(둘레), 넓이, 부피 등을 측정하며 서로 관련이 있다고 생각하고, 두 개념을 혼동하는 경우가 존재함을 알 수 있다.

초등학생들이 이런 오개념을 갖고 있음을 발견하고 연구자의 주변에서 초등학생들을 지도하는 초등학교 교사들과 수업을 연구하던 중, 이와 비슷한 오개념이 있거나 지도 방법에 문제가 있음을 확인하였다. 박정인(2015)도 넓이에 대한 명확하지 않은 개념을 갖고 있는 교사들이 있고, 이들은 넓이를 2차원적인 양으로 여기지 않고 단순히 (길이)×(길이)=(넓이)라고만 생각한다고 했다.

단순하게 넓이를 길이의 제곱이라고 생각하는 등 교사가 전문적인 지식이 부족하거나 오개념을 갖고 있어서 학생들을 잘못 가르쳤을 때, 학생들은 그 공식을 배운 후 '학습'하는 것이 아니라 오개념을 답습하는 것이라고 생각했다. 또한 초등학생들이 측정의 개념에 대한 정확한 이해가 되지 않은 상태에서 형식적인 이해만 이루어져도 교과서에 주어진 몇몇의 문제는 해결할 수 있다. 그러나 잠재적 교육과정의 관점에서 이는 학생들이 중·고등학교, 대학교의 추후 학습 과정에 있어 더 큰 오개념을 야기할 수 있다고 생각했다.

이에 초등학생들의 오개념 생성을 방지하기 위하여 초등 예비교사들의 측정에 대한 이해 정도를 확인해보려 한다. 이와 관련된 설문지를 통해서 초등 예비교사들이 갖고 있는 오개념을 알아보고, 초등 예비교사들이 바른 측정 사고를 할 수 있는데 도움이 되는 기초 지식과 이를 통한 올바른 교수·학습방법 및 교수·학습 용어를 찾아보려 한다. 교사들이 형식적으로 공식 전달 위주의 수업에서 벗어나야 한다는 점과 단위-속성의 관계를 좀 더 고민하게 하도록 속성을 알 수 있는 적절한 예시를 제시해야 한다는 점을 강조했다. 또 적분에서 Δx와 dx의 의미를 고찰하게 하며 교사가 적분의 개념을 이해하고 초등학생에게 직접적으로 언급하여 가르치지는 않더라도 학

생들에게 오개념을 심어주지 않아야 한다는 점을 강조했다.

2. 연구문제

본 연구의 목적은 예비교사들의 측정 과정에서 내재 되어있는 오개념을 조사·분석하고, 수집한 정보를 바탕으로 측정 지도 과정에서 올바른 교수·학습 방법과 교수·학습 용어를 찾는 데 있다.

본 연구의 목적을 위하여 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

가. 예비교사들의 점과 선, 선과 평면, 길이와 넓이, 넓이와 부피 사이의 관계에 대한 생각은 어떠한가?

나. 예비교사들의 측정과 관련된 정적분 및 구분구적법에 관한 이해 정도는 어떠한가?

다. 어떤 방식의 교수법과 교수학적 용어가 초등학생에게 측정 지도를 할 때 학생들이 오개념을 갖지 않게 하는 데에 효과적인가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 J대학교 초등교육과 1학년 대학생(예비 초등교사) 59명을 연구 대상으로 정했다. 고등학교 수학을 배우고 졸업한지 얼마 안된다는 점에서 적분의 의미를 좀 더 잘 기억하고 파악할 수 있을 것이라는 점에서 1학년 학생들이 연구 대상으로 선정했다. 하지만 아직 교육대학교에서 학습을 한 기간이 비교적 짧아 교수·학습방법에 대한 큰 고찰 없이 학생의 입장으로 설문을 응답할 수 있다는 제한점이 있다. 또 초등교원 모집 인원이 2019~2022년 3천 500명 정도인 것에 비해 59명의 적은 인원으로 일반화했다는 제한점도 역시 존재한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 공간 측정

오영열(2010)은 암기에 의존하여 측정 지식을 일반화하는 것은 어려움이 있으며, 측정에 대한 개념적 접근을 중요하다고 하였다. 측정을 크게 7가지로 나눠 다음과 같이 정리했다.

▪ 단위와 속성의 관계: 대상을 측정할 때, 반드시 그 대상의 단위와 속성은 일치해야 한다. 학생들은 적절한 단위를 선택할 때, 측정대상의 속성을 정확히 파악해야 한다. 예를 들어, 2차원적인 평면을 측정할 때와 3차원적인 입체를 측정할 때 각각 단위는 달라야 함을 알아야 한다. Piaget의 이론에 따르면 11~12세의 아동은 분할, 변형과 관계없이 부피는 같음을 알고, 7~8세의 아동은넓이가 보존됨을 안다. 각각의 보존 개념이 형성된 학생들이 측정 단위 또한 다름을 충분히 인지할 필요가 있다.

▪ 분할: 측정할 때 그 대상을 같은 크기의 하위 단위로 나누는 것이다. 박현웅(2009)은 넓이의 보존을 설명하며 그 도형을 따로 떼어도 합했을 때 넓이는 변하지 않는다고 했다. 학생들은 분할하더라도 그 넓이가 보존됨을 알 수 있다. 길이나 넓이를 측정할 때 전체를 하위 단위로 나눠서 그 합을 생각하는 것은 중요하다.

▪ 단위 반복: 측정하려 할 때, 하위 단위로 나눈 한 부분을 반복적으로 사용하게 된다. 그 대상을 하위 영역으로 나눌 때 그 크기를 똑같이 하고, 이는 측정 단위가 된다. 이 단위를 세며 측정한다.

▪ 공간 덮기: 길이나 넓이, 부피와 같은 대상을 측정 단위로 채우게 된다. 박현웅(2009)은 대상을 채우는 과정에서 겹치거나 빈틈이 있으면 안되고 그 끝나는 점이나 선을 이으며 덮어야 한다고 하였다.

▪ 동일 단위: 모두 동일한 단위를 이용하여 대상을 측정해야 하며, 그 단위를 세어서 대상을 측정한다.

▪ 원점: 측정을 할 때 사용되는 도구에 대한 이해가 필요하다. 예를 들어, 길이를 측정할 때, 보통 자를 사용한다. 자의 측정 기준은 자의 어느 지점이나 돼도 괜찮다.

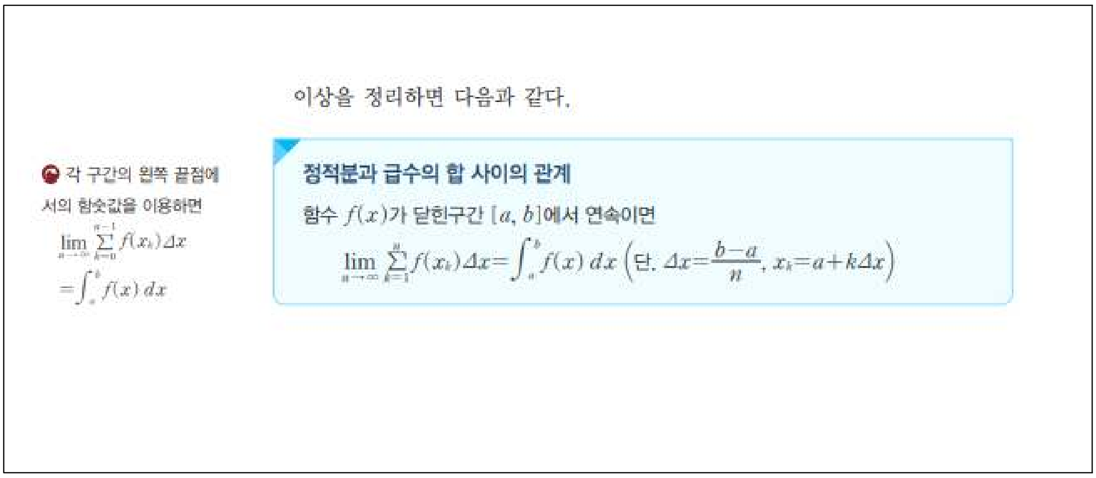
▪ 배열 구조: 넓이 측정에서 정사각형이 기본단위가 된다. 이를 이용하여 평면을 재구조화 하는데, 이는 넓이의 원리를 이해하는 데 중요하다. 박현웅(2009)은 단위를 정렬하여 연속적으로 채워 배열을 구성해야 한다고 한다.

연구마다 측정을 다르게 나누며 위 7가지 측정 개념도 연구에 따라 중첩되는 부분도 있다. 위 7가지는 보통 측정(길이, 넓이, 부피 등)에서 기본이 된다. 측정은 대개 측정하고 하는 대상을 같은 크기로 나눠서 반복된 것의 개수를 세는 것이다. 정경환(2017)은 넓이에 대해 주어진 영역을 덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수가 그 초기 생각이라고 말한다.

2. 적분

적분은 한자 그대로 積(쌓을 적), 分(나눌 분) 나눈 것을 쌓는 것이다. 현행 고등학교 교과서에서 제시되는 부정적분과 정적분에서 부정적분은 정해지지 않은 적분이고 정적분은 구분구적법을 단순화하여 표현한 것이다.

[그림 Ⅱ-1], [그림 Ⅱ-2]는 현행 고등학교 교과서에 나온 정적분과 급수간의 관계다.


이상을 정리하면 다음과 같다.

각 구간의 왼쪽 끝점에서의 함숫값을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \left(단.\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

[그림 Ⅱ-1] 비상교육 미적분 교과서 정적분과 급수의 합 사이의 관계

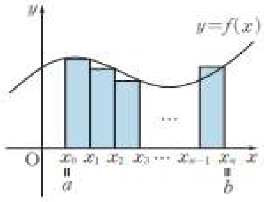
정적분과 급수의 합 사이에는 어떤 관계가 있을까?

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \ge 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[a,\ b]$를 n 등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=b$$

라고 하면 각 구간의 길이 Δx는



$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

이고, 이때 색칠한 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \cdots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$가 항상 존재함이 알려져 있다.

여기서 n의 값이 한없이 커지면 S_n이 S로 수렴함이 알려져 있다.

따라서

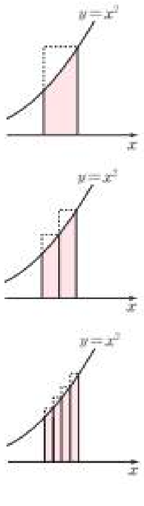
$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 성립한다.

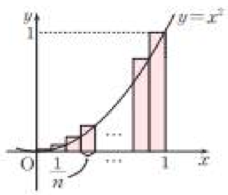
이때 정적분과 넓이의 관계에 따라 $S=\int_a^b f(x)\,dx$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

이다.



예를 들어 아래의 왼쪽 그림에서 곡선 $y=x^2$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형에 대하여 색칠한 직사각형의 넓이의 합 S_n은 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$이고, $n=10,\ 20,\ 30,\ \cdots$일 때의 S_n의 값을 공학적 도구를 이용하여 구하면 아래의 오른쪽 표와 같다.



n	S_n
10	0.385
20	0.35875
30	0.350185185
⋮	⋮
100	0.33835
1000	0.3338335
10000	0.333383335
⋮	⋮

이 표에서 n의 값이 커짐에 따라 S_n의 값은 $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

2. 정적분의 활용 145

[그림 Ⅱ-2] 비상교육 미적분 교과서 정적분과 급수의 합 사이의 관계 2

[그림 Ⅱ-2]에서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x$은 직사각형의 넓이의 합을 의미한다. 극한 안에 $\sum_{k=1}^{n} f(x)\Delta x$에서 직사각형 가로들의 합인 $\sum_{k=1}^{n}\Delta x$는 n의 값과 관계없이 $b-a$로 고정된 상수이다. 따라서 n을 극한으로 보내더라도 $\lim \sum_{k=1}^{n}\Delta x = b-a$이다. Δx는 [a,b] 구간을 n등분 할 때 n이 무한히 커짐에 따라 0에 가까워지지만, 그 합이 b-a라는 값으로 고정됐기에 Δx가 0이 아님을 의미한다. 정연준, 강현영(2008)은 도형의 넓이, 부피를 구할 때 알고 있는 기본 도형으로 구하려는 도형을 세분하여 근사값을 구하고 그것의 극한값으로 도형의 넓이나 부피를 구하는 것을 구분구적법이라고 했다.

[그림Ⅱ-3]은 현행 고등학교 교과서 중 부정적분과 정적분의 관계를 설명하는 내용이다. 현행 고등학교 교과서에서 $S(t)$는 구간 [a,t]에서 그래프 $y=f(x)$와 x축 사이의 도형의 넓이를 나타낸다. t가 Δt만큼 증가할 때, 도형의 넓이는 ΔS만큼 증가한다. 도형의 넓이를 $S(t)$라고 보고, t의 증분 Δt에 대한 $S(t)$의 증분을 ΔS라고 하며 정적분과 부정적분의 관계를 알아본다. 이 때 적분과 미분의 관계도 살펴볼 수 있다. 교과서에서 보듯 $S(x)$가 미분되는 꼴로 보이며 그 값은 $f(t)$가 된다. 여기서 주의할 점은, $f(x)$를 다시 적분할 때는 $f(x)$가 단순히 쌓인다고 생각하지만 정확한 표현을 생각할 필요가 있다.

다음의 대화는 ‘연구자’와 ‘고등학교 때 미적분을 학습한 제주특별자치도 모 초등학교에 근무하는 7년차 교사A’와 묻고 답하는 내용이다.

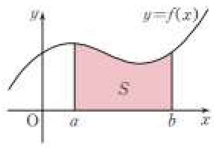
연구자: 미분과 적분의 관계를 아십니까?
교사A: 미분과 적분은 역연산입니다.
연구자: 왜 그렇게 생각하십니까?
교사A: 넓이 $F(x)$를 미분하면 $f(x)$가 되고, 이를 다시 적분하면 $F(x)$가 됩니다.
연구자: 주어진 자료를 확인해보세요. (천재교육 pp.132-133) 이를 보고 미분과 적분의 관계를 생각해보세요.
교사A: 넓이 $S(t)$를 미분한 값이 $f(t)$가 됩니다. 또 $f(x)$를 적분하면 $S(x)$가 됩니다.

위 대화에서 살펴보듯 미적분을 공부하는 학생들이 Δx의 여부와 상관없이 $S(x)$와 $f(x)$를 미분과 적분의 역연산 관계에 초점을 뒀다고 생각한다. 본 연구자는 이렇게 단순히 역연산으로 보는 사고가 Δx를 간과하며 오개념을 형성한다고 생각했다. (특정 한 대상과의 대화이지만 뒤에 예비교사를 대상으로 한 설문에서도 Δx를 간과한

응답이 많이 나온다.)

신보미(2008)는 정적분 개념에 대한 이해를 위해 구분구적법과 리만합의 극한을 강조한다. 이 신보미의 연구에서는 구분구적법의 개념 지도에서 어려운 점을 기술하는데 정적분을 이해하기 위해서 여전히 구분구적법의 이해는 중요하다고 한다. 특히, 최정현(2011)이 말하듯 Δx 의 의미를 바르게 이해하여 정적분의 의미를 생각해 보는 것이 중요하다. 정경환(2017)은 $f(a+\frac{b-a}{n}k)$와 Δx의 곱의 합으로 리만합을 인식하지 못하고 단지 $f(a+\frac{b-a}{n}k)$의 값의 합으로 정적분을 이해하는 경우가 많다고 한다. 구분구적법을 통해서 Δx와 dx의 의미를 심도 있게 살펴볼 필요가 있다. $f(a+\frac{b-a}{n}k)$와 Δx의 곱은 넓이를 의미하고 $f(a+\frac{b-a}{n}k)$는 길이를 의미한다. 넓이를 구할 때 길이의 합으로만 더해지는 것이 아니라 넓이가 더해져서 또 다른 넓이가 된다는 것을 결과로 제시하는 본 연구와도 같은 맥락이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.

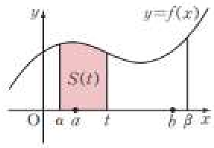


함수 $f(x)$가 $\alpha < a < b < \beta$인 α, β에 대하여 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이라고 하자.

열린구간 (α, β)에 속하는 임의의 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, t의 증분 Δt에 대한 $S(t)$의 증분을 ΔS라고 하면

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

이다.

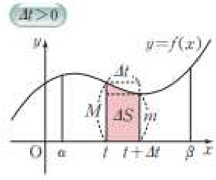


한편, $\Delta t > 0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t, t+\Delta t]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$$m\Delta t \leq \Delta S \leq M\Delta t$$

이다. 따라서 위 식의 각 변을 Δt로 나누면 다음과 같다.

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta t} \leq M$$



여기서 $\Delta t \longrightarrow 0+$이면 $m \longrightarrow f(t)$, $M \longrightarrow f(t)$이므로

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$$

이다. 마찬가지로 $\Delta t < 0$일 때,

$$\lim_{\Delta t \to 0-} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$$

이다. 따라서

$$\frac{d}{dt} S(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$$

이다. 즉, 열린구간 (α, β)에서 함수 $S(t)$는 함수 $f(t)$의 부정적분이다.

그러므로

$$S(t) - S(a) = \int_a^t f(x)\,dx$$

이다.

이제 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

이다.

[그림 Ⅱ-3] 천재교육 부정적분과 정적분의 관계

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 예비교사들이 측정 과정에서 오개념을 가지고 있다고 가정하고 넓이와 부피의 개념, 선과 면, 면과 부피, 길이와 넓이, 넓이와 부피 등의 관계 파악에 초점을 뒀다. 또 정적분의 이해 정도, 특히 dx의 존재에 대한 인지 정도를 파악하려 했다.

연구 대상은 J대학교 초등교육과 1학년인 59명의 예비교사이다.

2. 연구 방법 및 절차

가. 설문지 분석

예비 초등교사의 측정 과정에서의 개념 이해 정도와 오개념 여부를 알기 위해, 또 적분의 이해 정도를 알기 위해 연구자가 자체적으로 설문지 문항을 만들었다. 점과 선의 관계, 선과 평면의 관계, 평면과 입체의 관계, 길이와 넓이의 관계, 넓이와 부피의 관계 등에 관한 문장을 제시하고 이 문장이 옳고 틀림을 확인하며 틀린 문장에는 그 이유를 적도록 했다. 또 정적분을 통해 길이가 넓이가 되는 상황을 제시하여 그 이해 정도를 분석하고자 했다.

3. 검사 도구

문항번호	질문 내용 및 평가항목
1-가	넓이와 부피의 이해정도 파악
1-나	마름모 공식
1-다	점과 선의 관계 파악
1-라	직선과 넓이의 이해정도 파악
1-마	차원에 대한 이해정도 파악
1-바	단위와 속성의 관계 이해정도 파악(넓이, 부피)
1-사	길이의 이해 정도 파악
1-아	단위와 속성의 관계 이해정도 파악(길이, 넓이)
2	원의 넓이를 구하는 적분과정을 통해 적분의 이해정도 파악

[표 Ⅲ-1] 전체 설문 문항

 위 문항에서 문항번호 1-나, 1-마, 1-사는 설문에 응답하는 예비 교사들이 직선과 넓이, 넓이와 부피, 단위 속성 등에 대한 본 설문지의 주제를 간파하고 설문 결과가 의도하지 않게 나올 수 있어서 추가한 문항이다. 따라서 1-나, 1-마, 1-사 항은 다른 문항들과 유사하게 보이나 본 연구의 주제와 관련이 없으므로 결과 분석에서는 제외했다.

4. 검사 실시 및 결과 분석

 측정에 대한 개념 이해 정도 및 오개념을 알아보고, 측정 지도에서 바른 교수·학습 방법을 제시하기 위한 설문 문항들이다. 이 문항들을 크게 세 가지로 분류하여 살펴봤다.

 첫째로 점, 선, 넓이, 부피 간의 이해 정도 파악하기 위해 1-가, 1-다, 1-라 문항을 묶어서 분석했다. 둘째로, 적분에 대한 이해정도를 파악 하기 위해 문항 2를 분석했다. 셋째로, 단위와 속성의 관계 이해정도 파악를 분석하기 위해 1-바, 1-아 항을 분석했다. 세 가지로 분류하여 제시하지만 이 문항들과 응답자들의 응답들을 통해 제시하려는 결과는 서로 연관된다.

가. 점, 선, 넓이, 부피 간의 이해 정도 파악

1) 1-가, 1-다, 1-라에 대한 정답율 및 오답율은 다음과 같다.

				N=59
문항번호	정답수(정답율)	오답수(오답율) 오답	무응답	계
1-가	0(0%)	59	0	59(100%)
1-다	9(15.2%)	50	0	50(84.7%)
1-라	3(5%)	51	5	56(94.9%)

[표 Ⅲ-2] 점, 선, 넓이, 부피 간의 이해 정도 파악 정답율 및 오답율

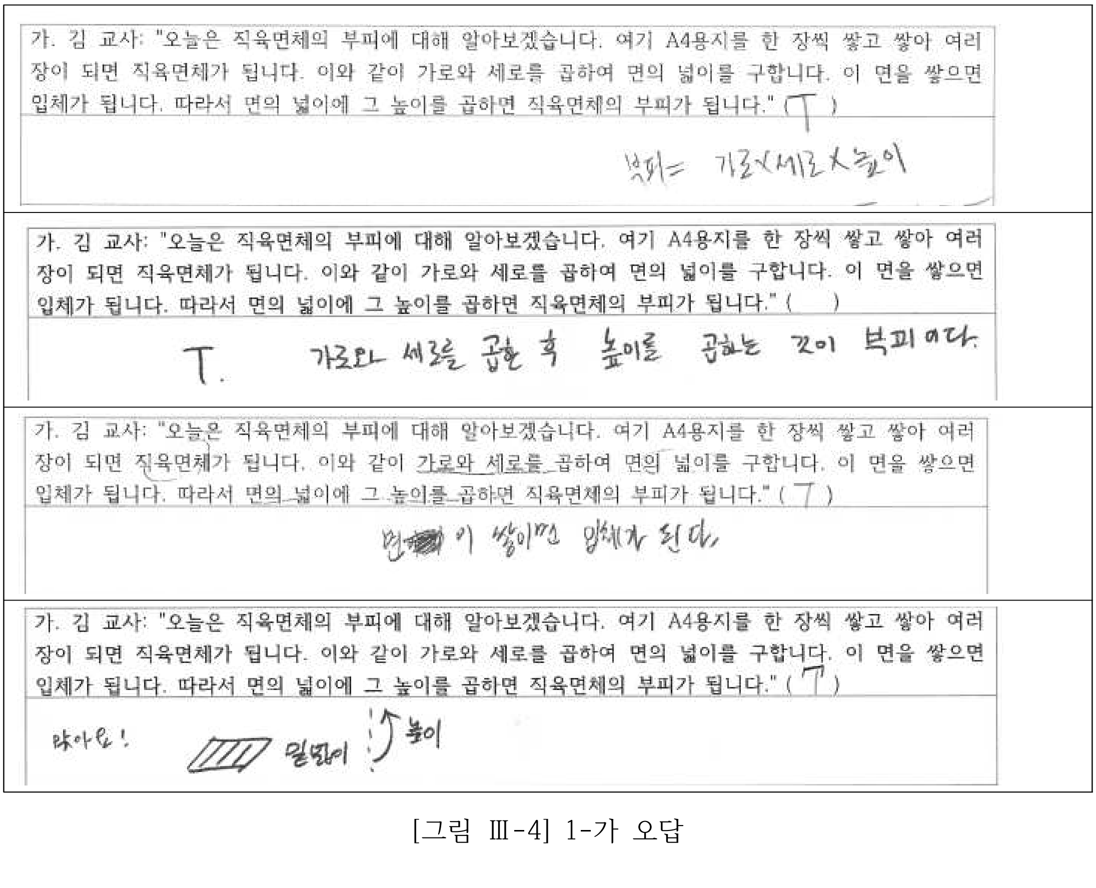
2) 넓이와 부피의 이해정도 파악(1-가 문항)

 ‘설문지 문항 1-가’의 내용은 다음과 같다. ‘김 교사: 오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다.’ 김지선(2005)은 프로클루스를 인용하며 그림자를 통해 면에 대한 생각을 해야한다고 하며, 그 이유를 그림자는 길이와 폭만 있고 깊이는 없다고 했다. 이와 같이 면은 그림

자와 같아서 쌓을 수 없고, 아무리 쌓아도 그 길이와 폭만 존재할 뿐이다.

그럼에도 불구하고 응답자 59명 중 58명은 이 응답에 ‘맞다’(이하 T라 칭함.)라고 대답했다. 또 ‘틀림’(이하 F라 칭함)이라고 대답한 응답자 1명 또한 ‘빈 부분 존재할 것’ 이라는 답변으로 오개념(면이 쌓일 수 있다는 생각은 유지하고 있음.)을 갖고 있었다. T라고 응답한 58명의 응답자 중 그 이유를 적은 응답자 중에서 단순히 (부피) = (가로) × (세로) × (높이), ‘가로와 세로를 곱한 후 높이를 곱하는 것이 부피이다’라는 이유를 언급했다.

결과들을 살펴보면 심오한 이해 없이 단순히 공식으로써 부피를 이해한 것처럼 보인다. 정유경, 방정숙(2013)은 제시한 연구에서 응답자 교사가 부피를 구하는 식에서 ‘밑면의 넓이’를 단순히 (가로) × (세로)가 아니라, 가장 아래층에 놓인 단위부피에 관한 것이라고 강조했다. 교사가 부피에 대한 바른 이해 없이 단순히 공식으로써 이해하여 가르치면 학생들은 부피에 대한 오개념을 갖게 된다. 초등학생들이 단순히 공식으로써 부피를 이해하게 될 가능성이 높다.


가. 김 교사: "오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다." (T)

부피= 가로×세로×높이

가. 김 교사: "오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다." (   )

T. 가로와 세로를 곱한 후 높이를 곱하는 것이 부피이다.

가. 김 교사: "오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다." (T)

면이 쌓이면 입체가 된다.

가. 김 교사: "오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다." (T)

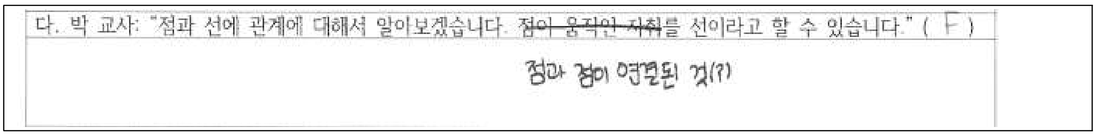
맞아요! 밑면이 높이

[그림 Ⅲ-4] 1-가 오답

3) 점과 선의 관계 파악(1-다 문항)

김지선(2005)은 여러 중등교과서에서 나온 선에 대한 정의들을 제시하며 ‘점이 움직인 자리가 선이다’, ‘점을 움직여서 선을 나타낸다’, ‘점이 움직이면 선이 된다’ 등이라 말했다. 이 설문은 중등 교과서에 나온 점과 선의 관계에 기반하여 점이 쌓일 수 없다는 점에 염두하여 만들었다.

59명의 응답자 중 9명이 T라고 대답했고, 50명의 응답자가 F라고 대답했다. 대부분의 응답자가 점과 선에 관계에 대해 정확한 이해를 하지 못함을 확인했다.


다. 박 교사: “점과 선에 관계에 대해서 알아보겠습니다. ~~점이 움직인 자취~~를 선이라고 할 수 있습니다.” (F)

점과 점이 연결된 것(?)

[그림 Ⅲ-5] 1-다 오답

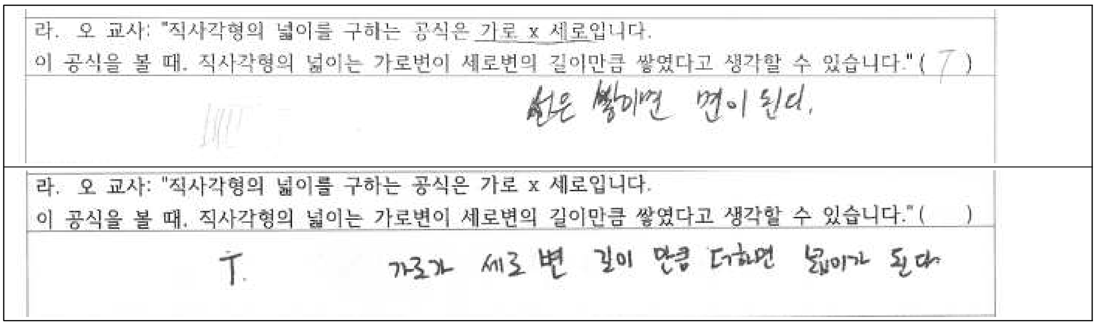
4) 직선과 넓이의 이해정도 파악(1-라)

이 ‘라’ 설문항은 다음과 같다. “직사각형의 넓이를 구하는 공식은 (가로)×(세로)입니다. 이 공식을 볼 때, 직사각형의 넓이는 가로변이 세로변의 길이만큼 쌓였다고 생각할 수 있습니다.” 오영열(2010)은 (가로)×(세로)로 계산하는 것이 넓이를 핵심적인 개념으로써 이해하는 것은 아니라고 했다. 고신애(2014)는 넓이와 부피 측정과 개념을 제대로 이해하기 위해서 길이 개념을 바르게 이해할 것을 강조하며 길이 개념에 대한 잘못된 이해는 넓이, 부피 개념 이해에도 어려움을 줄 것이라고 했다.

길이는 1차원적인 개념으로 쌓을 수 없음에도 불구하고 51명의 응답자가 T라고 대답했고, 8명의 응답자가 F라고 대답했다. 그 중 5명의 응답자는 이유를 설명하지 못했다. T라고 답하고 이유를 설명한 응답자도 있었는데 ‘선은 쌓이면 면이 된다’, ‘가로가 세로변 길이 만큼 더하면 넓이가 된다’라고 말하며 오개념을 갖고 있음을 보여주었다.

박정인(2015)는 초등학교 교사들에 대한 연구를 통해 이들이 넓이 구하는 공식은 잘 알고 있으나, 넓이의 개념보다도 넓이의 공식을 암기하며 이를 통해 넓이를 구하는 것을 더 중요하다고 여기고 있다고 했다. 아래 두 응답자의 답변을 통해, 공식에 치중하여 면의 개념을 정확히 이해하지 못하고 있다고 판단했다.

‘가로변이 세로변의 길이만큼 쌓였다’는 표현보다는 ‘변의 길이에 대응되는 넓이가 쌓인다’ 라는 표현이 적절하다. $3cm \times 2cm = 6cm^2$라는 식은 맞지만 읽는 과정에서 ‘$3cm$가 $2cm$만큼 쌓였다’라는 표현은 잘못됐다.


라. 오 교사: "직사각형의 넓이를 구하는 공식은 가로 x 세로입니다.
이 공식을 볼 때, 직사각형의 넓이는 가로변이 세로변의 길이만큼 쌓였다고 생각할 수 있습니다." (T)
선은 쌓이면 면이 된다.

라. 오 교사: "직사각형의 넓이를 구하는 공식은 가로 x 세로입니다.
이 공식을 볼 때, 직사각형의 넓이는 가로변이 세로변의 길이만큼 쌓였다고 생각할 수 있습니다." (   )
T. 가로가 세로 변 길이 만큼 더하면 넓이가 된다

[그림 Ⅲ-6] 1-라 오답

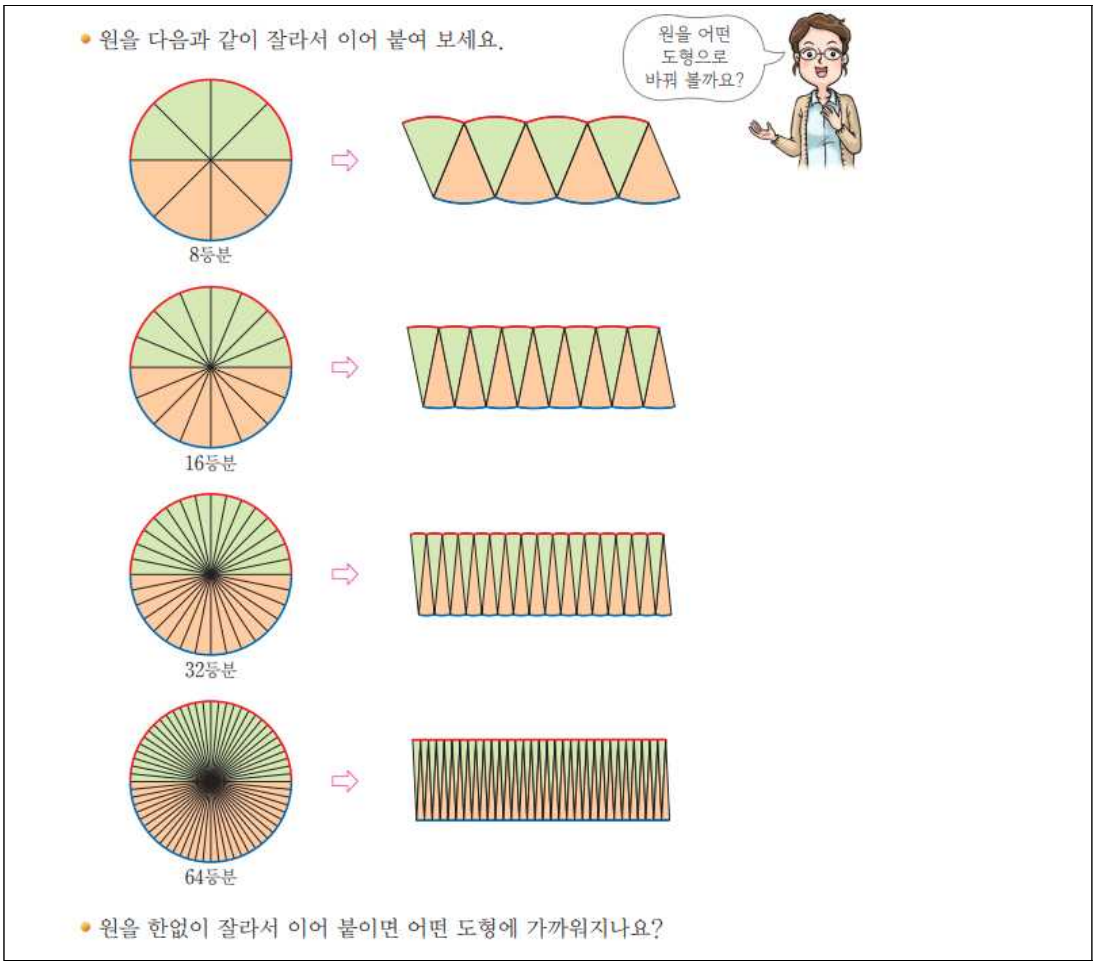
나. 원의 넓이를 구하는 적분과정을 통해 적분의 이해정도 파악

정경환(2017)은 넓이에 대한 기본은 주어진 대상을 덮는 단위 정사각형의 수이고, 구분구적법의 단어를 풀이하며 초등 수학에서 이를 이용하고 있다고 했다. 정경환은 도형을 제시하며 도형을 무의식적으로 나눠서 전체의 넓이를 구하는 구분구적법이 쓰이는 것을 보였다. 또 그는 현 6학년 교과서에서도 제시된 원의 넓이를 구하는 방법에서 원의 넓이와 쪼개서 만들어진 직사각형 사이를 비교하며 극한의 아이디어가 포함됐음을 말했다.

초등학생들은 적분이란 개념을 직접적으로 배우지 않는다. 적분은 처음으로 고등학교 수학에서 접하게 되지만, 그 전부터 이미 적분에 대한 사고를 하며 측정을 하고 있다고 보인다. 학생들이 적분의 용어나 개념 등을 내재한 것은 아니라도 적분적 사고를 하고 있다. 따라서, 초등학교 학생을 지도할 교사도 바른 적분에 대한 개념을 갖고, 바른 교수·학습 용어로 초등학교 측정영역을 가르칠 필요가 있다.

[그림 Ⅲ-7]는 초등학교 6학년 교과서 5단원 6차시에 제시된 원의 넓이를 구하는 과정을 나타낸다. 8등분, 16등분, 32등분, 64등분 순으로 계속 등분한다. 교과서에서는 '원을 한없이 잘라서 이어 붙이면 어떤 도형에 가까워지나요?'라는 표현을 하는데 여기서 '한없이', '가까워지다'라는 표현이 구분구적법의 개념을 내포하고 있다.

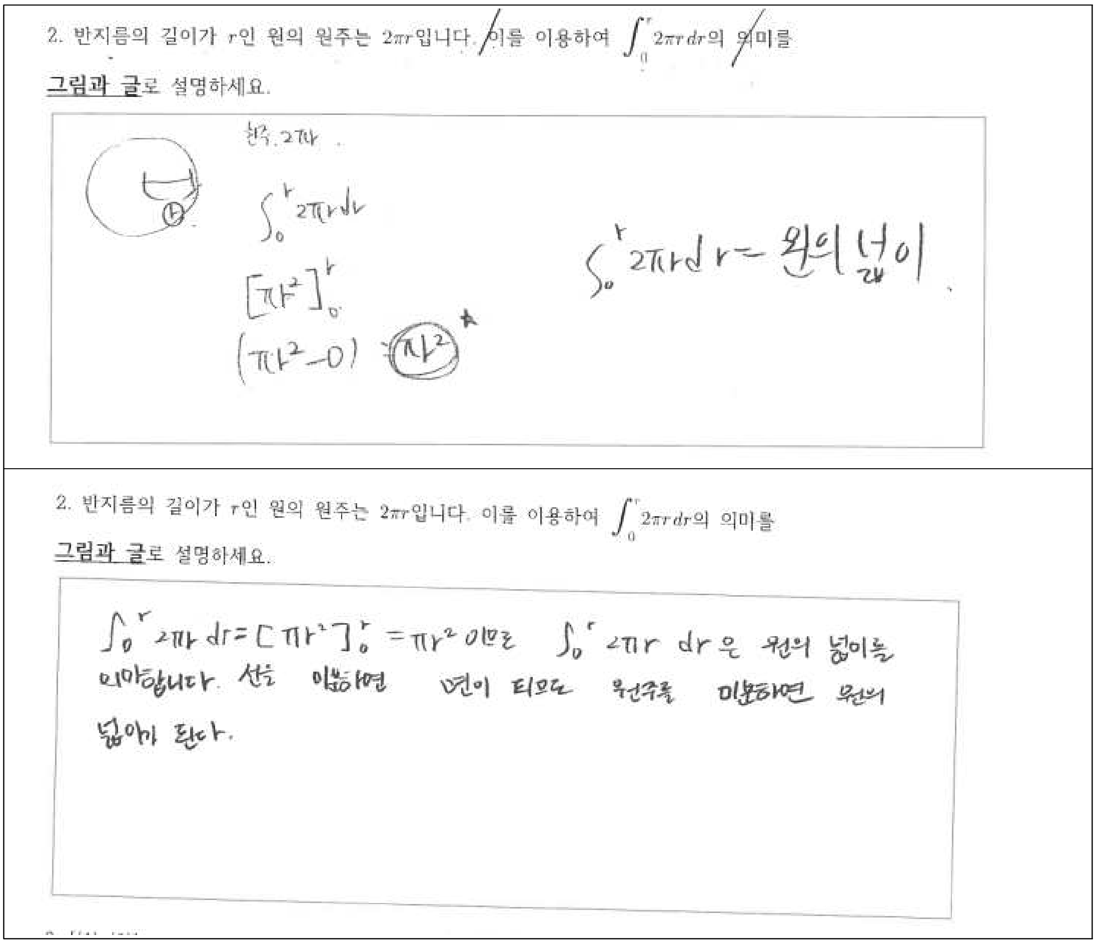
연구자가 제시한 설문 문항 2는 현행 6학년 교과서(2학기 5단원 6차시)에 제시한 구분구적법을 이용한 원의 넓이 측정이 아니라, 동심원 형태로(원주의 크기가 커지는 방향) 원을 등적 변환하여 원의 넓이를 측정하는지 확인하는 문항이다. 이는 6학년 2학기 교과서 5단원 10차시 탐구수학 두 번째 활동에 나온 문항과 유사한 형태이다.



[그림 Ⅲ-7] 초등학교 6학년 교과서 - 원의 넓이 구하기

	N=59
응답 형태	응답자수(응답률)
무응답	22(37.2%)
단순히 정적분의 공식으로 원주와 넓이의 관계 설명	21(35.5%)
Δx에 대한 설명이 없는 경우	12(20.3%)
2π를 기울기로 보고 r을 x축으로 하여 표현한 경우	4(6.7%)

<표 Ⅲ-3> 설문문항 2 응답형태


2. 반지름의 길이가 r인 원의 원주는 $2\pi r$입니다. 이를 이용하여 $\int_0^r 2\pi r\,dr$의 의미를

그림과 글로 설명하세요.

원주 $2\pi r$

$\int_0^r 2\pi r\,dr$

$[\pi r^2]_0^r$

$(\pi r^2 - 0)$ πr^2

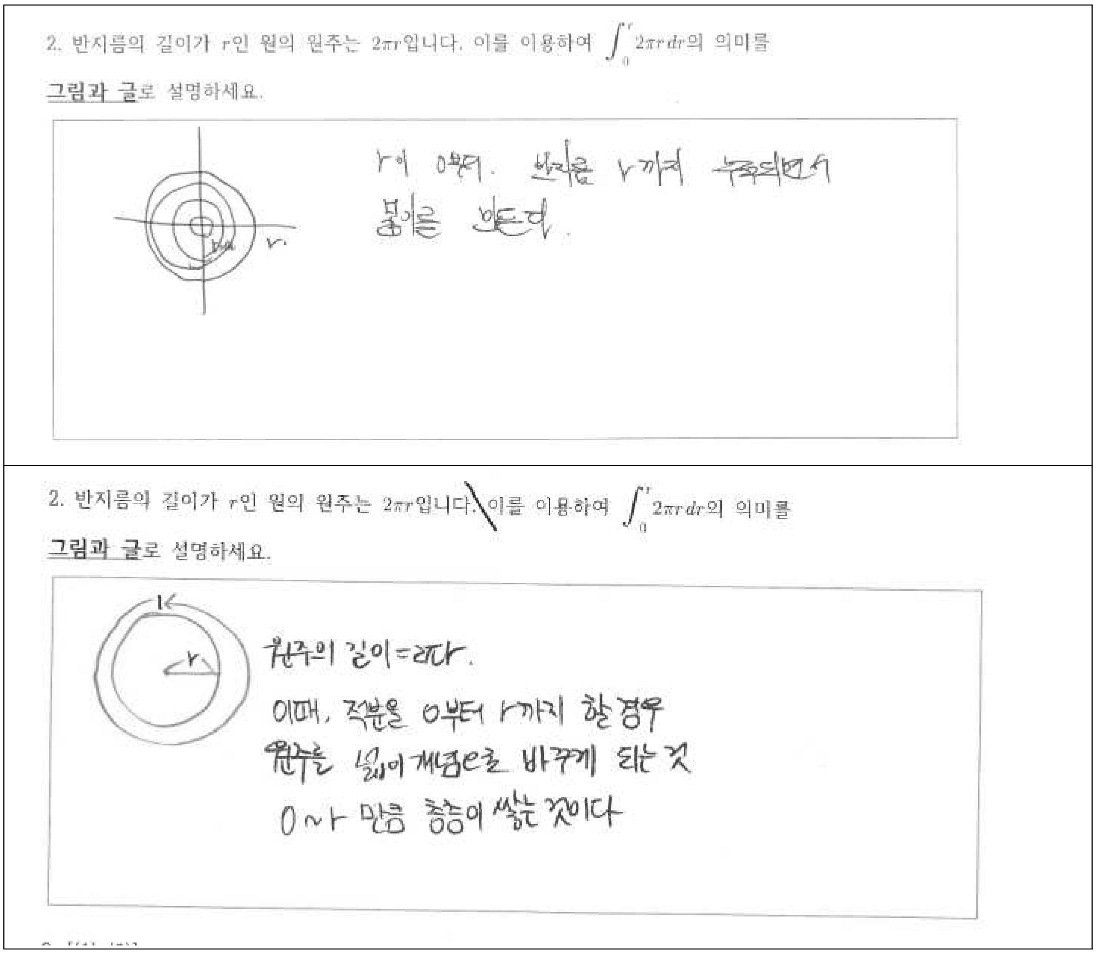
$\int_0^r 2\pi r\,dr =$ 원의 넓이

2. 반지름의 길이가 r인 원의 원주는 $2\pi r$입니다. 이를 이용하여 $\int_0^r 2\pi r\,dr$의 의미를

그림과 글로 설명하세요.

$\int_0^r 2\pi r\,dr = [\pi r^2]_0^r = \pi r^2$ 이므로 $\int_0^r 2\pi r\,dr$은 원의 넓이를 의미합니다. 선을 이용하면 면이 되므로 원주를 미분하면 원의 넓이가 된다.

[그림 Ⅲ-8] 공식으로 표현



2. 반지름의 길이가 r인 원의 원주는 $2\pi r$입니다. 이를 이용하여 $\int_0^r 2\pi r\,dr$의 의미를

그림과 글로 설명하세요.

r이 0부터 반지름 r까지 누적되면서

넓이를 만든다.

2. 반지름의 길이가 r인 원의 원주는 $2\pi r$입니다. 이를 이용하여 $\int_0^r 2\pi r\,dr$의 의미를

그림과 글로 설명하세요.

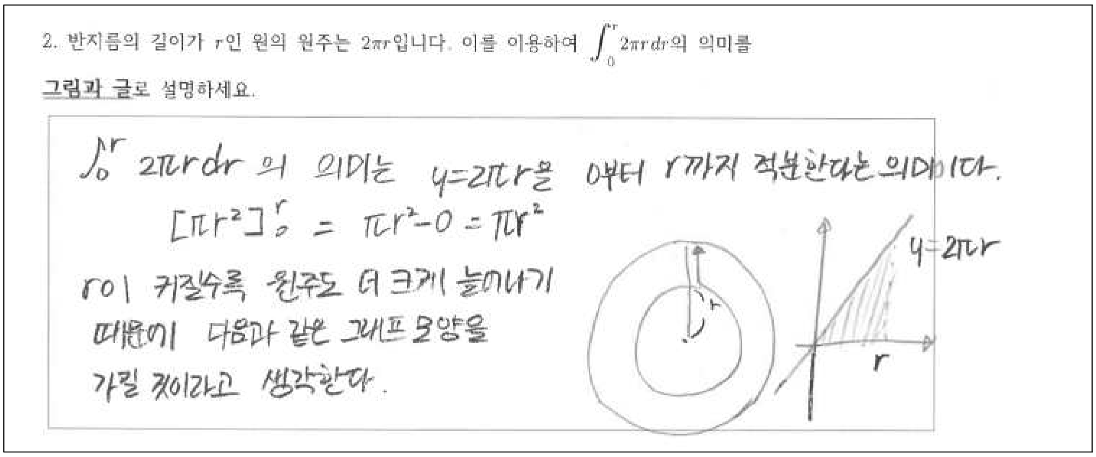
원주의 길이 $=2\pi r$.

이때, 적분을 0부터 r까지 할 경우

원주를 넓이 개념으로 바꾸게 되는 것

0~r 만큼 층층이 쌓는 것이다

[그림 Ⅲ-9] Δx 나타내지 않은 경우



[그림 Ⅲ-10] 2π를 기울기로 보고 r을 x축으로 하여 표현한 경우

다. 단위와 속성의 관계 이해 정도 파악

1) 1-바, 1-아에 대한 정답율 및 오답율은 다음과 같다.

				N=59
문항번호	정답수 (정답율)	오답수(오답율) 오답	 무응답	 계
1-바	19(32%)	39	1	40(67%)
1-아	15(25.4%)	44	0	44(74.5%)

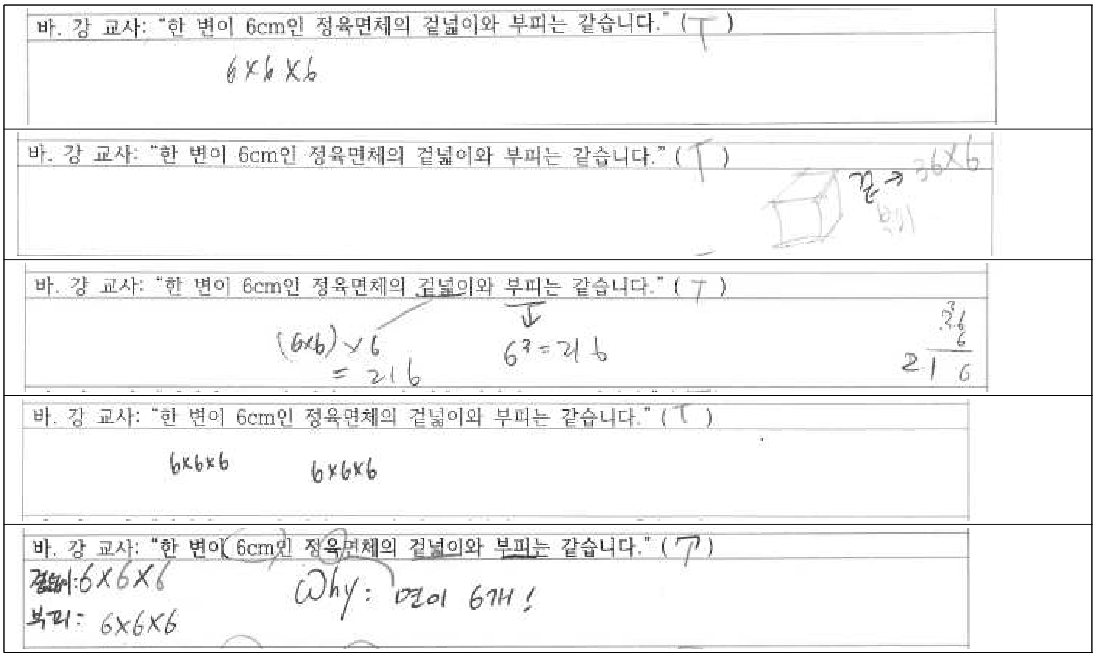
<표 Ⅲ-4> 단위와 속성의 관계 정도 이해 정답율 및 오답율

2) 단위와 속성의 관계 이해정도 파악-넓이와 부피(1-바)

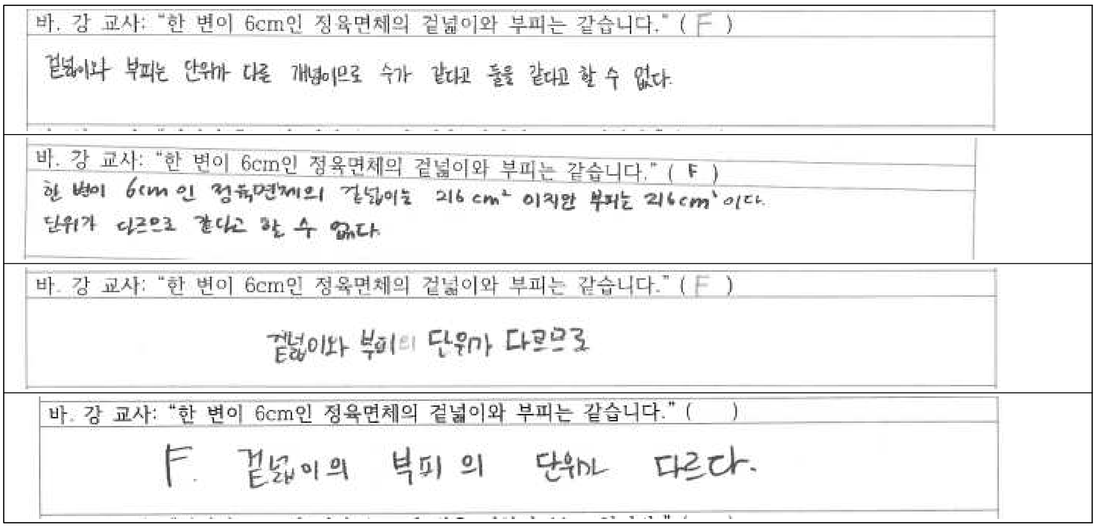
이 문항은 실제 연구자가 가르쳤던 초등학생이 갖고 있던 오개념을 바탕으로 만들었다. 이 문항은 '강 교사: 한 변이 $6cm$인 정육면체의 겉넓이와 부피는 같습니다.'이다. 박선영, 강완(2012)은 넓이나 부피를 학습할 때 2차원, 3차원으로 측정대상이 달라져도 자신이 구하고자 하는 것에 대한 개념을 정확하게 인식하지 못한다고 했다. 넓이와 부피의 차원과 개념이 다름에도 불구하고 학생들은 단순히 겉넓이 $216cm^2$, 부피 $216cm^3$에서 숫자 216이 같다는 이유로 둘을 "같다."라고 생각했다.

이 문항에 대해 38명의 응답자가 T라고 말했다. 이유를 설명한 응답자도 있었는데 겉넓이=36×6, 부피=6×6×6 등의 이유를 말했다. F라고 응답한 21명의 응답자 중 1명은 미응답, 1명은 겉넓이를 6×6×8이라고 계산하여 수가 다르다고 봤고, 나머지

19명의 응답자는 '단위가 다르다'라는 이유를 제시했다.



[그림 Ⅲ-11] 1-바 오답

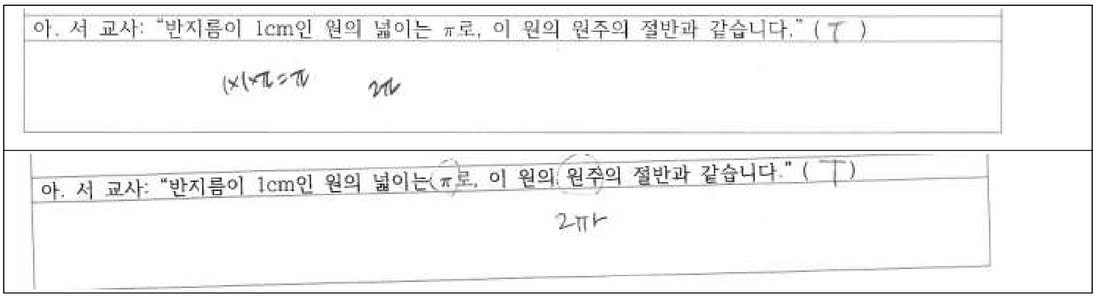


[그림 Ⅲ-12] 1-바 정답

3) 단위와 속성의 관계 이해정도 파악-길이, 넓이(1-아)

이 문항은 바 문항과 파악하려는 바가 같다. 아 문항에서는 길이와 넓이의 이해 정도를 파악하려 했다. 이 문항은 '서교사: 반지름이 $1cm$인 원의 넓이는 π로, 이 원의

원주의 절반과 같습니다.'이다. 44명의 응답자가 T라고 답했다. 15명의 응답자는 '단위가 다르다'라는 이유를 제시했다.

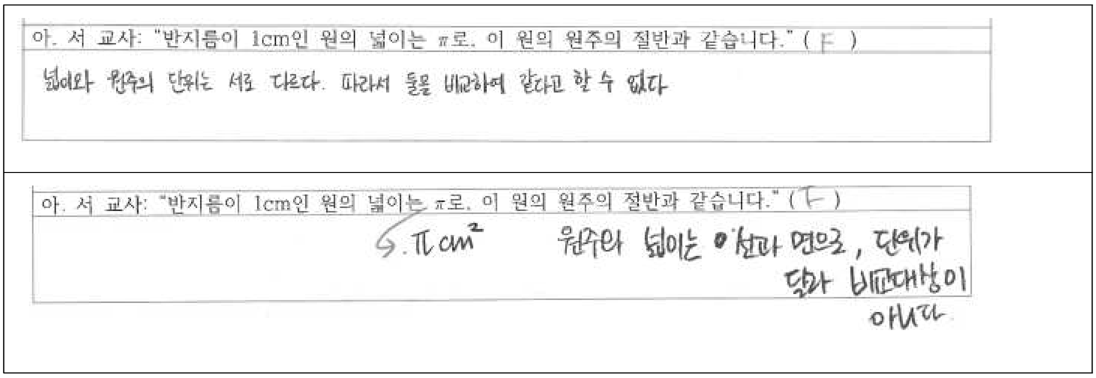

아. 서 교사: "반지름이 1cm인 원의 넓이는 π로, 이 원의 원주의 절반과 같습니다." (T)

$1 \times 1 \times \pi = \pi$ 2π

아. 서 교사: "반지름이 1cm인 원의 넓이는 π로, 이 원의 원주의 절반과 같습니다." (T)

$2\pi r$

[그림 Ⅲ-13] 1-아 오답


아. 서 교사: "반지름이 1cm인 원의 넓이는 π로, 이 원의 원주의 절반과 같습니다." (F)

넓이와 원주의 단위는 서로 다르다. 따라서 둘을 비교하여 같다고 할 수 없다

아. 서 교사: "반지름이 1cm인 원의 넓이는 π로, 이 원의 원주의 절반과 같습니다." (F)

S. $\pi\ cm^2$ 원주와 넓이는 선과 면으로, 단위가 달라 비교대상이 아니다.

[그림 Ⅲ-14] 1-아 정답

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 연구 결과

점과 선, 직선과 넓이, 넓이와 부피를 묻는 설문에서도 낮은 정답률을 보였다. 설문 응답들을 분석한 결과 형식적으로 공식을 이해하여 직선과 넓이, 넓이와 부피 사이의 관계에 대한 바른 이해가 부족함을 확인했다.

응답자들이 쉽게 수식으로는 응답하지만 구분구적법을 그림으로 표현하는 데에 어려움을 보였다. 정경환(2017)은 우리나라 학생들에 대해 정적분의 형식적인 계산능력은 좋지만 정작 이에 대한 해석, 분석 등의 능력은 부족하다고 한다. 이 이유로 리만합의 극한과 연관된 구분구적법에 대한 이해 부족을 말했다. 또 이에 대한 이유로 송정화, 신은주(2006)는 고등학교에서는 미적분을 형식적으로 다루고 단순 계산 위주로 학교 수업에서 다루는 점을 지적했다. (이는 초등학교 학생들이 기계적 형식적으로 측정을 이해하는 것과 맥락을 같이 한다.) 연구자가 실시한 위 설문에서 학생들이 Δx에 대한 이해정도를 볼 때 매우 낮은 것으로 확인된다. 예비교사들은 단순히 수식으로써 적분을 해결하며 Δx에 대한 큰 고민이 없었다. 앞에서 언급했듯 $f(a+\frac{b-a}{n}k)$와 Δx의 곱의 합이 아닌 $f(a+\frac{b-a}{n}k)$의 합으로만 적분을 이해하는 경향을 보였다. 이는 앞에서 살펴본 부정적분과 정적분의 관계를 배우는 과정에서 예비교사들이 적분과 미분의 관계를 역연산으로만 생각하는 것과 연관 깊다. 넓이를 미분하면 길이가 되는 상황을 보고, 그 역으로 단순히 길이가 쌓여 넓이가 된다고 보는 듯 하다. 이는 나아가 직선이 쌓여서 넓이가 된다고 생각하는 오개념을 갖게 할 수 있다.

단위와 속성의 관계 이해정도 파악(길이와 넓이, 넓이와 부피)을 위한 설문에서 낮은 정답률을 보였다. 이는 2차원, 3차원, 면, 입체에 대한 기하학적인 이해 없이 대상을 숫자로써만 이해하는 현상으로 보인다.

2. 논의

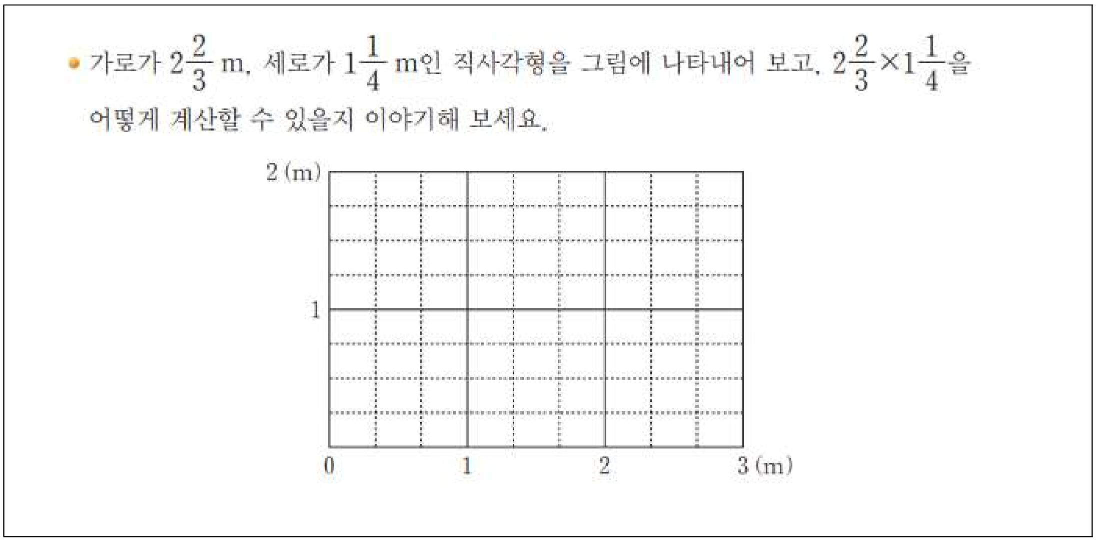
박선영, 강완(2012)은 학교에서 가르치는 수학은 학생들이 수학적 개념을 잘 정립하고 수학적으로 사고하고 원리를 바르게 이해하는 것이 중요하다고 하며, 수학을 가르치는 교사는 교육 방법, 학생 이해에 대하여 또 수학 내용에 대한 전문적 지식이 필요하다고 한다. 박현웅(2009)은 Ausubel과 Confrey를 인용하며 오개념을 설명한다. 학습 이전에 학생들에게 선개념이 내재되어 있으며 새로운 수학적 개념들이 학교 교육에서 만나게 되고, 그 때 일어나는 갈등과 마찰이 대립되는 데 그 때 가진 선개념을 오개념이라고 한다. 학생들의 선개념(오개념 일 수 있는)을 바른 개념과 대립하게 해야 할 교사가 오개념을 갖고 있거나 잘못된 방식의 지도를 했을 경우, 학생이 '바른 선개념'을 가진 상태로 학교 교육을 받더라도 오개념과 마찰을 일으키며 오히려 오개념을 갖게 될 수 있다.

위 같은 문제를 해결하기 위해 학생들이 측정과정을 배우며 오개념을 갖지 않게 하기 위한 교사들의 여러 교수·학습 용어 및 방안을 세 가지로 나눠서 살펴봤다. 첫째는 단위 넓이, 단위 부피를 강조하는 것이다. 둘째는 적분의 개념을 교사가 주지하도록 하고, 이 개념에 바탕이 된 바른 교수·학습 용어를 사용하는 것이다. 셋째는 직선과 넓이, 넓이와 부피의 관계를 생각한 바른 교수학적 용어와 장면을 제시하는 것이다.

첫째, 현재 교과서에서 제시하고 있는 단위 넓이(부피)에 대한 강조이다. 박선영, 강완(2012)는 수학 교사가 측정과정에서 개념 정립보다 측정을 위한 공식의 형식화 과정에 중점을 두고 반복적으로 공식을 암기하며 익히는 수업을 경계했다. 오영열(2010)은 교사들이 넓이에 대한 바른 지도를 위해서 배열 구조와 넓이 측정의 단위에 대한 정확한 이해가 필요하다고 한다. 또 그는 넓이 측정을 위해 단위의 특성을 이해하고 그 측정 단위가 반복하여 덮는다는 것을 알고, 단위 넓이의 측정 원리를 위해 평면의 배열 구조를 이해하는 것을 강조했다.

(가로)×(세로)와 (가로)×(세로)×(높이)와 같이 측정을 형식적으로 가르치는 것을 부정적으로만 볼 수는 없다. 직사각형, 직육면체 등의 넓이 부피를 측정할 때, 매번 단위넓이(부피)와 그 배열 구조를 생각하며 값을 구할 수는 없다. 넓이, 부피 공식이 필요한 이유는 편리성에서 찾을 수 있다. 박선용, 최지선, 박교식(2008)은 (가로)×(세로)로 넓이를 구하는 과정은 단위 정사각형이 가로와 세로에 포함된 횟수를 곱하는 기본 생각을 자연수 뿐만 아니라 실수의 맥락까지 확장하여 적용한 것으로 본다. 초등학교 5학년 교과서에 나오는 분수의 곱셈에서 교과서에서도 칸을 나

눠 분수의 곱셈을 제시하지만 바른 개념을 정립하기 위해 그 때마다 주어진 직사각형을 등분하고 배열하여 계산하기에는 무리가 있다.



[그림 Ⅳ-15] 초등학교 교과서 5학년 2학기 분수의 곱셈 제시

또 나귀수(2012)는 초등학교 6학년을 대상으로 넓이 개념 이해정도를 연구했는데 넓이 공식의 성립 이유를 설명할 때, 삼각형, 평행사변형의 공식을 설명하기 보다 직사각형의 공식 설명하기의 정답률이 더 낮았다. 이 중 오답에는 배열 구조 등을 이해하지 못하고 단순히 공식만 적은 경우가 있었다.

박현웅(2009)은 평행사변형의 넓이 공식은 직사각형의 넓이를 다룬 후에 유도할 수 있다고 한다. 정동권(2001)은 정사각형, 직사각형 외에 대부분의 다각형은, 등적변형, 분할 등으로 직접 측정이 아닌 간접 측정을 한다고 했다. 정사각형, 직사각형 등 기본이 되는 도형의 측정 지도가 충분히 된다면, 이 외에 다각형에 측정에 대한 이해가 더 풍부해지고, 다른 다각형들의 측정도 어렵지 않을 것이다.

위 연구들을 종합하여 보면, 배열구조만을 매번 강조하기에는 편리성의 관점에서 효율이 떨어지지만, 반대로 학생들의 직사각형의 넓이, 직사각형의 부피 등에 대한 이해 정도는 부족했다. 또 정사각형, 직사각형 등의 측정을 바르게 이해하면 다른 다각형의 측정이 어렵지 않음을 확인했다. 김수환 등(2009)은 스켐프의 관계적 이해를 설명하며 관계적, 구조적 이해를 시키면서 지도하기가 학생에게는 많은 시간이 필요하고 어렵기 때문에 도구적 이해에 의해 지도를 한다고 했다. 그러나, 단순히 도구적 이해를 위한 지도에만 머문다면 학생들이 (가로)×(세로)라는 식을 배우며 '변이 쌓여서 넓이가 된다'는 등의 오개념이 생기는 것을 막을 수 없다.

단위넓이, 단위부피, 배열구조 등에 바탕을 둔 개념학습을 강조하여 배열의 구조에서 (가로)×(세로)라는 공식을 끌어낼 수 있도록 지도하여야 한다. 또 이미 선행학습 등으로 넓이, 부피의 공식이 형식적 고착화된 학생들을 지도하기 위하여 문제풀이의 편리성에만 초점을 두지말고 공식이 어떻게 형성됐는지, 넓이 또는 부피의 개념을 재상기하며 수업해야 한다.

둘째, 적분의 개념을 교사가 주지하고 이를 바탕으로 초등학교 수준에 맞게 재구성된 교수학적 용어를 쓰는 것이다. 적분의 한자의 뜻은 잘게 부순다는 '나눌 분'과 '쌓는다 적'으로 잘게 부숴서 쌓는다는 것이다. 6학년 교과서에 제시된 원의 넓이를 구하는 상황에서 원을 아무리 잘게 등분해도 Δx에 해당하는 부분은 0이 아니다. 또 원주의 형태로 자르며 나눈다고 해도 $2\pi r$의 두께는 0이 아니다. 선분의 넓이는 0이다. 선분을 모아서 넓이가 될 수 없다. 0이란 개념과 0에 한없이 가까워진다는 것은 다른 의미이기 때문에 이를 바탕으로 하여 교사가 적절한 교수학적 용어를 사용해야 한다. 안선영, 방정숙(2006)은 초등학교 학생을 가르치는 교사가 단순히 교과서에 제시된 내용뿐만 아니라 다양한 방법을 통해 넓이 공식을 유도하는 것이 필요하다고 한다. 비록, 이 유도되는 공식이 초등 교육과정을 넘어서는 일이라 직접적으로 가르치지 못한다고 하더라도 이런 방법과 개념을 익히고 있다면 학생들의 오개념 형성을 막는 데 도움이 될 것이다.

직선이 쌓여서 면적이 되는 것이 아니고, 넓이가 쌓여서 부피가 되는 것이 아니다. 예를 들어 교사는 $2cm \times 3cm \times 5cm$라는 식을 봤을 때, 단순히 학생들에게 $2cm \times 3cm \times 5cm$는 $30cm^3$이라고 공식을 주입시키면 안된다. 더 나아가 '설문 문항 1-가'와 같이 오개념이 존재하는 경우, $2cm \times 3cm$는 $6cm^2$라고 밑넓이를 구한 후 $6cm^2$에 $5cm$를 곱해서 밑넓이가 $5cm$만큼 쌓였다고 가르칠 우려가 있다. 면의 넓이는 쌓을 수 있는 대상이 아니고, 단위가 cm^3로 달라지지 않음을 교사는 인지하고 있어야 한다. 이런 경우 대안으로, 밑넓이로써 $2cm \times 3cm$를 제시하고, 또 단위 부피의 개수로써 $2cm \times 3cm \times 1cm$를 제시하여 $6cm^3$가 5층 높이로 쌓였다고 지도하는 것이 바람직할 것이다.

$3cm \times 2cm$를 가로가 $3cm$이고 세로가 $2cm$인 직사각형으로 생각하고 $3cm \times 2cm$라는 식을 볼 때, 이 식의 주어를 누구로 보는지가 중요하다. $3cm$가 $2cm$만큼 쌓인 것이 아니고 가로가 $3cm$이고 높이가 $1cm$인 $3cm^2(=3cm \times 1cm)$가 높이가 $2cm$가 되도록 쌓은 것이다. 이를 단순히 '$3cm^2$가 $2cm$의 높이 만큼 쌓였다'라는 표현도 오개념을 심어줄 수 있다. $3cm \times 1cm$와 $6cm \times 0.5cm$ 모두 $3cm^2$이지만, 전자인 경우 $3cm \times 2cm$를 의미하지만 후자의 경우 $6cm \times 0.5cm \times 4$를 의미할 수도 있기 때문이다.

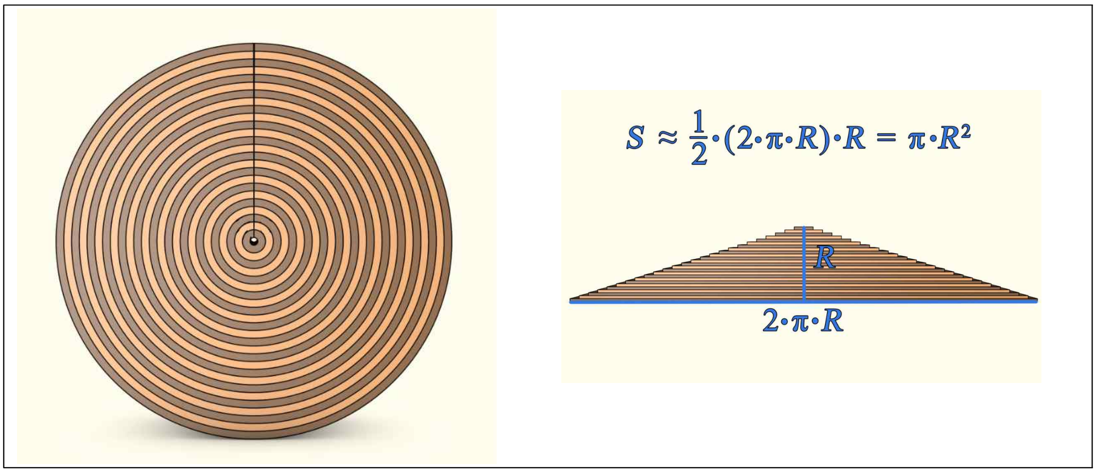
단순히 $3cm \times 2cm$를 보더라도 가로가 $3cm$ 세로가 $2cm$인 도형이라고 읽는 것이 옳고, 가로 $3cm$가 $2cm$만큼 쌓인 도형이란 표현은 잘못됐다. ‘선분이 쌓일 수 있지 않을까?’, ‘선분이 높이를 또는 넓이를 가질 수 있지 않을까?’라는 질문에 ‘설문 문항2’를 통해서 답을 제시할 수 있다.

먼저, 넓이를 쌓는다는 표현을 다음과 같이 나타낼 수 있다. $3cm \times 2cm$를 세로 방향으로 한 번 쌓으면 $3cm \times 2cm \times 1$, $3cm \times 1cm$를 세로 방향으로 두 번 쌓으면 $3cm \times 1cm \times 2$, $3cm \times 0.5cm$를 세로 방향으로 네 번 쌓으면 $3cm \times 0.5cm \times 4$ 등과 같이 표현할 수 있다. 이때 ‘세로에 해당하는 수’와 ‘세로로 몇 번 쌓였는가에 해당하는 수’의 곱은 모두 $2cm$이다. ‘세로에 해당하는 수’는 ‘세로로 몇 번 쌓였는가에 해당하는 수’와 연관된다. 예를 들어, n개를 쌓았다면 세로는 $\frac{2}{n}cm$이다. $n(=\frac{2}{\Delta x})$을 충분히 큰 수로 생각한다면 세로에 해당하는 $\Delta x(=\frac{2}{n})$는 0에 가까워진다. 이를 식으로 다시 표현하면, $3cm \times \Delta xcm \times \frac{2}{\Delta x}$와 같다. 이 식 $3cm \times \Delta xcm \times \frac{2}{\Delta x}$의 의미는 $3cm \times \Delta xcm$의 넓이를 가진 직사각형을 $\frac{2}{\Delta x}$개 만큼 쌓아 만든 도형의 넓이를 의미한다. Δx가 0에 가깝지만 0은 아니다. $3cm \times \Delta xcm$의 의미는 Δxcm만큼의 높이를 갖는 직사각형이다. 길이는 쌓을 수 있는 대상이 아니다. 쌓을 수 있는 대상은 (길이)×(길이)의 직사각형이다.

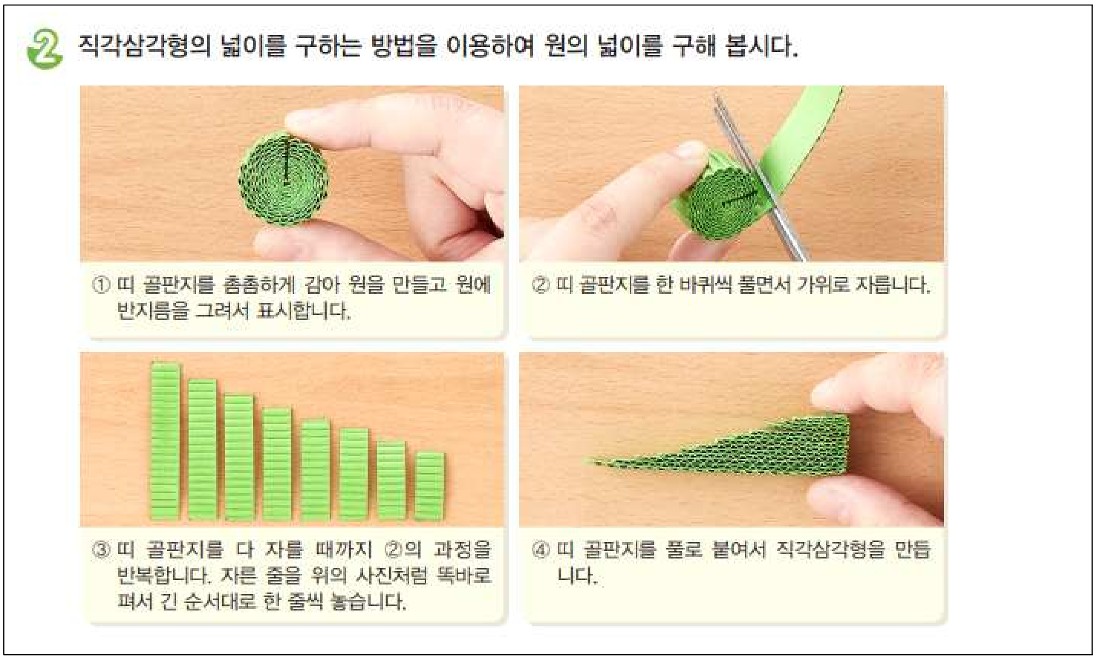
설문 문항 2를 통해 이를 살펴보면 다음과 같다. 원을 같은 두께를 가진 동심원 모양(원주의 형태)으로 나눈 조각으로 사다리꼴을 만들고 이를 층층히 쌓으면 삼각형이 된다. 이 과정은 등적 변환과 같기에 원의 넓이와 삼각형의 넓이는 같고, 이 삼각형의 높이를 r(반지름)로 보고 이를 n등분 하였을 때, x번째 도형의 넓이는 $2\pi x \Delta x$이다. ($\Delta x = \frac{r}{n}$, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x = r$) Δx는 0에 가깝지만 0은 아니다. r을 무한히 n등분한 값을 더하게 되면 πr^2이 된다. 이 원의 넓이는 단순히 선분이 쌓인 것이 아니라 $2\pi x \Delta x$라는 도형들의 넓이가 쌓인 것이다. 층층이 쌓여 만들어진 삼각형의 넓이는 πr^2이다. 충분히 작게 잘랐을 때, 각 층을 구성하는 사다리꼴의 높이가 0에 가까워진다. 그래서 넓이가 아닌 길이만을 가진 선분처럼 오해할 수 있다. 이는 선분을 쌓아서 삼각형을 만든다고 오해를 만든다. 하지만 선분은 폭이 없어서 그 넓이가 0이다. 첫 번째 선분의 넓이부터 마지막 선분의 넓이를 모두 더하면 그들의 합인 ‘0 + 0 + 0 +.... + 0’ = 0으로 삼각형의 넓이는 0이라는 잘못된 결론에 도달한다. 이는 선분을 쌓는다는 잘못된 생각으로부터 발생한다.

초등 예비교사들이 구분구적법의 내용을 바르게 이해한다면 학생들에게 측정을 지

도할 때 바른 교수학습 언어를 교정할 수 있다고 생각한다. 초등학생들에게 초등 교육과정을 넘어서는 적분의 내용을 직접적으로 설명할 수는 없지만, 이를 가르치는 교사는 이런 개념에 대해서 생각하고 염두하여 ‘가로가 쌓인다’ 등의 오개념이 섞인 교수학습 발언을 하지 말아야 한다. 부피는 아무리 잘라도 부피이고, 넓이는 아무리 잘라도 넓이이다. 거꾸로 생각하면 아무리 얇은 종이도 높이가 있는 부피이고, 얇은 종이가 면이 아니라 부피이기에 여러 겹 쌓았을 때 한눈에 부피처럼 보이게 된다. 선을 쌓아서 넓이가 될 수 없고 넓이를 쌓아야만 넓이가 된다. 넓이가 0이어도 넓이로써 0이다.



[그림 Ⅳ-16] 원의 넓이를 삼각형 형태로 적분



[그림 Ⅳ-17] 원의 넓이를 삼각형 형태로 적분 2

[그림 Ⅳ-16]은 'https://en.etudes.ru/etudes' 사이트에서 인용한 내용이고, [그림 Ⅳ-17]은 현행 수학교과서 6학년 2학기 5단원에서 인용한 내용이다. 두 내용에서 원의 넓이를 구하는 과정을 살펴볼 때, 아무리 얇게 자르더라도 선분이 쌓이는 것이 아니라는 사실은 동일하다. 이 내용은 본 연구의 '설문문항 2'와 연관된다.

셋째, 단위와 속성을 고려하여 바른 교수학적 용어와 장면을 제시하는 것이다. 정유경, 방정숙(2013)이 제시한 'KQ에서의 변환 지식 중 1)예의 선택'에서 교사가 조심스럽게 숙고의 과정을 통해 예가 선택된다고 한다. 그 과정에서 개념의 의미를 모호하게 만들 수 있다고 했다. 또 'KQ에서의 변환 지식 중 2)표현의 선택'에서 기호들 사이 작용으로 만들어진 추상적 학문을 수학이라고 보고, 구체물과 수학의 추상적 세계의 사이를 표현으로 연결해준다고 보는데, 이 때 표현의 선택은 교사들만의 특정한 지식으로 정해질 가능성이 높다고 한다. 수학은 추상적이기에 교사는 이를 구체적으로 설명하기 위해 예를 선택하고 표현을 선택하는데 이때 바른 수학 지식이 없다면 오개념이 형성되기 쉽다. '설문 문항 1-가'와 같이 직육면체인 A4용지 1장을 면으로 설명한다면 학생들에게 오개념을 야기할 수 있다.

또 교사가 숫자에만 초점을 둬서 지도한다면, 학생들이 바른 속성을 이해하지 못한다. 학생들이 측정 과정에서 자신들이 무엇을 하고 있는지, 무엇을 계산하고 있는지 인지하게 해 줄 필요가 있다. 단위와 속성을 인지시키도록 그 속성이 지닌 본 예시

를 제시할 필요가 있다. 김주봉(2000)은 넓이 지도가 공식 암기를 하는 식으로 진행되면 단순히 공식으로 문제를 푸는 식의 교육이 이루어진다고 했다. 정동권(2001)은 넓이 지도에서 공식의 중요성을 말하면서도 학생들이 공식을 익히기 전 주어진 단계들에 대한 바른 이해가 되지 않고 공식이 도입되면 이를 그냥 암기하고 이에 따라 계산하게 돼서 학습 목표를 달성하지 못한다고 한다. 2015 개정 수학과 교육과정에 (3) 측정에 관한 몇 가지 성취기준을 보면 다음과 같다. [6수03-05]직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 통하여 직사각형과 정사각형의 넓이를 구할 수 있다., [6수03-08] 원주와 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다., [6수03-09] 직육면체와 정육면체의 부피를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다. 넓이를 구하는 방법, 부피를 구하는 방법을 아는 것이 성취기준이지만 공식 암기를 통해 측정값을 알아내는 것은 성취기준에 도달한 것이 아니다.

강완(2016)은 초등학교 수학에서는 평면도형이나 입체도형의 용어를 정의하지 않고 생활 용어로 사용하는 것이 필요하다고 한다. 학생들이 직관적으로 넓이와 부피를 인지할 수 있다면 자신이 구하는 대상의 속성을 알고, 그 차이를 수학 학습에서 쉽게 구별할 수 있을 것이라고 생각한다.

김수환(2009)은 논리적 사고와 직관적 판단의 관계에 대해서 설명한다. 전자는 후자에 대한 불안감이나 의문이 생길 때 발생하고, 후자는 논리적 사고 과정을 거쳐 그 확실성을 보장받는다고 한다. 학생들이 직관력을 키우기 위해서 구체적 조작활동과 영상적 표기(그림, 그래프)를 중요하게 여기는 지도가 필요하다고 한다. 또 그는 프로이덴탈의 수학 학습·지도 원리 중 '안내된 재발명'에 대한 설명을 한다. 학생들이 자발적인 수학 능력 개발 가능성 여부보다는, 학생들이 보일 수 있는 반응들을 생각하며 그에 따라 상황을 충분히 예상하고 답변하는 교사의 태도를 중시한다. 학생들이 차원이 변화되는 과정에 직관적인 판단이 적용 될 때, 학생이 이를 자발적으로 발전시키길 바라기보다는 논리적 사고 과정을 하기 위해 안내자로서 교사의 역할이 중요하다.

A4용지 등을 예시로 들어서 면이라고 표현하지 않고, 부피를 표현하기 위해 물통에 물을 담는 방식을 선택하거나 컴퓨터 프로그램 등을 이용하는 것이 그 방법이 될 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

초등 예비교사들을 대상으로 측정에 관한 오개념을 분석하기 위해, 이와 관련된 내용으로 설문을 했다. 그 결과 예비교사들이 측정에 관한 여러 오개념을 갖고 있는 것을 확인했다. 예비교사들이 오개념을 갖고 훗날 초등학생들에게 측정을 지도한다면, 초등학생들이 오개념을 답습할 가능성이 크다.

예비교사들은 학생들이 오개념이 갖지 않게 바르게 지도해야 한다. 그 방법으로 첫째 현행 교육과정에서 강조하고 있는 단위 넓이, 단위 부피에 대한 바른 이해가 필요하다. 단순히 공식을 암기하는 것이 도형의 측정을 바르게 한다고 볼 수 없다. 측정 과정에서 단위 넓이, 단위 부피, 배열 구조 등의 이해를 통해 바른 개념을 정립시킬 필요가 있다. 둘째 초등 예비교사가 구분구적법의 의미를 명확히 이해할 필요가 있다. 초등 교육과정에는 적분, 구분구적법 등에 대한 내용이 없으나 적분의 개념이 초등 교과서 여러 부분에 녹아 있는 점을 볼 때, 예비교사들이 직접적으로 적분 등의 개념을 가르치지는 않지만 수업 중 녹아드는 교수학적 용어를 선택할 때 오개념이 아닌 바른 개념으로 용어, 문장들이 구사되어야 한다. 셋째, 단위와 속성을 바르게 인지하도록 바른 예시를 제시하는 것이다. 잘못된 예시를 들어 속성을 잘못 이해하게 하면 안된다.

연구 대상들은 아직 직접 초등학생들을 지도한 경험이 없다. 초등 예비교사들이 실제 측정지도 시에 학생들에게 어떻게 접근하는지를, 어떤 교수학습 용어를 사용하는지를 연구할 필요가 있다. 또 구분구적법에 대한 바른 이해와 초등학생 측정 지도에서 잘못된 교수학적 용어를 쓰는 관계에 대해 좀 더 면밀히 연구할 필요가 있다.

또 제시한 교수학습방법 및 용어를 학생들에게 적용했을 때, 학생들이 오개념을 갖지 않고 바르게 학습하는지도 확인해볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

강완. (2016). **초등 수학 교과서의 잘잘한 감자들.** 교우사.

고신애. (2014). **초등학교 5학년 학생들의 둘레와 넓이의 관계에 관한 이해와 교사의 지도방법 분석.** 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육부. (2015). **수학과 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

교육부. (2019a). **수학 5-2.** 서울: ㈜천재교육

교육부. (2019b). **수학 6-2.** 서울: ㈜비상교육

김수환, 방성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실. (2009). **초등학교 수학교육론.** 동명사.

김원경. (2018). **미적분.** 비상교육.

김주봉. (2000). **도형의 분할과 지도 방안에 관한 연구.** 청주교육대학교 과학과 수학교육 논문집, 21, 1-18.

김지선. (2005). **유클리드 기하학에서 여러 정의들에 관한 고찰.** 목포대학교 교육대학원 석사학위논문.

나귀수. (2012). **초등학교 학생들의 넓이 개념 이해도 조사.** 한국초등수학교육학회지 16(3). 451-469.

박선영, 강완. (2012). **평면도형의 넓이 지도에 대한 교사의 PCK분석.** 대한수학교육학회지. 22(4). 495-515

박선용, 최지선, 박교식. (2008). **넓이 개념의 SMSG 교수-학습 방식에 대한 비판적 고찰.** 학교수학, 10(1), 123-138.

박정인. (2015). **초등학교 교사들의 평면도형의 넓이에 대한 교수학적 내용 지식 조사 연구.** 대구교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박현웅. (2009). **평면도형의 넓이 구하기에서 나타나는 오류유형과 원인 분석.** 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

송정화, 신은주. (2006). **역사발생적 원리에 따른 미분개념의 도입 방안.** 이화여자대학교 교과교육연구소 학술지 <교과교육학연구>. 10(2). 595-614.

신보미. (2008). **구분구적법과 정적분의 개념 분석.** 학국학교수학회논문집. 11(3). 421-438.

안선영, 방정숙. (2006). **평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석.** 대한수학교육학회지 16(1). 25-41

오영열. (2010). **초등학교에서의 넓이 측정 지도에 관한 고찰-2007년 개정 수학과**

교육과정을 중심으로. 서울교육대학교 초등교육연구소 21(1). 233-245

이준열. (2017). **수학Ⅱ.** 천재교육.

정경환. (2017). **구분구적법 및 정적분을 이용한 도형의 넓이 및 부피에 관한 지도 방안.** 부산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

정동권. (2001). **평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장.** 인천교육대학교 과학교육 논총 제 13집 1-36.

정연준, 강현영. (2008). **정적분의 무한소 해석에 대한 고찰.** 대한수학교육학회지 제 10권 제 3호. 375-399.

정유경, 방정숙. (2013). **초등 수학 수업에서 발현되는 교사의 변환 지식 분석.** 한국학교수학회논문집. 16(4). 695-717.

최정현. (2011). **정적분 기호 이해의 특징과 교수학적 전략.** 한국수학사학회지 제 24권 제 3호. 77-94.

Circle area. (n.d.). 2022. 11. 23, https://en.etudes.ru/etudes

A B S T R A C T

A Survey on Pre-Elementary Teacher's Misconception about Measurement Domain based on the Concepts of Integrals

Ha, Sung Chan
Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Lee, Hosoo

The purpose of this study was to investigate the misconception of pre-elementary teachers, in regards to, measurement. This was conducted through a questionnaire written by the researcher. The contents of this questionnaire includes: realizing the understanding and the differences among point, line, width and volume, the understanding of integral calculus, and lastly, the understanding of the relations between units and attribute of the pre-elementary teacher. The results of this conducted questionnaire produced the following:

First, most respondents(about 90%) have the misconception of understanding the difference among point, line, width and volume. Second, most respondents did not understand integral calculus. Third, most respondents(about 70%) did not understand the relations between units and attribute.

To effectively teach these methods to the elementary students, First, pre-elementary teachers must understand square(volume) unit, and they must be able teach students the method while focusing on the main conception, rather than with simply memorizing the formula. Second, although elementary students are not expected to learn integral calculus, when we think of the elementary textbook, we can see that they do contain the concepts within them. Pre-elementary teachers

need to understand ‘mensuration by parts’ and teach them with a correct pedagogical term based on integral calculus. Third they need to present correct pedagogical examples and words to students considering the the relations between units and attribute.

If we take into consideration these three points, the teachers will be properly equipped to educate students on the process of measurement.

Key words : mensuration by parts, integrals, point, line, width, volume, , units, attribute, and measurement.

부 록

〔부록 1〕 예비교사용 설문지

〔부록 1〕**예비 교사용 설문지**

1. (가~아) 다음 중 맞은 문장에는 (　　)에 T라고 적고, 틀린 문장에는 (　　)에 F라고 적어주세요. **틀린 문장(F)에는 그 이유**를 적어주세요.

가. 김 교사: "오늘은 직육면체의 부피에 대해 알아보겠습니다. 여기 A4용지를 한 장씩 쌓고 쌓아 여러 장이 되면 직육면체가 됩니다. 이와 같이 가로와 세로를 곱하여 면의 넓이를 구합니다. 이 면을 쌓으면 입체가 됩니다. 따라서 면의 넓이에 그 높이를 곱하면 직육면체의 부피가 됩니다." (　　)
나. 이 교사: "마름모의 넓이를 구하는 공식은 '한 대각선 x 다른 대각선 ÷ 2' 입니다." (　　)
다. 박 교사: "점과 선에 관계에 대해서 알아보겠습니다. 점이 움직인 자취를 선이라고 할 수 있습니다." (　　)
라. 오 교사: "직사각형의 넓이를 구하는 공식은 가로 x 세로입니다. 이 공식을 볼 때, 직사각형의 넓이는 가로변이 세로변의 길이만큼 쌓였다고 생각할 수 있습니다." (　　)
마. 양 교사: "우리가 살고 있는 이 세계는 3차원입니다. 우리는 점, 선, 면, 입체 중 입체를 인지하지 못 하고, 입체를 면들의 합으로써 경험적으로 이해합니다." (　　)

바. 강 교사: “한 변이 6cm인 정육면체의 겉넓이와 부피는 같습니다.” (　　)
사. 안 교사: “길이가 5cm인 변과 6cm인 변을 더하면 11cm입니다.” (　　)
아. 서 교사: “반지름이 1cm인 원의 넓이는 π로, 이 원의 원주의 절반과 같습니다.” (　　)

2. 반지름의 길이가 r인 원의 원주는 $2\pi r$입니다. 이를 이용하여 $\int_0^r 2\pi r\,dr$의 의미를 <u>**그림과 글**</u>로 설명하세요.
