초등교육연구 제14집 제2호(2010. 2.) pp. 39~52
제주대학교 초등교육연구소

각의 3등분에 관한 고찰

현 종 익 (교육대학 수학교육전공 교수)

목 차

Ⅰ. 각(angle)의 정의
Ⅱ. 3차방정식의 해법
Ⅲ. Euclid 도구와 작도
Ⅳ. 각 3등분의 불가능성
Ⅴ. Euclid도구와 그 외 도구로서의 각 3등분
※ 참고문헌

요 약

본 논문은 고대부터 많은 기하학자들이 각의 3등분(trisection of an angle)에 대해서 깊은 관심을 갖고 많은 노력을 경주하였으나 모두 다 실패하고 오직 근사치의 작도만 해결하였다.

그래서 왜 일반각이 Euclid도구로써 작도 불가능한가에 관심을 갖게 되었다. 이러한 의문을 풀기 위해서 삼각함수의 3배각 공식과 3차방정식의 해법이 우선적으로 필요함을 제시한 논문이다.

ABSTRACT

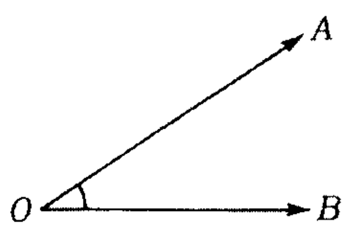
A Study On Trisection of an Angle

Hyun, Jong-Ik

A number of geometricians have been interested in problem of trisection of an angle since the ancient times and have tried to solve it with the aid of Euclidean tools. But all of them failed to solve it, only to obtain the construction of approximate value. This paper suggests the need for formulas for triple angles of trigonometric function and the solution of cubic equation in order to solve the problem.

Ⅰ. 각(angle)의 정의

[정의 1] 끝점을 공유하는 두 반직선의 합집합으로 된 도형을 **각**이라 한다.



〈그림 1〉

이때 공통의 끝점을 각의 꼭지점, 두 반직선을 각의 변이라 한다. 각은 그가 놓이는 평면을 각의 내부와 외부의 두 영역으로 나눈다.

[정의 2] 두 변 OA와 OB가 한 직선을 이룰 때 그 각을 **평각**(stright angle)이라 하고, 평각의 $\frac{1}{2}$을 **직각**(right angle)이라 하며 $\angle R$로 표시한다. 그리고 더하여

직각이 되는 두 각을 서로 **여각**(complementary angle)이라 하고, 더하여 평각이 되는 두 각을 서로 **보각**(supplementary angle) 이라 한다. 그리고 직각보다 큰 각을 **둔각**(obtuse angle), 직각보다 작은 각을 **예각**(acute angle) 이라 한다.

Ⅱ. 3차방정식의 해법

3차방정식에 대해서는 오로지 Italia수학자들의 공적이라 하지 않을 수 없다. 1515년에 **Ferro**(1465~1526)가 $x^3+mx=n$인 형태의 3차방정식을 풀었고, 이로부터 20년 후인 1535년에 역시 Italia수학자 **Fontana**(별명 Tartalia, 1499?~1557)가 $x^3+px^2=q$인 형태의 3차방정식을 풀었다. 여기에서는 Ferro의 방법을 소개한다.

$$\text{3차방정식 } x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

여기서 $x=y-\dfrac{a}{3}$로 두면 $\left(y-\dfrac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\dfrac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\dfrac{a}{3}\right)+c=0$

이고, 정리하면 다음과 같이 y^2의 항이 없는 3차방정식이 된다.

$$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}\right)=0$$

$b-\dfrac{a^2}{3}=p,\ c-\dfrac{ab}{3}+\dfrac{2a^3}{27}=q$로 두면

$$y^3+py+q=0 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

방정식 ②를 풀기 위해서 $y=u+v$로 놓으면

$$(u+v)^3+p(u+v)+q+0$$

이것을 정리하면 $(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0$

$3uv+p=0$인 조건 아래에서 $u^3+v^3+q=0$

즉 $$u^3+v^3=-q,\ uv=-\frac{p}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

다시 쓰면 $u^3+v^3=-q,\ u^3v^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3$

여기서 u^3과 v^3을 두 근으로 하는 2차방정식은

$$t^2-(u^3+v^3)t+u^3v^3=0$$

즉 $$t^2+qt+\left(-\frac{p}{3}\right)^3=0$$

이것을 풀면 $t=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$

여기서 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=A,\ -\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=B$로 두면

$u^3=A,\ v^3=B$가 될 것이다.

(i) $u^3=A$이면 $v^3-A=0,\ (u-\sqrt[3]{A})(u^2+\sqrt[3]{A}u+\sqrt[3]{A^2})=0$

그래서 $$u=\sqrt[3]{A},\ u=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A}, \quad \cdots\cdots ④$$

(ii) $v^3=B$에서도 $$v=\sqrt[3]{B},\ v=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B} \quad \cdots\cdots ⑤$$

④⑤ 중에서 식 ③을 만족하는 것은 다음과 같이 세 쌍뿐이다.

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{A} \\ v = \sqrt[3]{B} \end{cases}, \quad \begin{cases} u = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A} \\ v = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B}, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A} \\ v = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B}, \end{cases}$$

여기서 u와 v의 첫 번째 쌍은 $uv = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{AB}$이고

$$AB = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)$$

$$= \left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

이므로 $uv = \sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{p}{3}$가 되어 식 ③을 만족하고, 나머지 두 쌍도 이와 같이 하면 식 ③을 만족한다.

그리고 $x = y - \frac{a}{3} = (u+v) - \frac{a}{3}$이므로 주어진 3차방정식의 세 근은

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - \dfrac{a}{3} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B} - \dfrac{a}{3} \\ x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A} + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B} - \dfrac{a}{3} \end{cases}$$

<예제 1> 3차방정식 $x^3 + 3x^2 + 9x + 14 = 0$을 풀어라.

【풀이】 우선 $x = y - \frac{a}{3} = y - \frac{3}{3} = y - 1$로 두면

$$(y-1)^3+3(y-1)^2+9(y-1)+14=0$$ 이고, 이것을 정리하면

$$y^3+6y+7=0$$

$p=6,\ q=7$이므로

$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^3}$$

$$=-\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=1$$ 이고 $B=-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}=-8$이다.

(i) $u^3=A=1$에서 $(u-1)(u^2+u+1)=0$

$$\therefore\ u=1,\ u=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(ii) $v^3=B=-8$에서 $(v+2)(v^2-2v+4)=0$

$$\therefore\ v=-2,\ v=1\pm\sqrt{2}i$$

그런데 $uv=-\frac{p}{3}=-\frac{6}{3}=-2$을 만족하는 u와 v의 값은

$$\begin{cases} u=1 \\ v=-2, \end{cases}\quad \begin{cases} u=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ v=1+\sqrt{3}i \end{cases}\quad \begin{cases} u=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ v=1-\sqrt{3}i \end{cases}$$

그리고 $x=y-1=(u+v)-1$이므로

$$\begin{cases} x_1=(1+(-2))-1=-2, \\ x_2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+(1+\sqrt{3}i)\right)-1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}i}{2} \\ x_3=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+(1-\sqrt{3}i)\right)-1=\dfrac{-1-3\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

[별해] 인수정리(Factor Theorem)로 풀면

$$x = \pm\frac{\text{상수항의 약수}}{x^3\text{의 계수의 약수}} = \pm\frac{14\text{의 약수}}{1\text{의 약수}} = \pm\frac{1, 2, 7, 14}{1}$$

$$= \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$$

이 여덟 개의 값 중에서 $x = -2$만이

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 9(-2) + 14 = 0$을 만족하므로, 이 3차식은 $x+2$인 인수를 갖는다.

그래서 $(x+2)(x^2+x+7) = 0$

여기서 $$x = -2,\ x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

<예제 2> 3차방정식 $x^3 + 9x - 6 = 0$을 풀어라.

[sketch] 인수정리로 풀어보기 위해 $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$을 위 방정식에 대입해 보면 어느 것도 만족하는 것이 없다. 그래서 일반적인 해법으로 풀어보자.

【풀이】 주어진 3차방정식 $x^3 + 9x - 6 = 0$에서 $p = 9,\ q = -6$.

그래서 $$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{-6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}\right)^3}$$

$$= 3 + 6 = 9\text{이고 } B = 3 - 6 = -3\text{이다.}$$

(i) $u^3 = A = 9$에서 $(u - \sqrt[3]{9})(u^2 + \sqrt[3]{9}u + \sqrt[3]{9^2}) = 0$

$$\therefore u = \sqrt[3]{9},\quad u = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{9}$$

(ii) $v^3 = B = -3$에서 $(v+\sqrt[3]{3})(v^2-\sqrt[3]{3}v+\sqrt[3]{3^2})=0$

$$\therefore\ v=-\sqrt[3]{3},\ v=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{3}$$

그런데 $uv=-\frac{p}{3}=-\frac{q}{3}=-3$을 만족하는 uv의 값은

$$\begin{cases} u=\sqrt[3]{9} \\ v=-\sqrt[3]{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} u=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{9} \\ v=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} u=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{9} \\ v=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

그래서 $x=u+v$가 위의 3차방정식의 근이므로

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3} \\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{3} \\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

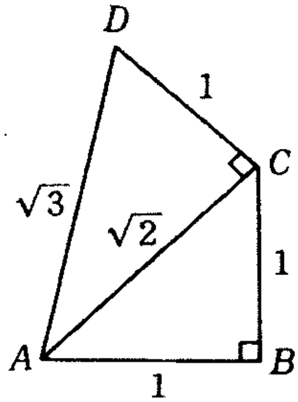
Ⅲ. Euclid 도구와 작도

[정의 3] **작도**(construction)란 **Euclid 도구**로서 주어진 조건에 맞는 **도형**을 그리는 것을 말한다. Euclid도구(tool)란 눈금이 없는 곧은 **자**(straight-edge)와 **컴퍼스**(compasses)를 말하면, 모든 도형의 작도는 다음과 같은 보조정리를 염두에 두고 해야만 할 것이다.

[보조정리 1] 주어진 단위길이로부터 Euclid도구를 사용해서 작도 가능한 길이의 크기는

대수적인 수이다.

[설 명] 주어진 단위길이 AB로부터 대수적인 수 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 등을 작도할 수 있다.



〈그림 2〉

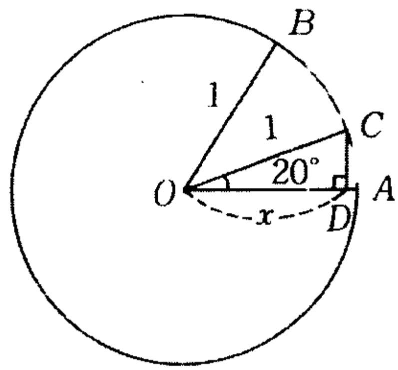
역으로 대수적인 수라고 작도가 다 가능한 것은 아니다. 즉 $\sqrt[3]{2}$와 $\sqrt[3]{3}$ 등은 대수적인 수지만 Euclid도구로서 작도 가능하지 않다. 물론 초월수 π, e, $\log 2$, $\sin 80°$ 등도 작도 불가능하다. 따라서 "작도 가능한 수는 대수적인 수이다."는 뜻이다.

[보조정리 2] 주어진 단위길이로부터 Euclid도구를 사용해서 유리계수를 가지나 유리근을 전혀 갖지 않는 **3차방정식의** 근의 길이는 작도할 수 없다.

[설 명] 〈예제1〉의 3차방정식 $x^3+3x^2+9x+14=0$은 계수가 모두 유리수이며, 근도 유리수 $x_1=-2$이므로, 단위 길이로부터 이것을 작도할 수 있다. 그런데 〈예제 2〉에 있는 3차방정식 $x^3+9x-6=0$은 유리수 계수를 갖지만 유리근을 전혀 갖지 않는다. 즉 $x_1=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}$은 유리수가 아닐 뿐만 아니라 세제곱근의 수이므로 Euclid도구로서는 작도 불가능하다.

Ⅳ. 각 3등분의 불가능성

[정리 1] 임의의 각의 3등분은 Euclid도구로는 작도가 불가능하다.



〈그림 3〉

[증　명] 어떤 특별한 각의 3등분이 Euclid도구로는 작도가 불가능하니 일반적인 각도 불가능하다는 식으로 증명하고자 한다.

우선 cosine의 3배각 공식으로부터 다음과 같은 항등식을 얻는다.

$$\cos\theta = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \qquad \cdots\cdots①$$

$\theta = 60^\circ$ 로 두면

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$$

그리고 $\cos 20^\circ = x$로 두면

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0 \qquad \cdots\cdots②$$

〈그림 3〉와 같이 단위원을 그리고 반경 OC가 $\angle AOB = 60^\circ$ 를 3등분 하였다고

가정하자. 그러면 점 C에서 단위길이 OA에 수선의 발 D를 내릴 수 있으며, $OD = \cos 20^\circ = x$ 이다.

다시 생각해 보면 단위길이 OA 위에 길이 x인 선분 OD를 작도할 수 있으면 점 D를 구할 수 있다는 뜻이고, 점 D가 구해지면 이 점에서 OA에 수선을 그어 AB와 만나는 점 C를 정할 수 있다. 따라서 각 3등분선 OC가 구해진다는 뜻이다. 그래서 결국 x의 값이 작도 가능한 수인지 아닌지 하는 문제로 귀결된다.

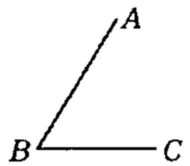
그러면 ②에 있는 3차방정식이 〈예제1〉과 같이 유리근을 갖는다고 하면 $x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ 중에서 어느 하나를 만족하여야 할 것이다. 그러나 어느 것을 대입하여도 만족하지 않으므로 이 방정식은 유리근을 갖지 않는다. 그렇다면 이 방정식은 무리근을 갖되 〈예제2〉과 같이 세제곱이든가 아니면 초월수의 근일 것이다. 이러한 사실은 [보조정리 2]에 의하여 그 값을 단위길이로부터 작도할 수 없다는 뜻인 것이다. 즉 $x = \cos 20^\circ = OD$를 구할 수 없으니 점 D도 구할 수 없고, 점 D를 구할 수 없으니 점 C도 구할 수 없다.

따라서 $\angle AOB = 60^\circ$는 Euclid도구로서는 3등분할 수 없다. 다시 말하면 90°, $45^\circ\left(= \frac{1}{2} \cdot 90^\circ\right)$, $135^\circ(= 90^\circ + 45^\circ)$, $180^\circ(= 2 \cdot 90^\circ)$ 등을 제외한 일반적인 모든 각은 Euclid도구로서는 3등분되지 않는다.(Q.E.D.)

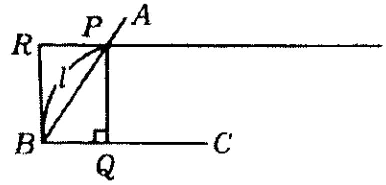
V. Euclid도구와 그 외 도구로서의 각 3등분

앞에서 Euclid도구로써는 각 3등분이 불가능하다는 것이 증명되었다. 여기서는 Euclid도구와 그 외 도구를 더 첨가하면 각 3등분이 가능하다는 것을 두 가지 방법으로 보여주겠다.

〈방법 1〉 Verging method

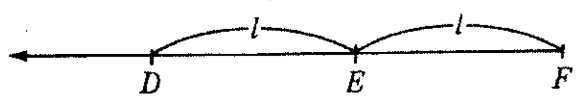


〈그림 4〉



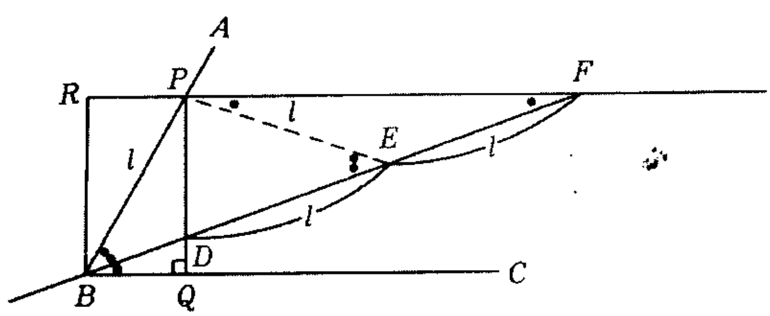
〈그림 5〉

〈그림 4〉과 같이 임의의 각 ABC가 주어졌다고 하자. 그러면 반직선 BA 위에 임의의 한 점 P를 잡아 이 점에서 반직선 BC에 수선의 발 Q를 내리고 〈그림 5〉과 같이 직사각형 $PQBR$를 만든다. 이 직사각형의 대각선 BP의 길이를 l이라 하고,



〈그림 6〉

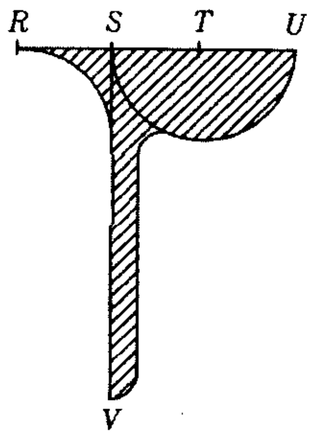
〈그림 6〉와 같이 한 직선 위에 $DE=EF=l$ 되게 세 점 D, E, F를 잡는다. 이 직선을 〈그림 7〉과 같이 점 D는 PQ 위에, 점 F는 RP의 연장 위에 오도록 하고, 그 연장이 점 B를 통과하도록 놓으면 $\angle DBC=\frac{1}{3}\angle ABC$이다.



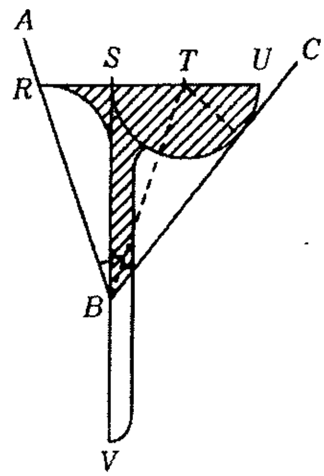
〈그림 7〉

〈방법 2〉 Tomahawk를 이용.

〈그림 8〉와 같이 $RS=ST=TU$되게 하고 $ST\perp RU$, 또 선분 SU가 반원의 직경이 되게 하는 도구 Tomahawk(인디언들이 쓰는 손도끼)를 만든다. 이 도구를 〈그림 4〉에 있는 $\angle ABC$위에 놓으면 〈그림 9〉와 같이 된다.



〈그림 8〉



〈그림 9〉

이때 반직선 BA는 점 R를 지나게, 또 반직선 BC는 반원에 접하게, 그리고 꼭지점 B는 SV 위에 있도록 한다.

그러면 $\angle ABS=\angle SBT=\angle TBC$이다.

[주의] 〈그림 6〉와 〈그림 8〉에 있는 도구는 Euclid도구라 할 수 없다.

〈참 고 문 헌〉

〔1〕 기우항・박진석, "사영기하학", 학문사, 1982.
〔2〕 남형채・성재현・신택균・하영순・현종익, "대학수학", 형설출판사, 1987.
〔3〕 백용배, "현대기하학", 교학연구사, 1982.
〔4〕 서성보, "수학의 발달과정", 부산교육대학교, 1991.
〔5〕 엄상섭, "일반가하학", 교학사, 1981.
〔6〕 이기한, "현대수학의 기초개념", 학문사, 1978.
〔7〕 현종익, "초등수학교육기초론", 경문사, 2004.
〔8〕 Adler, C. F., "Modern Geometry", Mcgraw-Hill, Inc., 1968.
〔9〕 Ayres, F., "Modern Algebra", Mcgraw-Hill, Inc., 1965
〔10〕 Boyer, C.B., "A History of Mathematics", John-Wiley & Sons Inc., 1968.
〔11〕 Herstein, I. N., "Topics in Algebra", 2nd ed. Xerox, New York, 1975.
〔12〕 Jones, B. M., "An Introduction to Modern Algebra", Macmillan, New York, 1975.