# 確率 概念의 理解와 指導를 爲하여

金 益 贊

Dept of Mathmatics Education, Cheju Nat'l Univ.

# For Understanding and Teaching of The Concepts of Probability

Kim · Ik-chan

## Abstract

Let $(\Omega, \mathfrak{F})$ be a sample space. A set function P defined on $\mathfrak{F}$ is called a probability if it satisfies the following conditions;

i) $P(A) \geq 0$ for all $A \in \mathfrak{F}$.

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Let $A_j \in \mathfrak{F}$, $j = 1, 2 \cdots$ and $A_j \cap A_k = \phi$ for $j \neq k$. Then $P(\bigcup_{j=1} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p(A_j)$

## I. 序 論

確率의 重要性이 날로 증대되고 있다. 教課과정은 中學과정에서 부터 이의 學習을 體系化하면서 高校과정에서는 더욱 深化된 과정을 다루도록 하고 있다. 그러나 實生活과 밀착된 抽象化 概念과의 혼동과 착오로 인하여 學生은 물론, 실제 教育에 임하는 教師들도 指導上의 誤謬를 범하게 될 素地가 높다고 하겠다. 더구나 教材上에 나타난 문제점으로서, 概念에 입각하여, 事件에 確率을 對應함으로서 測度의 意味를 實感케 하기 보다는, 順列, 組合에 의한 경우의 수의 技巧的 方法에 의해서 確率 計算 과정에 치중케 함으로서 本來의 確率 教育의 意義와 그 活用의 能力 培養을 半減시키고 있다고 본다.

本文은 指導의 核心인 確率 概念에 關한 內容과 함께 概念 確立의 과정과 그 當爲性을 提示하고 나아가서 中等教育에서의 留意點 및 確率 公理의 秀越性에 關하여 論하여 보려고 한다.

濟州大學校 數學教育科

# Ⅱ. 確率 概念의 理解

## 1. 確率의 公理化와 數學的 모델

科學的 理論은 概念을 다루는 것이며 現實的 行爲를 다루는 것은 아니다. 科學的理論의 모든 結果는 演繹的인 論理에 의해서 假說에서 부터 誘導된다. 그 理論은 現實世界의 어떤 有用한 意味에 對應되어, 그 現象에 대한 歸納的 推論의 形態로 나타나는 概念的 世界 ( model ) 이다. 偶然現象을 規明코자 하는 確率도, 나타나는 現實을 概念化하여 公理論的 方法에 의해서 설정되어져야 한다.

다음의 두가지 定義를 관찰하자

(i) Mises 의 相對度數 定義

規定된 實驗이 n 번 반복된다. 만일 事件 A가 $n_A$ 번 발생하면 事件 A의 確率 P(A)는 A의 발생의 相對度數 $\frac{n_A}{n}$ 의 極限으로 定義된다.

즉 $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$ ……………………………………………… ①

(ii) 確率의 古典的 定義

規定되어진 한 實驗에서의 나타날 期待 정도가 同等한 ( equally likely ) 結果의 數가 N이라고 하자. 만일 事件 A의 結果 (또는 사건 A에 有利한 結果들) 의 數가 $N_A$ 이면 A가 일어날 確率 ;

$P(A) = N_A / N$ ………………………………………………… ②

定義 ①에 나타난 $\frac{n_A}{n}$ 에 대해서, 어떤 實驗的 事件에 確率을 對應시키기 위해서는 歸納的 推論의 어떤 形態에 의할수 밖에 없다. 確率을 相對度數에 관한 진술로 사용한 當時에, 그러한 推論의 형태로서 相對度數의 極限을 確率로 定義한 것은 매우 자연스럽다.

그러나 $\frac{n_A}{n}$ 는 순수한 事後的인 概念, 즉 실제로 實驗의 시행이 이루어지고 나서야 인식되는 바로 現實의 世界를 말하는 것이다. 그러한 物理的 實驗에서는 數 n이 아무리 크다 하여도 有限일 수 밖에 없다. $\frac{n_A}{n}$ 는 아무리 近似的이라 하더라도 그 極限과 같을 수는 없다.

이제 定義 ②를 관찰해 보자. N과 $N_A$ 는 ①과는 달리 그러한 實驗없이 결정되는 數다. 그러나 그 N은 나타날 期待 정도가 同等해야 한다는 단서가 규정되고 있다. 하나의 주사위를 던지는 경우,

나타날 기대 정도가 同等한 數를 확인하기 위해서 그 주사위가 '公平'하다고 가정한다. '公平'하다든가, '완전한 대칭'이라고 表現된 現實世界의 對應物로서 直觀的 思考에 의해 사용된 'equally likely'의 槪念은 일어날 可能性이 같다고 하는 'equally probable'을 意味하고 이는 곧 定義에 의해서 우리가 진술코자 한 槪念, 그 自體인 것이다. 確率에 關한 위의 두가지 定義에서의 根本的 難題는 確率에의 접근을 어떻게 해서든지 數學的으로 立證하려고 시도하고 있다는 점이다. 公平한 동전을 던져 앞면이 나올 比率이 $\frac{1}{2}$에 가까와 질 것이라는 結論은 우리의 直觀과 物理的 實驗에 의한 사실일뿐, 수학적으로 立證할 수 있는 성질의 것이 아니다. 오로지 결론이 실험과 一致되고 있을뿐 어떤 數學的 理論의 영향에 의한 것은 아니다. 우리는 特定된 現實上의 어떤 현상을 證明하기 위하여, 실제로 數學을 사용할 수는 없다. 예를 들어 "힘"이라고 부르는 物理的 量이 存在한다는 것을 數學的으로 證明할 수는 없다. 우리가 할수 있는 것이란 어떤 微分方程式을 만족시키는, "힘"이라 불리는 數學的 量을 假定하는 것 뿐이다. 즉 어떤 物理的 현상에 대한 合理的인 說明을 마련하는 모델을 構成하여 하나의 體系를 만드는 것이다. 물론 이러한 假說 體系는 새로운 數學的 理論이 구성되어, 보다 나은 설명이 마련되어지기 전 까지만 合理的이다. 確率도 直觀이나 또는 物理的 實驗의 경우와 관련되어지고, 더구나 數學과 연관되어진 만큼, 數學的 規則에 따르는 假說 體系를 구성함은 당연하다.

예를 들어, 어떤 지역내에서 出生하는 新生兒의 性을 豫見하기 위해서 사용할수 있는 方程式을 찾기란 대단히 어렵다. 그러나 確率 모델은 어떤 個人의 出生에 대해서는 有用하지 않지만, 전체 新生兒群에 대해서는 대단히 有用하게 구성할 수 있다.

確率의 數學的 모델을 구성하고 發展시킴에 있어서 추구하여야 하는 것은, 그 槪念과 關係가 '實世界'에서의 적절한 槪念과 關係에 一致하는 數學的 體系라야 한다는 것이다.

定義 ①에 의해서 실제로 정해진 相對度數의 經驗的 事實은 確率의 數學的 모델을 선택하기 위한 經驗的 기초로서 그 機能을 다하고는 있으나, 이 經驗的 事實이 確率 數의 存在를 論理的으로 含意하는 것은 아니다. 우리는 한 사건의 確率이라 불리워지는 理想的 숫자의 存在를 假定함에 의하여 모델을 세운다.

만일 이것이 合理的인 모델이고, 數가 적절히 선택되었다면, 많은 시행에서 事件발생의 相對度數는 이 숫자와 매우 밀접하게 놓여지기를 기대할 수 있다. 물론 그와같은 理想的 相對度數가 실제세계에서 存在한다는 것을 立證할 수는 없다. 우리는 하나의 모델을 세울 뿐이다. 그리고나서 모델의 形態를 檢證하고, 그 모델이 모델化 되어진 實世界

상황에 適合한지를 經驗的으로 조사해 본다. 우리는 設定된 모델에 대해 信賴할 수는 있으나, 그 모델을 證明하거나 批判할 수는 없다. 모델은 眞이나 僞가 아니라 그 有用性이 問題될 뿐이다.

現在까지 알려진 가장 成功的인 모델은 Kolmogorov에 의해 記述된 補助的 體系이다. 그는 確率 發展의 흐름을 한데 묶어, 現代數學의 槪念에 맞추어 數學的 可能性(確率)을 抽象的 測度 理論의 特殊한 경우로 表現했다.

따라서 이 모델은 補助的 機能으로서 集合論의 表現方式과 測度論의 知識을 要請하고 있다.

## 2. 基礎 槪念과 確率의 定義

역사적으로 確率論이 형성되는 경우의 아이디어는 Chance의 game에 의해 발전되었고, 그러한 game에서는 어떤 종류의 實驗의 槪念이 기본적이다.

특히 確率이 적용 되어지는 모든 경우에는, 잘 定義된 實驗과 그 실험의 可能한 結果가 열거될 수 있어야 한다는 것을 要請하게 된다. 確率 實驗의 槪念的 定義는 다음과 같이 서술될 수 있다.

1) 實 驗 (Experiment)

ⓘ 實驗의 모든 結果가 시행 前에 미리 알려지고

ⓘⓘ 實驗의 한 시행의 結果는 事前에 미리 알 수 없으며,

ⓘⓘⓘ 그 實驗은 同一한 條件下에서 반복이 可能한 경우

이 세가지 조건을 동시에 만족하는 경우를 우리는 確率이 적용되는 意味에서의 實驗이라고 할 것이다. 어떤 實驗이 反復되는 同一한 條件이란, 實驗의 진행에 따라 변경되는 要因들이 반복되는 이 實驗의 可能한 여러 結果의 可能性에 대하여 영향을 주지 않을 때라고 해석할 수 있다. 이제 實際的 實驗과 施行에서의 '結果(outcome)와 '事件' (event)을 抽象 槪念化 하여 보자. 實驗에 의해 나타나는 모든 결과의 모임을 $\Omega$라고 하자. '施行(trial)'은 잘 定義된 實驗의 1回의 허용을 뜻한다. 이 시행으로 우리는 단 하나의 결과(outcome) $e_i$를 관찰한다

즉 結果란 數學的으로 $\Omega$의 한 元 $e_i$를 의미한다. 이제 事件과 事件 發生의 意味를 생각하자. 하나의 동전을 두번 던지는 實驗에서 '표면의 수가 1보다 작거나 같다.'라는 진술은 그 실험의 시행에 의해 그러한 상태가 나타나는가 또는 그렇지 않는가일 것이다. 따라서 그 실험이 실행된 후 '표면의 수가 1 이하인가?'의 질문은 yes 또는 no

로 대답될 수 있다. yes에 대응하는 결과의 모임을 A라고 할때 $A = \{HH, HT, TH\}$가 될 것이고, 만일 한시행의 결과가 HH이었다면 사건 A가 발생하였다고 말한다.

즉 주어진 實驗에서의 事件이란, 바라는 元들로 이루어진 部分集合으로 對應되며, '사건 A가 실험의 한 시행에서 발생할 것이다.' 라는 것은, 그 시행의 결과가 A의 점들중 한 點에 對應한다 (A의 한 元素가 선택된다.) 로 抽象化 하게 된다.

실험의 모든 可能한 結果의 모임을 集合 $\Omega$, 즉 標本空間으로 對應하자. 事件은 標本空間의 部分集合으로 對應된다.(그러나 $\Omega$의 모든 部分集合이 事件이 될수는 없다.)

분명히 $\Omega$는 모든 결과 $e_i$를 포함하므로 어떠한 시행에서도 반드시 발생한다. 따라서 空間 $\Omega$는 全事件이다.

### 2) 標本空間 (Sample space)

標本空間은 實驗의 가능한 모든 結果로 이루어진 集合으로서 空이 아닌 元으로 이루어진 抽象空間에 대응된다. 標本空間 $\Omega$에 대한 有一한 物理的 要請은, 實驗의 한 시행의 결과와, $\Omega$의 점들중 꼭 한 점이 반드시 對應하여야 한다는 것이다. 확률과 관련된 모든 경우에 실험과, 가능한 결과가 주어지듯이 우리는 空이 아닌 元을 갖는 集合 $\Omega$의 存在性을 假定하여 理論을 전개하고 있음을 알고 있다. 標本空間의 설정에 있어서 강조하여야 할 점은 그 物理的 實驗의 모든 可能한 結果들이 조심스럽고, 분명하게 서술되어야 한다는 것이다.

確率論에서의 대부분의 오류와 逆說은 標本空間을 설정하면서 빚어진 분명치 못한 정의 때문이다. 實驗의 가능한 모든 결과는 오직 한가지 방법으로 결정되도록 하여야 한다. 동일한 실험에 의해 주어지는 標本空間이 서로 다른 意味를 가질 때 예를 들어, 주사위를 던져 $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로, 또는 $\Omega_2 = \{$짝수, 홀수$\}$로 할때 우리는 완전히 別個의 確率을 다루게 된다.

標本空間은 우리의 自由에 의해 선택되어지는 것이 아니라 定義에 의해 決定된다.

標本空間 $\Omega$가 有限個의 元 만을 포함할 때 그것을 有限標本空間이라 한다. 만일 $\Omega$가 可算個의 元을 포함하거나 有限일 때는 離散型 標本空間이다. $\Omega$가 非可算일 때, 특히 $\Omega = R$ (實數)일 때는 連續型 標本空間이라고 한다.

### 3) 事件과 $\sigma$-代數

確率의 중심 槪念은 事件이다. 確率은 實驗의 어떤 결과에 관련지어지는 것이 아니라 事件에 관련된다. 단순한 의미로 事件을 標本空間의 部分集合으로 규정하였으나 $\Omega$의

모든 部分集合이 반드시 事件으로 간주할 수 없는 경우가 나타난다. 우리는 Ω의 한점 w에 對應하는 結果에 대한 정보의 어떤 것을 測定하는데는 失敗하거나 또는 포기하게 되는 경우가 있다. 즉 Ω의 주어진 부분집합 A에 대해서 'w가 A의 한 元素인가?'라는 질문에 대답이 可能하지 않는 경우가 있기 때문이다.

예를 들어 하나의 동전을 5회 던지는 실험에서, 우리는 최초의 3회 던진 결과만을 기록하고 있을지 모른다. 만일 이 경우 A={적어도 4개의 표면이 나온다.}라고 할때 A는 測度不可能일 것이다. 왜냐하면 A의 元 w는 w에 대해 주어진 정보로 부터는 결정되어질 수 없는 것이기 때문이다.

또 Ω=R로 주어지는 경우로, 우리는 R의 모든 점의 部分集合을 그 방대성에 비추어 事件으로서 다룰수는 없다. 따라서 確率의 對應을 위하여 事件은 엄밀하게 정의되어야 한다.

定義 1

Ω를 空集合이 아닌 임의의 集合이라 하고, Ω를 포함하는 Ω의 部分集合의 集合族 $\mathcal{J}$가 다음 두 條件 ① $A \in \mathcal{J}$이고 $B \in \mathcal{J}$이면 $A \cup B \in \mathcal{J}$ ② $A \in \mathcal{J}$이면 $A^c \in \mathcal{J}$를 만족하면 $\mathcal{J}$를 Ω의 部分集合의 集合代數라고 한다. De Morgan의 定理에 의하여 $\mathcal{J}$가 集合代數일 때 ③ $A \in \mathcal{J}$ 이고 $B \in \mathcal{J}$ 이면 $A \cap B \in \mathcal{J}$ 가 성립한다.

즉 集合代數는 ∪과 ∩ 및 餘集合의 演算下에서 닫혀 있다. 따라서 Ω 자신 및 $\phi$을 포함하는 集合族이다.

定理 1

$\mathcal{U}$가 Ω의 部分集合의 한 集合族이면 $\mathcal{U}$를 포함하는 最小의 集合代數 $\mathcal{J}_0$ 가 存在한다. 즉 $\mathcal{U}$를 포함하는 集合代數가 存在하고 $\mathcal{J}$ 가 $\mathcal{U}$를 포함하는 임의의 集合代數이면 $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$이다.

定義 2

集合族 $\mathcal{U}$를 포함하는 最小의 集合代數 $\mathcal{J}_0$를 $\mathcal{U}$에 의해 生成된 集合代數 라고 한다.

한가지 例를 들어보자. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ —— ①

그리고 Ω의 部分集合으로 된 集合族:

$\mathcal{U} = \{\phi, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1\}\}$ —— ②

이라 하자 분명히 $\mathcal{U}$는 集合代數는 아니다. 왜냐하면

$\{1\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 6\} \notin \mathcal{U}$

그러나 $\mathcal{U}$에 Ω의 적당한 部分集合을 加함으로서 $\mathcal{U}$를 포함한 새로운 集合代數를 만들어 낼 수 있다. 그것을 $\mathcal{U}_0$라 하자. 한편

$\mathcal{U}a = \{\phi,\ \Omega,\ \{1, 3, 5\},\ \{2, 4, 6\},\ \{1\},\ \{2\}\}$ —— ③

으로 두면 $\mathcal{U}a$은 集合代數는 아니지만, 마찬가지로 $\mathcal{U}a$를 포함하는 集合代數 $\mathcal{U}_1$이 存在한다. 이제 이러한 모든 集合代數의 交集合 $\bigcap_{i=0} \mathcal{U}_i$는 바로 $\mathcal{U}$를 포함하는 最小의 集合代數이다. 集合代數의 主된 특징은, 주어지는 全集合 Ω에서 우리가 願하는 元素, 그것을 포함시키는 集合代數를 우리 意圖대로 만들어 낼 수 있다는 점이다.

보기 1

$A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ 그리고 $A \cap B = \phi$이라고 하자. $\{A, B\}$에 의해 生成된 集合代數;

$\mathfrak{F} = \{\phi,\ \Omega,\ A,\ A^c,\ B,\ B^c,\ A \cup B,\ A \cup B^c,\ A^c \cup B,\ A^c \cup B^c,\ A \cap B,\ A \cap B^c,\ A^c \cap B,\ A^c \cap B^c,\ (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c),\ (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}$ 이다.

이제 定義 1의 條件 ①을 $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ 이면 $\bigcup_{i=1} A_i \in \mathfrak{F}$로 확장하자. 이때 $\mathfrak{F}$를, Ω의 部分集合의 σ−代數라 한다. 즉 σ−代數란 Ω의 部分集合으로 이루어진 集合族으로서 可集個의 合集合과 交集合 및 餘集合의 演算下에서 닫혀있는 경우이다.

특히 實數 R上의 모든 半閉區間 $(a, b]$의 集合族에 의해 生成된 σ−代數를 Borel 體 $\mathfrak{B}$, 그리고 $\mathfrak{B}$의 元素인 集合을 Borel 集合이라 부른다. 즉 수직선상의 Borel 집합은 실수상의 區間에 의해 生成된 σ−體로 나타난다.

여기서 Borel 體를 거론하는 이유는 實數 R을 標本空間 Ω를 정했을 때 Ω의 한 점으로만 된 모든 點集合과 모든 區間들(開區間, 閉區間, 半開閉區間等 모두를 포함하는)을 집합족내에 포함하고 싶어서이다.

분명히

$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x - \frac{1}{n},\ x]$, $(x, y) = \bigcup_{n} (x,\ y - \frac{1}{n}] = (x, y] - \{y\}$, $[x, y) = \bigcap_{n} (x - \frac{1}{n},\ y] = \{x\} + (x, y] - \{y\}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$

등으로 표시할 수 있으므로 $(x, y]$에 의해 實數 R上에서 生成된 Borel 體는 이러한 모든 可算個의 點과 모든 형태의 區間들을 포함한다.

보기 2

하나의 동전을 표면이 나올 때 까지 던지는 實驗을 생각하자. 따라서

$\Omega = \{H,\ (T, H),\ (T, T, H),\ (T, T, T, H),\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

이고 Ω를 H가 나타난 시행의 횟수로 對應시키면 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\}$

인 可算個의 離散型 標本空間이 된다. $\mathfrak{F}$를 Ω의 모든 部分集合들의 集合族으로 둔다면 $\mathfrak{F}$는 σ−體를 구성한다.

보기 3

바늘이 한 원의 中心에서 자유롭게 회전한다고 가정하자. 바늘이 원주上에서 멈추는 점은 한 결과가 된다. 따라서 標本空間 $\Omega = \{ x \mid 0 \leq x < 2\pi r$ ; r은 원의 반경$\}$, 이 때의 $\sigma$-代數는 $[0, 2\pi r)$의 部分集合들의 Borel 體로 취하면 된다.

定義 3

標本空間 $\Omega$의 部分集合들로 이루어진 $\sigma$-代數 $\mathfrak{F}$의 임의의 元(集合으로 나타난다)을 事件이라고 한다. 이제 사건의 意味가 뚜렷해 졌다.

標本空間 $\Omega$의 $\sigma$-代數를 $\mathfrak{F}$라 하고 A와 B를 $\mathfrak{F}$의 元이라고 하자. 보기 2에 의해 나타난 $\sigma$-代數 $\mathfrak{F}$의 임의의 元素들만이 모두 事件으로 규정된다.

$\Omega$가 離散型일때 $\sigma$-代數는, $\Omega$의 모든 部分集合으로 구성한다. 그러나 $\Omega$가 實數일때는 모든 點들만으로 $\sigma$-代數를 구성할 수는 없다. 왜냐하면 그들 點들만으로는 $\sigma$-代數의 可算 可法性을 만족시킬 수 없기 때문이다. 즉 Borel-體로서 $\sigma$-代數를 구성한다. 따라서 사건의 集合族 $\{A_i\}$와 사건의 극한등 관련되어 지는 集合들도 또한 事件이라는 것을 확신할 수 있다.

4) 確率의 假說的 定義

이제 우리는 確率을 定義할 마지막 단계에 와 있다. 空이 아닌 集合族위에서 定義되는 實價函數를 實價의 集合函數라 함을 우리는 알고 있다.

$\Omega$를 標本空間, $\mathfrak{F}$를 $\Omega$의 部分集合들로 이루어진 $\sigma$-代數라고 하자. 이제 $\mathfrak{F}$上에서 定義된 實價의 集合函數 P가 다음의 條件(假說)을 만족할 때 ;

① 모든 $A \in \mathfrak{F}$에 대해서 $P(A) \geq 0$

② $P(\Omega) = 1$

③ 만일 $A_i \in \mathfrak{F}$ 이고 $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots)$ 모든 $A_i$ 들이 서로 素일때 ($i \neq j$ 일 때 $A_i \cap A_j = \phi$), $P(\bigcup_{i=1} A_i) = \sum_{i=1} P(A_i)$

이 때 $P(A)$를 事件 A의 確率, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$를 確率空間이라 한다.

가설 ①과 ③은 $\sigma$-體 上에서 定義되는 測度論의 가장 重要한 性質이고 가설 ②는 그러한 測度중에서 確率을 특징짓는 條件이라 할 수 있다.

특히 가설 ③은 가장 강력한 要請으로서, 이에 의해 우리가 바라는 사건에 對한 確率배정이 가능하고 可算加法化에 따른 數學的 특성을 만족시킨다.

결국 確率이란 $\sigma$-體위에서 정의된 함수이다. 이 定義는 우리들에게 주어진 事件 A

에 배정할 確率 $P(A)$의 값이 무엇인가를 말하고 있지 않다. 결국 事件에 대한 確率값을 얻기 위해서는 그 어떤 方法으로 우리의 實驗을 有用性 있게 모델화하여야 한다. 만일 標本空間의 各 元素에 同一한 값을 준다면 equally likely의 개념을, 무게化된 양을 준다면, 나타나는 기대정도가 같지 않은 확률의 문제를 해결한다. 4지선다형의 맞을 확률 $1/4$은 4개중 1개를 맞춘다는 기대를 나타내는 것이 아니라 맞출 가능성의 크기가 1이라는 量(또는 수)에서 $1/4$의 量(또는 크기)로 표시될 수 있음을 나타낸다.

앞에 든 두가지 보기에 대하여 確率 空間을 構成하면

보기 2′

$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$, $\mathfrak{J} = 2^{\Omega} = \{A \mid A \subset \Omega\}$

그리고 모든 $i \varepsilon \Omega$에 대해서

$P(\{i\}) = (\frac{1}{2})^{i}$ ; 단 $i = 1, 2, \cdots\cdots$, 로 두면 確率空間이 成立된다.

왜냐하면 $\forall i$, $P(\{i\}) = (\frac{1}{2})^{i} \geqq 0$, $P(\Omega) = P(\sum_{k=1}^{\infty} k) = \sum_{i} (\frac{1}{2})^{i} = \frac{1}{2}/1-\frac{1}{2} = 1$

또 $\forall A, B \varepsilon \mathfrak{J}$에 대해서, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$이기 때문이다.

보기 3′

$\Omega = \{x \mid 0 \leqq x < 2\pi r$ : r은 원의 반경$\}$, $\mathfrak{J} = [0, 2\pi r)$의 부분집합으로 이루어진 Borel-體, 그리고 $P[0, 2\pi a) = \frac{a}{2\pi r}$ (단 a는 호의 길이)로 두면 $\{\Omega, \mathfrak{J}, P\}$는 한 확률 공간이다.

# Ⅲ. 要 約 과 結 論

1. 標本空間은 數學的 모델에 의해 설정된 空이 아닌 抽象集合이다. 그 元素는 確率實驗의 定義에 의해서 槪念化되어 결정되어야 한다.

2. 確率이란 標本空間의 部分集合들의 $\sigma$-代數 위에서 정의된 測度이다.

3. 中等과정에서의 지도는

1) 우연현상을 槪念化하여 數學的 모델을 구성하고 公理論的 方法에 의해 이룩된 數學的 體系의 秀越性이 강조되어야 하며

2) 標本空間을 定義할 수 있도록 하기 위해서 確率實驗이 分明하게 서술되도록 유의하며

3) 경우의 수, 순열의 수등의 계산 방식에 주력하여 확률 계산만을 강조하는 方式

을 지양한다.

4) 標本空間의 모든 元素에 weight를 주고, $\sigma$－代數의 元으로서의 사건 A에 배정된 weight를 計算함에 의해, 사건 A의 確率을 찾도록 한다. 아울러 A의 確率을 測度로서 상기시키도록 한다.

5) 離散型 標本空間의 $\sigma$－代數까지 다루고 Borel－體는 생략한다. 연속형 標本空間의 경우 그 測度를 Riemann 積分 정도로 한정하면 적당할 것이다. 確率公理의 加算加法性은 임의의 두 배반 사건 A, B에 대해 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 정도로 축소함이 타당할 것이다.

## 參 考 文 獻


Halmos, P.R. 1974. Measure Theary. Springer－Verlag, New York. Inc.

Jo, T·K, 1981. 實解析學, 塔出版社

Kim, Y·S, 1982. 數學 I. 삼화출판사

Papoulis, A. 1981. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill International Book Co.

Pfiffer, V·K. 1978. Concepts of Probability Theory. Dover Publication Inc, New York

Pinter, C.C. 1971. Set Theory. Addison－Wesley Pub. Co.

Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons.