科學敎育, 12, 91~107, 1995
Journal of Science Education
12, 91~107, 1995

극한개념을 사용하지 않은 대수함수의 도함수

高鳳秀* · 玄泰榮**

Derivatives of Algebraic Functions without Using the Concept of Limit

Ko, Bong-Soo · Hyeon, Tae-yeong

Abstract

The definition of the derivative for real valued algebraic functions defined on an interval is introduced without using the concept of limit. With the definition, the derivatives and the linearity of derivative for a class of algebraic functions of special form are obtained by geometric property of multiple roots of algebraic equations, by the geometric concept of functions of the first degree and by the factorization, etc.

I. 서 론

고등학교 수학교육에 있어서 중심이 되는 미분법은 극한개념을 도입하여 그 이론을 전개하고 있기 때문에 학생들이 미분법을 이해하기 위해서는 먼저 극한개념에 대한 학습이 선행되어야 한다. 그러나 고등학교 교육과정에서 극한개념을 학습하기 전에 미분법을 필요로 하는 경우가 많으므로 극한개념을 사용하지 않는 미분법 연구는 연구대상으로 충분한 가치가 있다.

본 논문의 연구목적은 극한개념을 사용하지 않는 다항식및 유리함수들의 도함수 정의와 성질들의 개념을 포함하고 일반화하는 연구로서 특수한 대수함수들까지 확장하는데 있다. 대수함수들에 대한 도함수는 극한개념을 도입하지 않고 단순히 대수 방정식의 전개, 분모의 유리화, 조립제법을 이용한 인수분해 및 중근의 성질등 기하학적 직관으로 이해할 수 있는 지식들만 가지고 유도한다. 부가적인 목적으로써 위의 정의를

* 濟州大學校 師範大 數學敎育科

** 濟州道 南濟州郡 表善中學校

사용하여 미분법에 대한 개념들을 쉽게 이해시킬 수 있는 방법들과 대수함수들의 값의 변화상태및 최대 최소들을 추정할 수 있는 방법을 연구하는데 있다.

본 논문의 본론 제1부에서는 다항식 및 유리함수들의 도함수들을 극한개념없이 연구된 선행연구 들의 결과들을 요약한다. 본 논문의 본론 제2부에서는 대수함수의 정의및 도함수, 간단한 대수함수의 도함수의 기하학적 의미, 여러 대수함수들에 대한 미분공식을 유도하며 그 결과들은 극한을 사용하여 얻을 수 있는 미분공식들의 결과들과 같음을 증명한다.

Ⅱ. 본 론

제1부 다항식및 유리함수의 도함수

1. 다항식의 도함수

1절에서 언급되는 다항식에 대한 도함수의 정의및 정리들은 논문 "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의및 성질들의 연구"(참고문헌 2)에서 유도 및 증명되었다.

정의 **1-1.** $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 방정식 $f(x)=0$가 $x=x_0$에서 중근을 갖는다는 의미는

$$f(x)=(x-x_0)^nQ(x)\ (n \geq 2\text{인 자연수})$$

의 형태로 바꿀 수 있다는 것이다. 여기서 $Q(x)$는 다항식이다.

정의 **1-2.** $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 방정식

$$f(x)-ax-b=0$$

가 $x=x_0$에서 중근을 갖도록 하는 상수 a,b가 존재하면, "함수 $y=f(x)$는 $x=x_0$에서 미분가능하다"고 하며 "a를 $y=f(x)$의 $x=x_0$에서 변화율"이라고 하고 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$a=f'(x_0),\ a=y'_{x=x_0},\ a=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$$

정의 **1-3.** 상수함수 $y=f(x)=c$와 일차함수 $y=g(x)=ax+b$들에 관한 도함수는 $f'(x_0)=0,\ g'(x_0)=a$로 정의한다.

정의 **1-4.** $x = x_1$에서의 $f(x)$의 변화율 $f'(x_1)$의 값은, x_1의 값에 종속된다. 따라서 x_1을 변수로 보면 $f'(x_1)$은 x_1의 함수로 볼 수 있다. 즉, 집합 D를 함수 f의 정의구역이라 하고, 집합

$$D' = \{x \in D \mid y = f(x)\text{는 } x\text{에서 미분 가능하다}\}$$

을 형성하면, 임의의 원소 $x \in D'$에 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 대응 관계가 나타난다. 이때 이 함수 f'를 함수 f의 도함수라고 한다.

함수 $y = f(x)$의 도함수를

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

등으로 나타낸다.

정리 **1-1.** 다항식 $f(x), g(x)$가 $x = x_0$에서 미분가능하면

[1] $\{C \cdot f(x_0)\}' = Cf'(x_0)$ (여기서 C 는 상수).

[2] $\{f(x_0) \pm g(x_0)\}' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ (복호동순).

[3] $\{f(x_0)g(x_0)\}' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

2. 유리함수의 도함수

2절에서 언급되는 유리함수들에 대한 도함수의 정의및 정리들은 논문 "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수"(참고문헌 3)에서 유도 및 증명되었다.

정의 **1-5.** 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$가 x_0에서 미분가능하다는 의미는 상수 a와 b 그리고 유리함수 $r(x)$가 유일하게 존재하며 다음 조건을 만족하는 경우라고 정의한다.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x).$$

이때, a를 $x = x_0$에서 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$의 도함수라 하고

$$a = \left(\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\right)'$$

으로 표시한다.

정리 1-2. $x = x_0(\neq 0)$에서 함수 $\dfrac{1}{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)' = -\frac{1}{x_0^2}.$$

정리 1-3. $P(x)$를 다항식 그리고 $P(x_0) \neq 0$이라 하면 $x = x_0$에서 유리함수 $\dfrac{1}{P(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' = -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}$$

정리 1-4. 유리함수 $\dfrac{1}{P(x)}, \dfrac{1}{Q(x)}$에 대하여 $P(x_0) \neq 0, Q(x_0) \neq 0$라고 하면

[1] $\left(\dfrac{C}{P(x_0)}\right)' = C\left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)'$ (여기서 C는 상수).

[2] $\left(\dfrac{1}{P(x_0)} \pm \dfrac{1}{Q(x_0)}\right)' = \left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)' \pm \left(\dfrac{1}{Q(x_0)}\right)'$ (복호동순).

[3] $\left(\dfrac{x_0}{P(x_0)}\right)' = \left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \dfrac{1}{P(x_0)}$.

계. 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$가 $x = x_0(P(x_0) \neq 0)$에서 미분가능하면

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}x_0\right)' = \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}.$$

정리 1-5. 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$는 $x = x_0(p(x_0) \neq 0)$에서 미분가능하고

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' = \frac{Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

제 2 부 대수함수의 도함수

제2부에서는 대수함수에 대한 도함수의 개념을 극한개념을 사용하지 않고, 단지 대수방정식의 중근의 개념과 일차함수의 기하학적 개념을 사용하여 도함수를 정의하고 특수한 형태의 대수함수 족에 대한 도함수및 도함수의 선형성을 얻는다.

여기서 다루는 함수들의 독립변수와 종속변수는 실수들을 대표한다.

정의 2-1. $p(x,y)$가 x,y에 대한 n차의 다항식일 때 $p(x,y)=0$을 대수방정식이라 하며, 한 구간 상에서 $p(x,f(x))=0$ (또는 $p(g(y),y)=0$)를 만족하는 연속함수 $y=f(x)$ (또는 $x=g(y)$)를 대수함수라 한다.

정의 2-2. 대수함수 $f(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능 하다는 의미는 방정식

$$f(x)-ax-b=(x-x_0)^2r(x)$$

를 만족하는 상수 a 와 b 그리고 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수 $r(x)$가 유일하게 존재하는 것이다. 이때 a를 $x=x_0$에서 대수함수 $f(x)$의 도함수라 하고

$$a=f'(x_0),\quad a=y'_{x=x_0},\quad a=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$$

등으로 표시한다.

정리 2-1. $x=x_0(>0)$에서 대수함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$(\sqrt{x_0})'=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

증명. 함수 $\sqrt{x}$가 $x=x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

(1) $$\sqrt{x}-ax-b=(x-x_0)^2r(x)$$

를 만족하는 상수 a,b 그리고 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수 $r(x)$를 찾는다. $y=\sqrt{x}$라 놓으면 $x=y^2$ $(y>0)$이고, $y_0=\sqrt{x_0}$ $(x_0>0)$라 하자. y와 y_0를 (1)식에 대입하면

(2) $$y-(ay^2+b)=(y-\sqrt{x_0})^2(y+\sqrt{x_0})^2r(y^2).$$

(2)의 좌변을 정리하면

(3) $$-ay^2+y-b=(y-\sqrt{x_0})^2(y+\sqrt{x_0})^2r(y^2).$$

(3)의 양변을 $-a(\neq 0)$로 나누면

(4) $$y^2-\frac{1}{a}y+\frac{b}{a}=(y-\sqrt{x_0})^2(y+\sqrt{x_0})^2\left(-\frac{1}{a}\right)r(y^2).$$

함수 y^2은 $y_0 = \sqrt{x_0}$에서 미분가능하므로, 정리 1-3에 의하여

$$\frac{1}{a}, \quad -\frac{b}{a}, \quad (y+\sqrt{x_0})^2\left(-\frac{1}{a}\right)r(y^2)$$

은 유일하게 존재하고, 그 도함수는 $\frac{1}{a}$이다. 즉

$$a = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

a의 값을 (4)식에 대입하여 b의 값을 구하면

$$b = \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$

(4)식에 a, b의 값을 대입하면

$$\sqrt{x_0}(y+\sqrt{x_0})^2 r(y^2) = -\frac{1}{2}.$$

$y = \sqrt{x}$를 윗식에 대입하여 $r(x)$를 구하면

$$r(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})^2}.$$

간단한 검산 과정을 거치면, $a, b, r(x)$는 식(1)을 만족하고 유일하게 결정됨을 알 수 있다. 따라서, 함수 $f(x) = \sqrt{x}(x > 0)$는 $x = x_0$에서 미분가능하고,

$$(\sqrt{x_0})' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

정리 2-2. x_0를 포함하는 한 구간에서 $f(x) > 0$이고, $f(x)$를 유리함수라 하면, $x = x_0$에서 대수함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{f(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

증명. $y = f(x)$를 유리함수라 하고, $y_0 = f(x_0)$라 놓고, y_0에서의 함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수를 계산하다. 정리 2-1에 의하여

$$\sqrt{y} - ay - b = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{y_o}} - \frac{\sqrt{y_o}}{2} = -\frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)^2}{2\sqrt{f(x_o)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_o)}\right)^2}. \tag{1}$$

한편 정리 1-3에 의하여 유리함수 $f(x)$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

$$f(x) - f'(x_0)x - b_0 = (x - x_0)^2 Q_0(x). \tag{2}$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이며 b_0는 상수이다. 따라서 $f(x) = f'(x_0)x + b_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)$.

그리고$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b_0$.

그러므로

$$b_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0. \tag{3}$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하고, 그 결과식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\sqrt{f(x)} - \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x - \left(\frac{f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\right) = (x - x_0)^2 \left[\frac{-[f'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)]^2 + \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}\right]$$

정리 2-3. 임의의 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $x = x_0(> 0)$에서의 대수함수 $x^{\frac{1}{n}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\, x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

증명. $\sqrt[n]{x}$가 $x = x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

$$\sqrt[n]{x} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x).$$

를 만족하는 상수 a, b 그리고 대수함수 $r(x)$를 구한다.
$y = \sqrt[n]{x}$라 놓으면 $x = y^n$이 되고, $y_0 = \sqrt[n]{x_0}$라 하여 윗식에 대입하면

$$y - ay^n - b = (y^n - y_0^n)^2 r(y^n).$$

양변을 $-a$로 나누고 정리하면

$$y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y^n - y_0^n)^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n). \tag{1}$$

(1)에서 $y^n - y_0^n$을 인수분해 한다.
i) $n = 2k+1$일때

$$\begin{aligned} & y^n - y_0^n \\ &= (y - y_0)(y^{2k} + y^{2k-1}y_0 + \cdots + y_0^{2k}). \end{aligned} \tag{2}$$

ii) $n = 2k$일 때

$$\begin{aligned} & y^n - y_0^n \\ &= (y - y_0)(y + y_0)(y^{k-1} + y^{k-2}y_0 + \cdots + y_0^{k-1}) \\ & (y^{k-1} - y^{k-2}y_0 + y^{k-3}y_0^2 - \cdots + yy_0^{k-2} - y_0^{k-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

$n = 2k+1$일 때, (2)식을 (1)식에 대입하면

$$y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y - y_0)^2(y^{2k} + y^{2k-1}y_0 + \cdots + y_0^{2k})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n). \tag{4}$$

$n = 2k$일 때, (3)식을 (1)식에 대입하면

$$\begin{aligned} y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} &= (y - y_0)^2(y + y_0)^2(y^{k-1} + y^{k-2}y_0 + \cdots + y_0^{k-1})^2 \\ & (y^{k-1} - y^{k-2}y_0 + y^{k-3}y_0^2 - \cdots + yy_0^{k-2} - y_0^{k-1})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n). \end{aligned} \tag{5}$$

(4)과 (5)에 의하여 함수 y^n은 $y = y_0$에서 미분가능하고 $\frac{1}{a}$, $-\frac{b}{a}$, $r(y^n)$이 유일하게 존재하며, 그 도함수는 $\frac{1}{a}$이다. 즉

$$a = \frac{1}{n}y_0^{1-n} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

(1)식에 $y = y_0$와 a의 값을 대입하여 b의 값을 구하면

$$y_0^n - ny_0^{n-1}y_0 + bny_0^{n-1} = 0.$$

그러므로

$$b = \frac{(n-1)y_0}{n} = \frac{(n-1)\sqrt[n]{x_0}}{n}.$$

(1)식에 a, b의 값을 대입하여 조립제법으로 $r(x)$를 구한다.

$$y^n - n\ y_0^{n-1}\ y + (n-1)y_0^n = (y^n - y_0^n)^2(-ny_0^{n-1})r(y^n).$$

i) $n = 2$일 때

$$y^2 - 2y_0y + y_0^2 = (y^2 - y_0^2)^2(-2y_0)r(y^2).$$

그러므로

$$r(y^2) = -\frac{1}{2y_0(y+y_0)^2}.$$

$y = \sqrt{x}$이므로

$$r(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)^2}$$

ii) $n = m$일 때

$$y^m - my_0^{m-1} + (m-1)y_0^m = (y^m - y_0^m)^2(-my_0^{m-1})r(y^m).$$

m이 일반적인 자연수인 경우도 조립제법을 사용하여 좌변과 우변을 인수 분해할 수 있으므로

$$\begin{aligned} r(y^m) &= -\frac{y^{m-2} + 2y_0y^{m-3} + \cdots + (m-1)y_0^{m-2}}{my_0^{m-1}\left(y^{m-1} + y_0y^{m-2} + \cdots + y_0^{m-2}y + y_0^{m-1}\right)^2} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{m-1} ky_0^{k-1}y^{m-1-k}}{my_0^{m-1}\left(\sum_{k=1}^{m} y_0^{k-1}y^{m-k}\right)^2}. \end{aligned}$$

$y = \sqrt[m]{x}$이므로

$$r(x) = -\frac{\sum_{k=1}^{m-1}\left(k\sqrt[m]{x_0^{k-1}}\sqrt[m]{x^{m-1-k}}\right)}{m\sqrt[m]{x_0^{m-1}}\left(\sum_{k=1}^{m}\sqrt[m]{x_0^{k-1}}\sqrt[m]{x^{m-k}}\right)^2}.$$

결론적으로 함수 $x^{\frac{1}{n}}$의 $x = x_0$에서의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

정리 **2-4.** x_0를 포함하는 한 구간에서 유리함수 $f(x)$가 정의되고, $f(x) > 0$이면, $x = x_0$에서 대수함수 $[f(x)]^{\frac{1}{n}}$ ($n \geq 3$ 자연수)의 도함수는 다음과 같다.

$$\left([f(x_0)]^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}}f'(x_0).$$

증명. $y = f(x)$를 유리함수라 하고, $y_0 = f(x_0)$라 놓고, y_0에서의 함수 $\sqrt[n]{f(x)}$ 의 도함수를 계산한다. 정리 2-3에 의하여

(1) $$\sqrt[n]{y} - ay - b = (y-y_0)^2Q(y).$$

한편 정리 1-3에 의하여 유리함수 $f(x)$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

(2) $$f(x) - f'(x_0)x - b_0 = (x-x_0)^2Q_0(x).$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이며 b_0는 상수이다. 따라서 $f(x) = f'(x_0)x + b_0 + (x-x_0)^2Q_0(x)$.

그리고

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b_0.$$

그러므로

(3) $$b_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

식(3)을 식(2)에 대입하고, 그 결과식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\sqrt[n]{f(x)} - \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}}f'(x_0)x - \left[(f(x_0))^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}(f(x_0))^{\frac{1-n}{n}}f'(x_0)x_0\right]$$
$$= (x-x_0)^2\left[\{f'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)\}^2Q(f(x)) + \frac{1}{n}\{f(x_0)\}^{\frac{1-n}{n}}Q_0(x)\right]$$

정리 **2-5.** $x = x_0(>0)$에서 $f(x) = x + \sqrt{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$(x_0 + \sqrt{x_0})' = \frac{2\sqrt{x_0}+1}{2\sqrt{x_0}}.$$

증명. $x + \sqrt{x}$가 $x = x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

$$x + \sqrt{x} - ax - b = (x - x_0)^2 q(x). \tag{1}$$

를 만족하는 상수 a, b 및 대수함수 $q(x)$를 구한다. 정리 2-1에 의하여 $\sqrt{x}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} + (x - x_0)^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})^2}\right). \tag{2}$$

(2)식을 (1)식에 대입하여 정리하면

$$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - a\right)x + \left(\frac{\sqrt{x_0}}{2} - b\right) + (x - x_0)^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})^2}\right)$$
$$= (x - x_0)^2 q(x).$$

정리 **2-6.** $x = x_0(>0)$에서 대수함수 $\sqrt{x+\sqrt{x}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x_0+\sqrt{x_0}}}\left(\frac{2\sqrt{x_0}+1}{2\sqrt{x_0}}\right).$$

증명. $y = f(x) = x + \sqrt{x}$, $y_0 = f(x_0) = x_0 + \sqrt{x_0}$라 놓고 y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

$$\begin{aligned}\sqrt{y} - ay - b \\ = -\frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}.\end{aligned} \tag{1}$$

정리 2-5에 의하여 대수함수 $f(x) = x + \sqrt{x}$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다고 가정하자.

$$(2) \qquad f(x) - f'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다.
그러면

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b.$$

따라서

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

식(2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&\sqrt{f(x)} - \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x - \left(\frac{f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\right) \\
&= (x - x_0)^2 \left[\frac{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x) - \{f'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}\right]
\end{aligned}$$

정리 2-5에 의하여

$$f'(x_0) = \frac{2\sqrt{x_0} + 1}{2\sqrt{x_0}}.$$

그러므로

$$\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x}_0}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + \sqrt{x}_0}} \left(\frac{2\sqrt{x}_0 + 1}{2\sqrt{x}_0}\right).$$

정리 2-7. $f(x), g(x)$가 유리함수이고, x_0를 포함하는 한 구간상에서 $g(x) > 0$일 때, $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $f(x) + \sqrt{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}\right)' = f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

증명. 제1부의 정리1-5에 의하여 유리함수들은 x_0를 포함하는 구간에서 정의되면 $x = x_0$에서 미분가능하고 제2부의 정리2-2에 의하여 대수함수 $\sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하다. 그러므로, 다음과 같은 등식을 얻는다.

$$f(x) = f'(x_0)x + b + (x - x_0)^2 q(x), \quad b = f(x_0) - f'(x_0)x_0. \tag{1}$$

$$\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + C + (x - x_0)^2 r(x), \quad C = \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}. \tag{2}$$

여기서 $q(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수, $r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다. (1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$\begin{aligned}
&\left(f(x) + \sqrt{g(x)}\right) - \left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)x \\
&- \left(f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}\right) \\
&= (x - x_0)^2 \left(q(x) + r(x)\right).
\end{aligned}$$

정리 2-8. $f(x)$, $g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이고 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이면 $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $\sqrt{f(x) + \sqrt{g(x)}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}}\left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

증명. $y = F(x) = f(x) + \sqrt{g(x)}$, $y_0 = F(x_0) = f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}$라 놓고 y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

$$\sqrt{y} - ay - b = -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2} \tag{1}$$

한편 정리 2-7에 의하여 대수함수 $F(x) = f(x) + \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

$$\begin{aligned}(2)\qquad & F(x) - F'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x),\\ & F(x_0) = F'(x_0)x + b,\\ & b = F(x_0) - F'(x_0)x_0.\end{aligned}$$

여기서 $Q_0(x)$는 대수함수이다. 식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\sqrt{F(x)} - \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x - \left(\frac{F(x_0) - F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}} + \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}\right)$$
$$= (x - x_0)^2 \left[\frac{-\{F'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)\}^2 + \{\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\}^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}\right]$$

정리 2-7 에 의하여

$$F'(x_0) = f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

그러므로

$$\left(\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}}\left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

정리 2-9. 대수함수 $f(x)$, $g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의되고, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이면 $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $\sqrt{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}}\left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)$$

증명. $f(x), g(x)$가 유리함수일때, 정리 2-2에 의하여 $\sqrt{f(x)}, \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로, 다음과 같은 등식을 얻는다.

$$\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x + b + (x - x_0)^2 q(x), \qquad b = \frac{2f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}}. \tag{1}$$

$$\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + c + (x - x_0)^2 r(x), \qquad c = \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}. \tag{2}$$

여기서 $q(x), r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다.
(1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right) - \left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)x \\
&- \left(\frac{2\sqrt{f(x_0)} - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{2\sqrt{g(x_0)} - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}\right) \\
&= (x - x_0)^2 \left(q(x) + r(x)\right).
\end{aligned}$$

한편 $y = F(x) = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$, $y_0 = F(x_0) = \sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}$ 라 놓고 y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

$$\begin{aligned}
&\sqrt{y} - ay - b \\
&= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

한편 대수함수 $F(x) = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}
&F(x) - F'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x), \\
&F(x_0) = F'(x_0)x_0 + b, \\
&b = F(x_0) - F'(x_0)x_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $Q_0(x)$는 대수함수이다. 식(4)를 식(3)에 대입하여 정리하면

$$\sqrt{F(x)}-\frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x-\left(\frac{F(x_0)-F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}}+\frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}\right)$$
$$=(x-x_0)^2\left[\frac{-\{F'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}^2+\{\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\}^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}\right]$$

그러므로

$$\left(\sqrt{\sqrt{f(x_0)}+\sqrt{g(x_0)}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f(x_0)}+\sqrt{g(x_0)}}}\left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}+\frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)$$

정리 2-10. 대수함수 $f(x), g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 미분가능하면, 대수함수 $f(x)+g(x)$, $cf(x)$도 $x=x_0$에서 미분가능하고 그 도함수는 다음과 같다.

$$\left(f(x_0)+g(x_0)\right)'=f'(x_0)+g'(x_0).$$

$$\left(cf(x_0)\right)'=cf'(x_0).$$

증명. $f(x), g(x)$가 대수함수이고, x_0를 포함하는 한 구간에서 미분가능하면 정리 2-2에서 의하여 $f(x), g(x)$는 다음과 같은 등식을 얻는다.

(1) $$f(x)=f'(x_0)x+b+(x-x_0)^2q(x)$$

$$b=f(x_0)-f'(x_0)x_0.$$

(2) $$g(x)=g'(x_0)x+c+(x-x_0)^2r(x)$$

$$c=g(x_0)-g'(x_0)x_0.$$

여기서 $q(x), r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다. (1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$\begin{aligned} & f(x)+g(x)-\Big(f'(x_0)+g'(x_0)\Big)x \\ & -\Big(f(x_0)-f'(x_0)x_0+g(x_0)-g'(x_0)x_0\Big) \\ & =(x-x_0)^2\Big(q(x)+r(x)\Big). \end{aligned}$$

그러므로

$$\Big(f(x_0)+g(x_0)\Big)'=f'(x_0)+g'(x_0).$$

식(1)의 양변에 c를 곱하면

$$cf(x)=cf'(x_0)x+bc+c(x-x_0)^2g(x)$$

Ⅲ. 결 론

대수함수의 도함수를 접선의 개념과 일치하도록 이론을 전개하는 과정에서 극한 개념을 사용하지 않고, 단순히 대수방정식의 중근의 성질과 일차함수의 기하학적 개념, 인수분해등 기초적인 방법에 의하여 특수한 형태의 대수함수족에 대한 도함수및 도함수의 선형성을 얻었다. 그 결과들은 극한을 도입한 도함수의 정의를 이용하여 얻은 결과들과 일치한다.

참 고 문 헌

1. 윤옥경 · 윤재한 (1992), 고등학교 수학 I · II, (주) 웅진문화.

2. 김광보(1991), "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의 및 성질들의 연구", 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

3. 홍성규(1993), "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수", 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

4. J. Dieudonne(1960), *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press.

5. 박을용 · 김치영 · 박한식 (1988), 수학대사전, 홍문도서.

6. Spiegel(1985), *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series.