科學敎育, 13, 31～46, 1996
Journal of Science education
13, 31～46, 1996

기수법의 변환

양성호* · 고영종**

Change of Numeration System

Yang, Sung-Ho · Ko, Young-Jong

Abstract

In this paper, we enlarge the numeration system from the set of natural numbers which is introduced in the curriculum of middle school to the set of rational numbers, by extending the Theorem 2. Futhermore, we investigate the relationship between p-adic number and p^2-adic number and generalize the relationship bewteen p-adic number and p^n-adic number.

I. 서　　론

현재 6차 교육과정에 의하여 개정된 중학교 1학년 교과서에서 다루어 지고 있는 기수법에 관한 내용은 오늘날 대부분의 국가에서 사용하고 있는 10진법을 토대로 하여 2진법과 5진법에 한정하여 다루고 있다. 그러나 동일한 수를 여러 각도에서 기수하는 방법으로 여러가지 진법에 관한 내용을 학습지도하므로써 동일한 사물이라 할지라도 여러 다른 관점에서 관찰하고 표현하는 사고 훈련을 하게 되고, 따라서 수학교육의 목적 중의 하나인 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 배양시킬 수 있다고 본다. 따라서 중학교 과정에서 여러가지 진법을 지도할 수 있는 이론적 기초가 마련되어야 하며 그런 입장에서 본 연구는 진법에 관한 기초정리를 마련하여 십진수와 다른 진수와의 관계, 십진수가 아닌 p진수와 p^n진수의 관계에 대한 이론적 기초를 정립하는 데 목적이 있다.

* 제주대학교 사범대학 수학교육과
** 서귀 여자중학교 교사

Ⅱ. 기수법의 변환

1. 용어

(1) 기수법(numeration system)

수를 숫자(기호)로써 나타내는 방법을 기수법이라 한다. 옛날에는 하나 하나의 수에 수사나 숫자를 붙이고 있었다. 이와 같은 기수법은 불편하기도 하거니와 또 무한히 많은 수에 대하여 이같은 방법은 불가능하므로 오늘날에 와서는 보통 자리의 원리를 이용하여 기수법을 사용한다. 그 방법에 따르면 하나의 예로 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 열개의 숫자의 배열에 의하여 어떠한 큰 수라도 나타낼 수 있는 것이다.

(2) 진수(base)

자리의 원리에 의한 기수법(위치적 기수법)에 의해 수를 나타내면 그 일반형은 양의 유리수 P에 대하여

$$P = A_n r^n + A_{n-1} r^{n-1} + \cdots + A_1 r + A_0 + B_1 r^{-1} + B_2 r^{-2} + \cdots + B_n r^{-n} + \cdots$$

이다. 이때 r를 진수(base)라 부르며 10 진법으로는 $r = 10$ 이며 $0 \leqq A_i \leqq 9$ 인 정수, $0 \leqq B_i \leqq 9$ 인 정수이다.

(3) p 진법

위치적 기수법에 의하여 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 p배씩 커지게 정하여 수를 나타내는 방법을 말한다.

(4) 자리의 원리 (principle of location)

10진법에 의한 기수법에서는 먼저 0에서 9까지의 숫자를 정한다. 그리고 이 10개의 숫자로, 10이상의 수는 10의 거듭제곱에다 9 이하의 수를 곱한 것의 합이라 할 수 있다는 원칙과, 숫자를 나란히 썼을 때의 위치에 따라 차례로 10배씩 값이 다르다고 정한 것을

자리의 원리라 한다. 이 자리의 원리에 의해서, 아무리 큰 수라도 10개의 숫자만으로 나타낼 수가 있다. p진법에서는 숫자를 나란히 썼을 때 위치에 따라 차례로 p배씩 값이 달라진다.

2. 진법의 기본정리

위치적 기수법에 의해서 몇 진수로 나타내느냐에 따라서 같은 숫자 같은 위치라도 다른 수를 의미한다. 11의 경우 2진수의 표현인 경우 10진수에서는 단 3을 의미하지만 같은 11이라도 16진수의 표현인 경우는 10진수의 17에 해당한다. 여기서는 취급의 편의상 10진수는 그대로 두고 다른 진수는 숫자 밑에 진수(base)를 붙여서 수를 쓰기로 한다. 즉 2진수의 11인 경우는 $11_{(2)}$로 나타내고 16진수의 11은 $11_{(16)}$으로 나타내기로 한다.

$11_{(2)}$가 3이 되는 이유는 앞자리 1이 $1 \times 2^1 = 2$가 되고 뒷자리 1은 $1 \times 2^0 = 1$이되기 때문이다. $10110_{(2)}$를 계산하면

$$10110_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$$

가 된다. 이 관계를 n자리수 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ (a_i 는 자리수)에 적용하면 십진수로 나타낸 N은

$$N = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10^1 + a_1 \times 10^0$$

으로 나타내고 이식을 십진법의 전개식 또는 십진법의 자리의 기호법이라 부른다.

(정리 1) 호제법(Division Algorithm)

임의의 정수 $a > 0$, b 에 대하여,

$$b = aq + r, \quad 0 \leqq r < a$$

인 정수 q 와 r 이 유일하게 존재한다. 이때 q를 몫, r을 나머지라 한다.

(정리 2) 진법의 기본 정리

p를 1보다 큰 양의 정수라 하면, 임의의 양의 정수 a는 다음과 같이 유일하게 나타낼 수 있다.

$$a = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

여기에서 m은 음이 아닌 정수, $a_0, a_1 \cdots, a_m$은 정수이며 $0 < a_m < p$, $0 \leqq a_i < p$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$이다. 이때 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_{0(p)}$로 표현하며 이것을 a의 p진법의 표현 또는 p진수라 한다.

(참고) (정리 2)의 내용은 결국 p로 반복하여 나누어 보면

$$\begin{array}{l l r}
p | & a = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \cdots\cdots & (\text{나머지}) \\ \hline
p | & a_m p^{m-1} + a_{m-1} p^{m-2} + \cdots + a_1 \cdots\cdots & a_0 \\ \hline
p | & a_m p^{m-2} + a_{m-1} p^{m-3} + \cdots + a_2 \cdots\cdots & a_1 \\ \hline
 & \vdots & \\
p | & a_m p + a_{m-1} \cdots\cdots & a_{m-2} \\ \hline
p | & a_m \cdots\cdots & a_{m-1} \\ \hline
 & 0 \cdots\cdots & a_m
\end{array}$$

이므로

$$\begin{aligned} a &= a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \\ &= a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_{0(p)} \end{aligned}$$

가 된다.

(참고) 1 보다 큰 임의의 양의 정수를 $a = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ 로 나타낼 때 이 식을 a의 p진법의 전개식이라 한다.

(예 1) 양의 정수 37을 십진법의 전개식으로 뿐만 아니라 (정리 2)에 의해 이진법의 전개식으로도 나타낼 수 있다. 따라서 다음과 같이 십진수 37은 이진법의 표현 즉 이진수로 나타낼 수 있다.

$$37 = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0$$

라 놓고 양변을 계속 2로 나누면서 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 을 차례로 구할 수 있다.

위 식의 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_0 = 1$ 이고 몫은

$$18 = a_m 2^{m-1} + a_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1$$

이다. 다시

$$18 = a_m 2^{m-1} + a_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_1 = 0$ 이고 몫은

$$9 = a_m 2^{m-2} + a_{m-1} 2^{m-3} + \cdots + a_3 2^1 + a_2$$

이다. 다시

$$9 = a_m 2^{m-2} + a_{m-1} 2^{m-3} + \cdots + a_3 2^1 + a_2$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_2 = 1$ 이고 몫은

$$4 = a_m 2^{m-3} + a_{m-1} 2^{m-4} + \cdots + a_4 2^1 + a_3$$

이다. 다시

$$4 = a_m 2^{m-3} + a_{m-1} 2^{m-4} + \cdots + a_4 2^1 + a_3$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_3 = 0$ 이고 몫은

$$2 = a_m 2^{m-4} + a_{m-1} 2^{m-5} + \cdots + a_5 2^1 + a_4$$

이다. 다시

$$2 = a_m 2^{m-4} + a_{m-1} 2^{m-5} + \cdots + a_5 2^1 + a_4$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_4 = 0$ 이고 몫은

$$1 = a_m 2^{m-5} + a_{m-1} 2^{m-6} + \cdots + a_6 2^1 + a_5$$

이다. 다시

$$1 = a_m 2^{m-5} + a_{m-1} 2^{m-6} + \cdots + a_6 2^1 + a_5$$

에서 양변을 2로 나누면 나머지는 $a_5 = 1$ 이고 몫은 0이므로 $m = 5$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned} 37 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 100101_{(2)} \end{aligned}$$

(예 2) 십진수 300을 8진법의 전개식으로 나타내고 8진법의 표현으로 고쳐보자.

$$300 = a_m 8^m + a_{m-1} 8^{m-1} + \cdots + a_1 8^1 + a_0$$

라 놓고 양변을 8로 나누면 나머지는 $a_0 = 4$ 이고 몫은

$$37 = a_m 8^{m-1} + a_{m-1} 8^{m-2} + \cdots + a_2 8^1 + a_1$$

이다. 다시

$$37 = a_m 8^{m-1} + a_{m-1} 8^{m-2} + \cdots + a_2 8^1 + a_1$$

에서 양변을 8로 나누면 나머지가 $a_1 = 5$ 이고 몫은

$$4 = a_m 8^{m-2} + a_{m-1} 8^{m-3} + \cdots + a_3 8^1 + a_2$$

이다. 다시

$$4 = a_m 8^{m-2} + a_{m-1} 8^{m-3} + \cdots + a_3 8^1 + a_2$$

에서 양변을 8로 나누면 나머지가 $a_2 = 4$ 이고 몫은 0이므로 $m = 2$ 이다.
그러므로

$$300 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 4 = 454_{(8)}$$

위에서 살펴본 바에 의하면 10진수를 다른 p진수로 표현하려면 10진수를 p로 나눈 나머지를 이용함을 알 수 있다. 그래서 다음의 예와 같이 하면 10진수를 16진수로 간단히 고치는 방법을 알 수 있다.

(예 3) 십진수 300을 16진수로 고치기.

$$
\begin{array}{r|l}
16 & 300 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\text{나머지}) \\ \hline
16 & 18 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ \hat{2} \\ \hline
16 & 1 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2 \\ \hline
 & 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 1
\end{array}
$$

따라서300 $= 12\hat{2}_{(16)}$ (단, $\hat{2}_{(16)} = 12$ 로 약속한다.)

(정리 3) $p \geqq 2$ 인 정수에 대하여 $0 \leqq t < 1$ 인 유리수 t는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

여기에서, 임의의 i에 대해서 b_i 는 $0 \leqq b_i < p$ 인 정수이다.

(증명) $0 \leqq pt < p$ 이므로 $pt = b_1 + t_1$ 이 되는 $0 \leqq b_1 < p$ 인 정수 b_1 과 $0 \leqq t_1 < 1$ 인 t_1 이 존재한다. 또 $0 \leqq pt_1 < p$ 이므로 $pt_1 = b_2 + t_2$ 이 되는 $0 \leqq b_2 < p$ 인 정수 b_2 와 $0 \leqq t_2 < 1$ 인 t_2 가 존재한다. 일반적으로 임의의 n에 대하여 $pt_{n-1} = b_n + t_n$ 이 되는 $0 \leqq b_n < p$ 인 정수 b_n 과 $0 \leqq t_n < 1$인 t_n 이 존재한다. 그러면

$$t = (b_1 + t_1)p^{-1} = b_1 p^{-1} + t_1 p^{-1} = b_1 p^{-1} + (b_2 + t_2)p^{-2} = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + t_2 p^{-2} = \cdots$$

$$= b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_n p^{-n} + t_n p^{-n}$$

이다. 이제

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

임을 밝히기 위하여

$$s_n = b_1 p^{-1} + \cdots + b_n p^{-n}$$

이라 하면 임의의 n 에 대하여 $t - s_n = t_n p^{-n} \geqq 0$ 이므로 s_n은 위로 유계(bounded above)이다. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $p^N > \frac{1}{\epsilon}$ 인 양의 정수 N 을 취하자. 그러면 $n \geqq N$ 인 양의 정수 n 에 대해서

$$t - s_n = t_n p^{-n} < p^{-n} \leqq p^{-N} < \epsilon$$

이므로

$$\lim_{n \to \infty} s_n = t$$

이다. 따라서

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

이다. □

(정리 4) p를 1이 아닌 양의 정수라 하면, 임의의 양의 유리수 a는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 + b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

$$(0 \leqq a_i < p, \quad 0 \leqq b_j < p)$$

위 식을 소수 a의 p진법의 전개식이라 하고 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots_{(p)}$을 a의 p진법의 표현 (또는 p진수)라 한다.

(증명) 임의의 양의 유리수 a에 대하여 $a = s + t$ (s는 $s \geqq 0$ 인 정수, t 는 $0 \leqq t < 1$ 인 유리수)와 같이 나타낼 수 있다. 그런데 (정리 2)와 (정리 3)에서 다음과 같이 s 와 t 를 나타낼 수 있다.

$$s = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

$$t = b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots + b_m p^{-m} + \cdots$$

따라서

$$a = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 + b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \cdots b_m p^{-m} + \cdots$$

와 같이 나타낼 수 있다. □

(참고) (정리 4)에서 모든 $i > m$ 에 대해서 $b_i = 0$ 일 경우는

$$a = a_n a_{n-1} a_{n-3} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_{m(p)}$$

로 나타내기로 한다.

(예 4) 양의 유리수(소수) 0.25를 4진법의 전개식으로 다음과 같이 나타내고 4진수로 고칠 수 있다.

$$0.25 = a_1 \times 4^{-1} + a_2 \times 4^{-2} + \cdots + a_n \times 4^{-n} + \cdots$$

이라 놓으면

$$0.25 \times 4 = 1.0 = a_1 + a_2 \times 4^{-1} + \cdots + a_n \times 4^{-n+1} + \cdots$$

따라서 $a_1 = 1$, $0.0 = a_2 \times 4^{-1} + \cdots + a_n \times 4^{1-n} + \cdots$ 이므로

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

그러므로 결국

$$0.25 = 1 \times 4^{-1} + 0 \times 4^{-2} + \cdots + 0 \times 4^{-n} + \cdots$$

$$= 1 \times 4^{-1} = 0.1_{(4)}$$

따라서 $0.25 = 0.1_{(4)}$

(예 5) 양의 유리수 0.6을 2진수로 나타내는 것을 생각해 보면

$$0.6 = a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + \cdots + a_n \times 2^{-n} + \cdots$$

이라 놓고 양변을 2배하여 a_1을 구한다.

$$0.6 \times 2 = 1.2 = a_1 + (a_2 \times 2^{-1} + \cdots + a_n \times 2^{1-n}) + \cdots$$

( )속은 소수부분이 되므로, 따라서 정수부분인 $a_1 = 1$이다.
이 방법을 되풀이하면

$0.2 \times 2 = 0.4$, 따라서 $a_2 = 0$
$0.4 \times 2 = 0.8$, 따라서 $a_3 = 0$
$0.8 \times 2 = 1.6$, 따라서 $a_4 = 1$
$0.6 \times 2 = 1.2$, 따라서 $a_5 = 1 = a_1$
$0.2 \times 2 = 0.4$, 따라서 $a_6 = 0 = a_2$

가 되어 순환소수가 됨을 알 수 있다. 즉, $0.6 = 0.1001100110011001\cdots_{(2)}$가 된다.
역으로 $0.100110011001\cdots_{(2)}$을 10진법으로 나타내 보자.

$$0.100110011001\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots$$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots) + (\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^4}} + \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}} = 0.6$$

이상에서 살펴 본 것처럼 정수가 아닌 유리수 범위에서도 십진수를 다른 p진수로 표현 할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 또한 p진수인 소수를 십진수 소수로 고치려면 p진수 소수를 p진법의 전개식으로 나타내고 그 전개식을 계산하면 된다.

(예 6) 8진수 $0.65_{(8)}$은 10진수로 고치면 다음과 같다.

$$0.65_{(8)} = 6 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2} = \frac{6}{8} + \frac{5}{64}$$

$$= \frac{53}{64} = 0.828125$$

(예 7) 16진수 $0.2\hat{2}_{(16)}$은 10진수로 고치면 다음과 같다. (단, $\hat{2}_{(16)} = 12$ 로 약속한다.)

$$0.2\hat{2}_{(16)} = 2 \times 16^{-1} + \hat{2} \times 16^{-2} = \frac{2}{16} + \frac{12}{256}$$

$$= \frac{44}{256} = 0.171875$$

결론적으로 양의 정수 뿐만 아니라 유리수 범위에서 자유롭게 십진수를 다른 진수로, 다른 진수를 십진수로 변환할 수 있다.

3. p 진수와 p^2 진수의 관계

p진수를 p^2진수로, 또는 p^2진수를 p진수로 10진수를 거치지 않고 직접 고칠 수 있는 방법을 생각해 보자.

p 진수 $a = a_m a_{m-1} \cdots a_{1(p)}$ 에서 m 이 홀수일 때는 $a_{m+1} = 0$ 인 자리수를 a 의 맨 앞자리에 추가하여 $a = a_{2n} a_{2n-1} \cdots a_{1(p)}$와 같이 자리수의 갯수가 짝수가 되도록 일반적으로 고칠 수 있다.

(정리 5) $p > 1$ 인 정수이고 $s = p^2$ 일때 양의 정수인 p진수 $a = a_{2n} a_{2n-1} \cdots a_{1(p)}$ 에 대해서 $t_1 = a_2 p + a_1$, $t_2 = a_4 p + a_3, \cdots, t_n = a_{2n} p + a_{2n-1}$ 라 두면 $0 \leqq t_i < s$ (단,$i = 1, 2, \cdots, n$)이고 $a = t_n t_{n-1} \cdots t_{1(s)}$ 와 같다.

(증명) 우선 $0 \leqq t_i < s$ 임을 보이자.

$$0 \leqq t_i = a_{2i}p + a_{2i-1} \leqq (p-1)p + (p-1) = p^2 - 1 < p^2 = s$$

이므로 $0 \leqq t_i < s$ 이다. 이제 $a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_2a_{1(p)} = t_nt_{n-1}\cdots t_3t_2t_{1(s)}$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned} a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_2a_{1(p)} &= a_{2n}p^{2n-1} + a_{2n-1}p^{2n-2} + \cdots + a_3p^2 + a_2p + a_1 \\ &= (a_{2n}p + a_{2n-1})p^{2n-2} + \cdots + (a_4p + a_3)p^2 + (a_2p + a_1) \\ &= (a_{2n}p + a_{2n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_4p + a_3)s + (a_2p + a_1) \\ &= t_ns^{n-1} + \cdots + t_2s + t_1 = t_nt_{n-1}\cdots t_2t_{1(s)} \end{aligned}$$

따라서, $a_{2n}a_{2n-1}\cdots a_{1(p)} = t_nt_{n-1}\cdots t_{1(s)}$ 이다. □

(예 8) 양의 정수인 3진수 $122_{(3)}$을 9진수로 나타내 보자.
(정리 5)에 의해서 $a_4a_3a_2a_{1(3)} = 0122_{(3)} = t_2t_{1(9)}$라 놓으면

$$t_1 = a_2 \times 3 + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8$$
$$t_2 = a_4 \times 3 + a_3 = 0 \times 3 + 1 = 1$$

따라서 $122_{(3)} = 18_{(9)}$.

이제 (정리 5) 에서 $t_i = a_{2i}p + a_{2i-1}$ 인데 a_{2i}, a_{2i-1} 는 t_i 를 p로 나누었을때의 몫과 나머지이므로 a_{2i}, a_{2i-1}를 구하여 p^2진수를 p진수로 고치는 방법을 생각해보자.

(정리 6) $p > 1$인 정수, $s = p^2$이고 양의 정수 $a = a_na_{n-1}\cdots a_{1(s)}$에 대해 a_i $(1 \leqq i \leqq n)$를 p로 나누었을때의 몫과 나머지를 각각 t_{2i}, t_{2i-1}라 하면 $0 \leqq t_j < p$ $(1 \leqq j \leqq 2n)$이고 $a = t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2t_{1(p)}$이다.

(증명) t_{2i-1}은 a_i를 p로 나누었을때의 나머지이므로 $0 \leqq t_{2i-1} < p$임은 당연하다. 만일 $t_{2i} \geqq p$라 가정하면 $pt_{2i} \geqq p^2$이다. 따라서 $a_i = pt_{2i} + t_{2i-1} \geqq p^2 = s$이므로 모순이 된다.

그러므로 $0 \leqq t_j < p \quad (1 \leqq j \leqq 2n)$이다. 이제 $a = t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2t_{1(p)}$임을 밝히자.
$1 \leqq i \leqq n$인 모든 i에 대해서 $a_i = t_{2i}p + t_{2i-1}$이다. 그리고

$$\begin{aligned} a = a_n a_{n-1}\cdots a_{1(s)} &= a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots a_2 s + a_1 \\ &= (t_{2n}p + t_{2n-1})p^{2n-2} + (t_{2n-2}p + t_{2n-3})p^{2n-4} + \cdots + (t_4 p + t_3)p^2 + (t_2 p + t_1) \\ &= t_{2n}p^{2n-1} + t_{2n-1}p^{2n-2} + t_{2n-2}p^{2n-3} + t_{2n-3}p^{2n-4} + \cdots + t_4 p^3 + t_3 p^2 + t_2 p + t_1 \\ &= t_{2n}t_{2n-1}\cdots t_2 t_{1(p)} \end{aligned}$$

이다. □

(예 9) $12123_{(4)}$를 2진수로 고치려면

$$12123_{(4)} = t_{10}t_9t_8t_7t_6t_5t_4t_3t_2t_{1(2)}$$

라 놓으면 $3 = t_2 \times 2 + t_1$ 이 되고 양변을 2로 나누면 몫과 나머지가 서로 같아야 한다. 따라서 $t_2 = 1, t_1 = 1$이다. 같은 방법으로

$2 = t_4 \times 2 + t_3$에서 $t_4 = 1, t_3 = 0$
$1 = t_6 \times 2 + t_5$에서 $t_6 = 0, t_5 = 1$
$2 = t_8 \times 2 + t_7$에서 $t_8 = 1, t_7 = 0$
$1 = t_{10} \times 2 + t_9$에서 $t_{10} = 0, t_9 = 1$

따라서 $12123_{(4)} = 0110011011_{(2)} = 110011011_{(2)}$ 이다.

4. p 진수와 p^n 진수의 관계

위에서는 중학교 교육과정 수준에서의 지도를 위하여 p진수와 p^2 진수의 관계를 알아보았는데 이것을 더욱 일반화 하여 p진수와 p^n진수의 관계를 알아본다.

p 진수 $a = a_m a_{m-1}\cdots a_2 a_{1(p)}$ 에서 m 이 n 의 배수가 아닐 때는 $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = 0, \cdots, a_{\alpha n} = 0$ 인 자리수들을 a 의 앞자리에 추가하여 $a = a_{\alpha n}a_{\alpha n-1}\cdots a_{1(p)}$ 와 같이 자리수의 갯수가 n의 배수가 되도록 일반적으로 고칠 수 있다.

(정리 7) $p > 1$ 인 정수, $s = p^n$ 이고 양의 정수인 $a = a_{\alpha n}a_{\alpha n-1}\cdots a_{1(p)}$ 에 대해서 $t_i = a_{in}p^{n-1} + a_{in-1}p^{n-2} + \cdots + a_{in-(n-2)}p + a_{in-(n-1)}$라 하면 $0 \leqq t_i < s$ (단, $1 \leqq i \leqq \alpha$)이고 $a = t_\alpha t_{\alpha-1}\cdots t_2t_{1(s)}$이다.

(증명) 우선 $i = 1, 2, \cdots, \alpha$ 에 대해서 $0 \leqq t_i < s$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned}0 \leqq t_i &= a_{in}p^{n-1} + a_{in-1}p^{n-2} + \cdots + a_{in-(n-2)}p + a_{in-(n-1)} \\ &\leqq (p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \cdots + (p-1)p + (p-1) \\ &= (p-1)(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1) = p^n - 1 < p^n = s\end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned}&a_{\alpha n}\cdots a_{(\alpha-1)n+1}\cdots a_{3n}\cdots a_{2n+1}a_{2n}\cdots a_{n+1}a_n\cdots a_2a_{1(p)} \\ &= (a_{\alpha n}p^{\alpha n-1} + \cdots + a_{(\alpha-1)n+1}p^{(\alpha-1)n}) + \cdots + (a_{3n}p^{3n-1} + \cdots + a_{2n+1}p^{2n}) \\ &\quad +(a_{2n}p^{2n-1} + \cdots + a_{n+1}p^n) + (a_np^{n-1} + \cdots + a_2p + a_1) \\ &= (a_{\alpha n}p^{n-1} + \cdots + a_{(\alpha-1)n+1})s^{\alpha-1} + \cdots + (a_{2n}p^{n-1} + \cdots + a_{n+1})s + (a_np^{n-1} + \cdots + a_2p + a_1) \\ &= t_\alpha t_{\alpha-1}\cdots t_2t_{1(s)} \quad \square\end{aligned}$$

(예 10) 이진수 $11011_{(2)}$ 을 8진수로 고치려고 할 때는 $11011_{(2)} = 011011_{(2)}$ 이므로 $011011_{(2)} = t_2t_{1(8)}$ 이라 놓고

$$t_1 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 3$$
$$t_2 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 3$$

따라서 $011011_{(2)} = 11011_{(2)} = 33_{(8)}$ 이다.

p^n진수를 p진수로 나타내고자 할 때는 (정리 7)의 $t_1 = a_np^{n-1} + \cdots + a_2p + a_1$을 p로 계속 나누면서 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$을 구할 수 있다.

(보조정리 8) $p > 1$, $s = p^n$일때 한자리의 양인 s진수는 n자리 이하의 p진수가 된다. 즉, $m \leqq n$ 이고

$$\begin{aligned}a_{(s)} &= a_mp^{m-1} + a_{m-1}p^{m-2} + \cdots + a_2p + a_1 \\ &= a_ma_{m-1}\cdots a_{1(p)}\end{aligned}$$

(증명) a 는 한자리의 양인 s 진수 이므로 $0 \leqq a < s = p^n$ 인 정수이다. (정리 2)에 의하여 $a = a_m p^{m-1} + a_{m-1}p^{m-2} + \cdots + a_2 p + a_1$와 같이 나타낼 수 있다. (단, $0 \leqq a_i < p$, $a_m \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$) 만일 $m > n$이라면 $m - 1 \geqq n$이므로 $p^{m-1} \geqq p^n$이다. 따라서 $a \geqq a_m p^{m-1} \geqq p^n = s$가 되어 모순이다. 그러므로 $m \leqq n$이다. □

(참고) 위 (보조정리 8)에 의하면 한자리의 양인 s진수 $a_{(s)}$는 n자리 이하의 p 진수 $a_m a_{m-1} \cdots a_{1(p)}$이 되므로 $m < n$인 경우에는 $a_n = 0, a_{n-1} = 0, \cdots, a_{m+1} = 0$인 자리수를 p진수 앞자리에 추가하여 꼭 n자리의 p진수로 나타낼 수 있다. 즉, $a_{(s)} = a_n a_{n-1} \cdots a_{1(p)}$이고 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $0 \leqq a_i < p$이다.

(정리 9) $p > 1$, $s = p^n$일때 양의 정수인 s진수 $a = a_\alpha a_{\alpha-1} \cdots a_{1(s)}$에 대해서 위 (참고)와 (보조정리 8)에 의하여 a의 각 자리수를 꼭 n자리의 p진수로 다음과 같이 나타난다고 하자.

$$a_i = b_{in}p^{n-1} + b_{in-1}p^{n-2} + \cdots + b_{(i-1)n+1}, \quad (1 \leqq i \leqq \alpha)$$

그러면

$$a = b_{\alpha n} b_{\alpha n-1} \cdots b_{1(p)}$$

이다.

(증명)

$$a = a_\alpha a_{\alpha-1} \cdots a_{1(s)} = a_\alpha s^{\alpha-1} + a_{\alpha-1}s^{\alpha-2} + \cdots + a_2 s + a_1$$

$$= a_\alpha p^{n(\alpha-1)} + a_{\alpha-1}p^{n(\alpha-2)} + \cdots + a_2 p^n + a_1$$

$$= (b_{\alpha n}p^{n-1} + b_{\alpha n-1}p^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1})p^{n(\alpha-1)}$$

$$+ (b_{(\alpha-1)n}p^{n-1} + b_{(\alpha-1)n-1}p^{n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1})p^{n(\alpha-2)} + \cdots$$

$$+ (b_{2n}p^{n-1} + b_{2n-1}p^{n-2} + \cdots + b_{n+1})p^n + (b_n p^{n-1} + b_{n-1}p^{n-2} + \cdots + b_1)$$

$$= b_{\alpha n}p^{\alpha n-1} + b_{\alpha n-1}p^{\alpha n-2} + \cdots + b_{(\alpha-1)n+1}p^{n(\alpha-1)}$$

$$+ b_{(\alpha-1)n}p^{(\alpha-1)n-1} + b_{(\alpha-1)n-1}p^{(\alpha-1)n-2} + \cdots + b_{(\alpha-2)n+1}p^{n(\alpha-2)} + \cdots$$

$$+ b_{2n}p^{2n-1} + b_{2n-1}p^{2n-2} + \cdots + b_{n+1}p^n + b_n p^{n-1} + b_{n-1}p^{n-2} + \cdots + b_1$$

$$= b_{\alpha n} b_{\alpha n-1} \cdots b_2 b_{1(p)} \quad \square$$

(예 11) 8진수 $574_{(8)}$ 를 2진수로 나타내려면 8진수서 한자리 수는 2진수에서 최대로 3자리 수에 대응된다. 따라서

$$574_{(8)} = b_9b_8b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_{1(2)} \text{ 라 두고}$$

(정리 9)에 의해

$$4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1$$
$$7 = b_6 \times 2^2 + b_5 \times 2 + b_4$$
$$5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$$

이 되고 $4 = b_3 \times 2^2 + b_2 \times 2 + b_1$ 의 양변을 2로 나누어 b_1, b_2, b_3를 구한다. 실제로 구하여 보면 $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$이된다. 같은 방법으로 $7 = b_6 \times 2^2 + b_5 \times 2 + b_4$에서 $b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ 그리고 $5 = b_9 \times 2^2 + b_8 \times 2 + b_7$ 에서 $b_7 = 1, b_8 = 0, b_9 = 1$ 을 구할 수 있다.
따라서, $574_{(8)} = 101111100_{(2)}$ 이다.

Ⅲ. 결론 및 제언

사람들이 숫자를 사용하기 시작한 후 수를 표기하는 방법으로 기수법이 등장하는데 지금 우리가 쓰고있는 기수법은 자리의 원리에 의한 기수법으로서 아라비아 숫자의 기수법이다. 중학교 교육과정에 소개되는 기수법은 10진법을 토대로 하여 2진법과 5진법에 한정되어 있다. 그러나 여러 곳에서 여러 가지 진법이 사용된 흔적이 있으며 또한 같은 수일지라도 여러 가지 방법으로 기수할 수 있도록 학생들에게 지도하는 것이 논리적이고 창의적인 사고력과 표현력을 키우는 데 도움이 된다. 그러므로 지도하는 교사의 입장에서 기수법에 대한 이론적 기초를 정립해 두는 것이 매우 의미있는 작업이라 생각되었고 또한 교육과정에 의하면 임의의 p진수는 10진수를 거쳐야 다른 s진수로 나타낼 수 있는데 "임의의 p진수를 반드시 10진수를 거치지 않고 다른 임의의 s진수로 고칠 수 있는 일반적인 방법이 없을까?" 라는 발상을 하게 되었다. 그러나 일반적으로 p진수를 s진수로 나타내는 데는 어려움이 따르게 되었고 특별한 경우 즉 p진수와 p^n진수 사이에는 10진수를 거치지 않고 서로 다른 진수로 고칠 수 있는 일반적인 정리를 얻을 수 있었다. 따라서 p^n진수와 p^m진수 사이에도 10진수가 아닌 p진수를 거치면 서로 다른 진수로 표현이 된다.

본 연구에서는 중학교에서 0과 자연수 범위에서 소개된 기수법을 진법의 기본정리를 토대로 하여 유리수 범위로 확장시켜 생각해 보았고 p진수와 p^2진수의 관계 더 나아가 p진수와 p^n진수 사이의 관계에 대하여 알아 보았다. 이를 토대로 p^n 진수와 p^m 진수

사이의 관계를 생각해 볼 수 있다. 앞으로 p^n 진수와 p^m 진수 사이의 변환을 십진수 또는 p 진수를 거치지 않고 직접 고칠 수 있는 방법에 대하여 계속 연구해 볼 가치가 있다고 여겨진다. 본 연구의 결과를 중등학교의 교육현장에 적용함으로써 학습자의 학습동기와 흥미를 유발시키고 기수법을 지도하는 교사들에게 많은 도움이 되었으면 한다.

참 고 문 헌

1. 최민아 (1995), "수의 기원과 관련된 수의 발전사 연구", 석사학위논문, 경북대학교 교육대학원.
2. 한국사전연구원 (1989), "최신 수학사전", 교육문화원.
3. 김용운·김용국 (1990), "재미있는 수학여행", 김영사.
4. 박두일·신동선·강영환 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)교학사.
5. 구광조·황선욱 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), 지학사.
6. 김연식·김흥기 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)동아출판사.
7. 최용준 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)천재교육.
8. 박배훈·정창현 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)교학사.
9. 김호우·박교식·신준국·정은실 (1995), "중학교 수학 1"(교과서), (주)지학사.
10. 김응태·박승안 (1979), "정수론", 이우출판사.
11. 제주도중등수학교육연구회 (1984), "수학 교육"(제12집), 대동원색인쇄사.
12. D.M. Burton (1980), "Elementary Number Theory", Allyn and Bacon, Inc.