J. of Basic Sciences, Cheju Nat'l Univ.
20(1), 41~55, 2007

기초과학연구 제주대학교
20(1), 41~55, 2007

퍼지논리 '부정'에 대한 알고리즘과 그래프

박진원, 임소현, 윤용식
제주대학교 사범대학 수학교육과
제주대학교 자연과학대학 수학과

요 약

명제의 진위를 잘 정의할 수 없는 명제를 퍼지명제로 정의한다. 퍼지명제에 대한 진리의 정도를 수치로 표현한 것이 퍼지명제의 진리값이다. 퍼지명제에서의 기본연산으로 논리합, 논리곱, 암시 등이 있는데, 본 논문에서는 부정에 대한 연산을 정의하고 계산법에 대한 알고리즘을 제시하였다. 퍼지집합과 다르게 퍼지명제에 있어서는 계산 자체도 보통의 연산에 비교하여 보면 선명하지 않고, 결과도 수치적으로 나오기는 하지만 해석이나 시각화하기가 어려운 것이 사실이다. 그러나 본 논문에서는 그 알고리즘에 따라 mathematica를 이용하여 실제적인 그래프를 그렸다.

1. 서 론

일상생활에서 'x is A'라는 명제의 참과 거짓의 정도를 *true, more or less true, very true, false, completely false* 등으로 나타내는데 특히, 한 주장이나 명제의 진위를 잘 정의할 수 없을 때에는 그것을 위에서처럼 나타낸다. 이런 경우 용어집합이 *true, very true, false,*… 등인 언어변수 '*Truth*'를 도입하여 사용하며 명제의 진위정도를 수치적 진리값(numerical truth- value)이 아닌 언어적 진리값(linguistic truth-value)으로 나타낼 수 있다.

정의 1.1

명제의 진리값을 $\{0, 1\}$로는 기술할 수 없고, $[0, 1]$사이의 값으로 기술해야 하는 명제를 퍼지명제(fuzzy proposition)라 한다.

'x is A'라는 퍼지명제가 있을 때

(i) A의 의미 M_A

(ii) 퍼지명제 'x is A'의 진리값

에 대하여 생각해 보자.

A의 의미 M_A는 집합 X에 있는 이름이 A인 퍼지부분집합의 의미이다. 'Tom is old.'라는 명제에서 M_A는 언어변수 Age의 집합 안에 있는 old의 의미를 나타내며, 'Tom is old.'를 'Age(Tom)=old.'로 이해할 수 있다.

명제 'x is A'의 전형적인 언어진리값 $v(x\ is\ A)$는

$$true, not\ true, very\ true, more\ or\ less\ true, \cdots$$

$$false, not\ false, very\ false, \cdots$$

등으로, 퍼지진리값 공간 [0, 1]에서의 퍼지 부분집합들이다.

먼저 Zadeh가 제시한 언어변수 ***Truth***의 변수값 ***true***에 대하여 기술하면, 다음과 같다.

$$\mu_{true}(\eta)=\begin{cases} 0, & \text{for } 0\le\eta\le a, \\ 2\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^2, & \text{for } a\le\eta\le\dfrac{a+1}{2}, \\ 1-2\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^2, & \text{for } \dfrac{a+1}{2}\le\eta\le 1. \end{cases}$$

퍼지명제 'Tom who is 60 years old is old.' 의 진리값에 대하여 생각해 보자. old를 다음과 같이 정의할 경우,

$$\mu_{old}(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,60], \\ \left(1+\left(\dfrac{x-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & x\in[60,100]. \end{cases}$$

퍼지명제 'Tom who is 70 years old is old.'의 진리값은 $\mu_{old}(70)=0.8$이다. 그러나 'Tom who is 70 years old is old.'의 진리값이 *true*이거나 'Red apple is ripe.'의 진리값이 *very true*인 경우엔 즉, 퍼지명제의 진리값이 언어값으로 주어지면 명제의 진리값을 정량적으로 표현하기가 어려워진다. 언어진리값이 *very true*인 퍼지명제 'Red apple is ripe.'는 언어진리값 *very true*를 명제에 포함시켜 'Red apple is ripe is *very true*.'로 쓸 수 있다.

그러면 다음의 명제들에서와 같이, 명제 내에 명제의 언어진리값이 내포된 명제들이 수치적 진리값에 대하여 생각해 보자.

(i) Tom (70 years old) is old is *true*.

(ii) Tom (70 years old) is old is *very true.*
(iii) Tom (70 years old) is old is *more or less true.*

'Tom (70 years old) is old is *very true.*'의 명제에서 old를 앞에 제시된 $\mu_{old}(x)$에 대한 식으로 정의하고 Zadeh가 제시한 $a=0.6$인 *true*를 사용하면

$$\mu_{true}(\eta)=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\eta\le 0.6,\\ 2\left(\dfrac{\eta-0.6}{0.4}\right)^2, & \text{for } 0.6\le\eta\le 0.8,\\ 1-2\left(\dfrac{\eta-0.6}{0.4}\right)^2, & \text{for } 0.8\le\eta\le 1.\end{cases}$$

이때 *very true*는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\eta)=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\eta\le 0.6,\\ 4\left(\dfrac{\eta-0.6}{0.4}\right)^4, & \text{for } 0.6\le\eta\le 0.8,\\ \left(1-2\left(\dfrac{\eta-0.6}{0.4}\right)^2\right)^2, & \text{for } 0.8\le\eta\le 1.\end{cases}$$

70세인 Tom이 old의 특성을 만족하는 정도 η는 $\eta=\mu_{old}(70)=0.8$이므로 'Tom (70 years old) is old'의 명제가 *very true*일 가능성은 $\mu_{very\ true}(0.8)=0.25$이다. 즉, v(Tom (70 years old) is old is *very true*) $=0.25$이다.

이제 명제 'Tom is old is *very true*'의 진리값에 대하여 살펴보자. old를 Zadeh가 제시한 *true*를 사용하면 *very true*는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\eta)=\mu^2_{true}(\eta)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{for } 0\le\eta\le a,\\ 4\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^4, & \text{for } a\le\eta\le\dfrac{a+1}{2},\\ \left(1-2\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^2\right)^2, & \text{for } \dfrac{a+1}{2}\le\eta\le 1.\end{cases}$$

Tom의 나이가 0세에서 60세 사이라면 $\eta=0$이므로 $\mu_{very\ true}(\eta)=0$이다. 따라서 'Tom is old'라는 명제가 *very true*일 가능성은 0이다. Tom의 나이가 60세에서 100세 사이라면 $\eta=\left(1+\left(\dfrac{x-60}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$이며, 'Tom is old'라는 명제가 *very true*일 정도는 위 식에 의해

계산할 수 있다.

언어진리값이 τ인 퍼지명제 'x is A'는

$$x\ is\ A\ is\ \tau$$

로 쓸 수 있으며 이것과 동등한 식의 퍼지명제를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x\ is\ A'$$

그렇다면,

$$\mu_{A'}(x) = \mu_{\tau}(\mu_A(x)), \quad x \in X$$

이다. 즉, $x\ is\ A\ is\ \tau$ 인 퍼지명제의 진리값은 위 식에 의해 계산할 수 있다.

2. 퍼지논리 연산자

이제 퍼지논리 연산자에 대하여 살펴본다.

(1) 명제의 부정(negation)

(i) 언어진리값의 부정 : $\neg v(P)$

명제 'P is τ_P' 의 부정을 'P is not τ_P'로 정의하면, 'P is $\neg\tau_P$'의 진리값은 다음과 같다.

$$v(P\ is\ not\ \tau_P) = \mu_{\neg\tau_P}(\eta) = 1 - \mu_{\tau_P}(\eta), \quad \eta \in [0,1]$$

(ii) 퍼지술어의 부정 : $v(\neg P)$

명제 'P is τ_P'의 부정을 'not P is τ_P'로 정의하면, 'not P is τ_P'의 진리값은 다음과 같다.

$$v(not\ P\ is\ \tau_P) = \mu_{\tau_P}(1-\eta).$$

(2) 명제의 논리곱(conjunction) : P and Q

'P is τ_P'와 'Q is τ_Q'의 논리곱은 'P and Q is τ_P and τ_Q'로 취급할 수 있으므로 $v(P \text{ and } Q) = \tau_{P \text{ and } Q}$라고 하면, $\tau_{P \text{ and } Q}$는 다음으로 정의된다.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \wedge \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

(3) 논리합 (disjuction) : $P\ or\ Q$

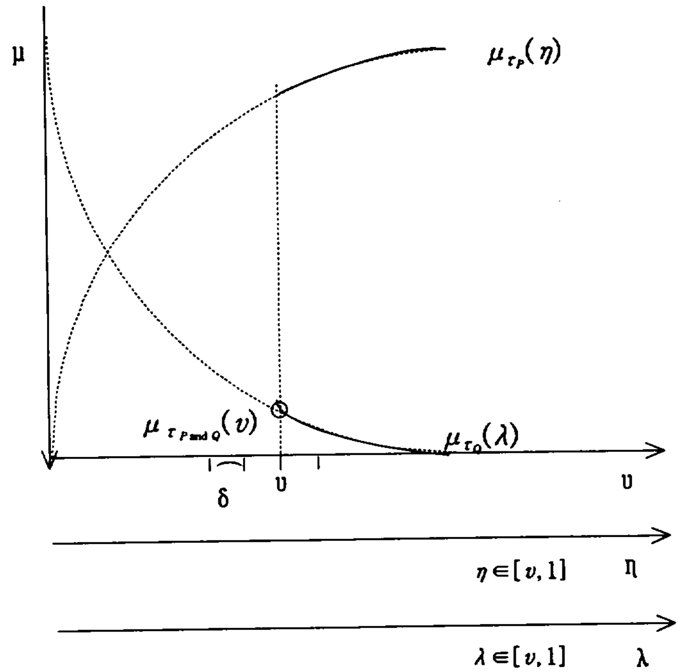
'P is τ_P'와 'Q is τ_Q'의 논리합은 '$P\ or\ Q$ is $\tau_P\ or\ \tau_Q$'로 취급할 수 있으므로 $v(P\ or\ Q) = \tau_{P or Q}$라고 하면, $\tau_{P or Q}$는 다음으로 정의된다.

$$\mu_{\tau_{PorQ}}(v) = \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

3. 기본연산

언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 'P is τ_P.'와 'Q is τ_Q.'의 논리곱은 'P is τ_P and Q is $\tau(Q)$.'이고 이것은 'P and Q is τ_P and τ_Q.'로 말할 수 있다. 즉, $v(P \text{ and } Q) = \tau_{P \text{and} Q}$라고 할 때, AND 연산으로 나타내면

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \in [v,1]: \lambda = v, \\ \lambda \in [v,1]: \eta = v}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$



[그림 1]

[그림 1]로 부터 최대값의 조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \wedge \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$

단, 최대값은 $\lambda = v$인 구간 $[v, 1]$에서 η의 값들보다 크고, $\eta = v$인 구간 $[v, 1]$에서 λ의 값들보다 크다.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) = [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \max\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee$$
$$[\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max\{\mu_{\tau_P}(\eta)\}\}], \quad \forall v \in [0,1]$$

위의 그림은 특별한 경우에 대하여 설명한 것인데 $\mu_{\tau_P}(\eta)$는 η에 대한 단조증가 함수이고 $\mu_{\tau_Q}(\lambda)$는 λ에 대한 단조감소 함수이다.

$$\max_{\lambda \in [v,1]}\{\mu_{\tau_P}(\eta)\} = \mu_{\tau_P}(1),$$

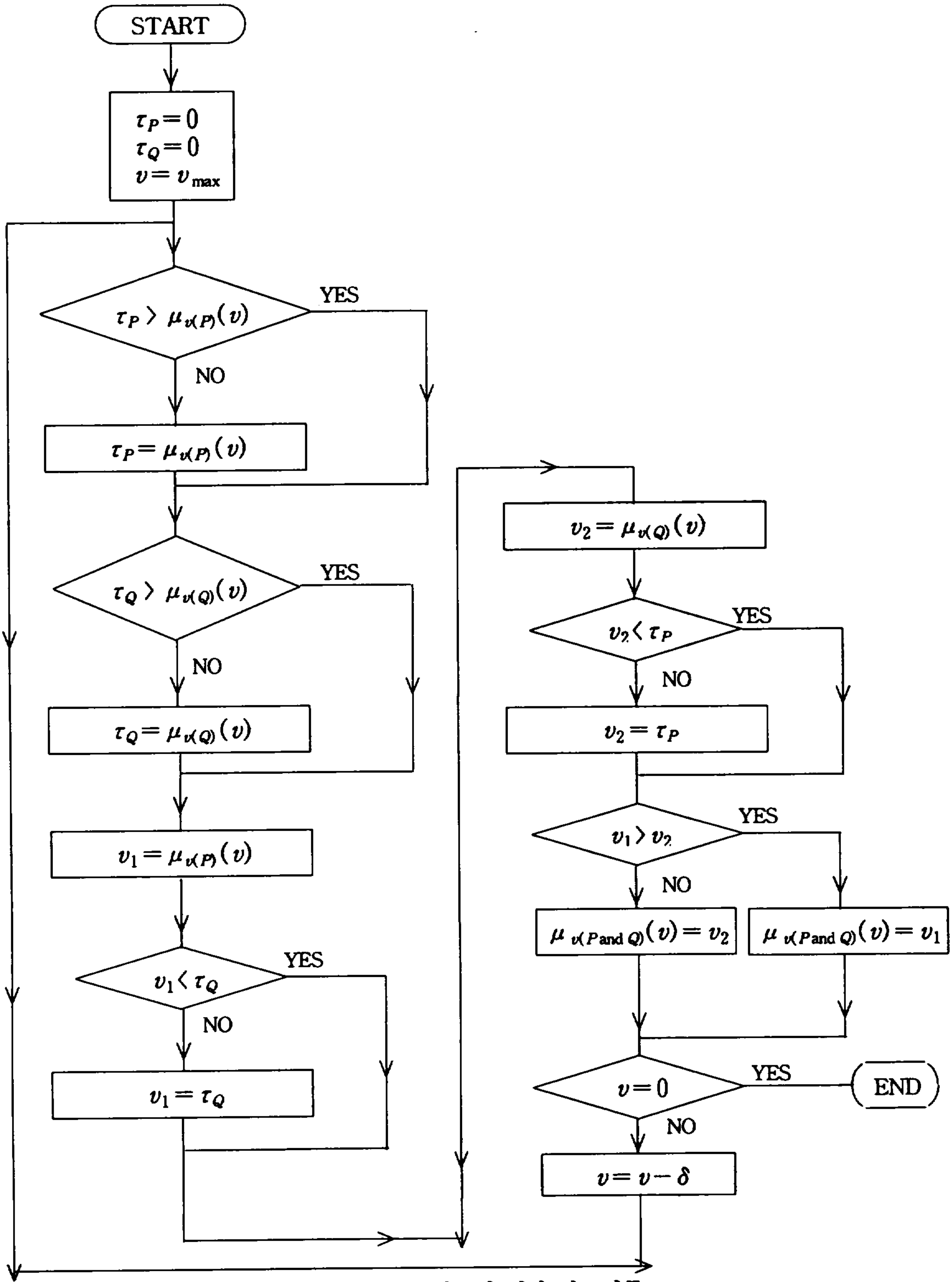
이고

$$\max_{\eta \in [v,1]}\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\} = \mu_{\tau_Q}(v)$$

그러므로 이런 경우에 대한 식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

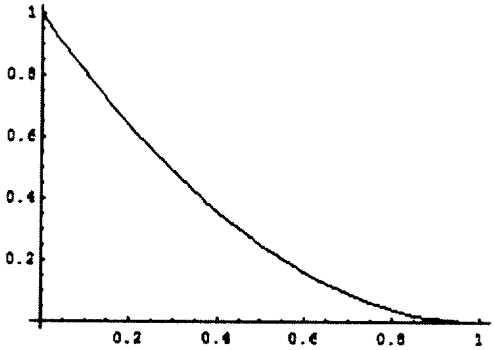
$$\begin{aligned}\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(v) &= [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \mu_{\tau_Q}(v)\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \mu_{\tau_P}(1)\}] \\ &= \mu_{\tau_Q}(v) \qquad\qquad \forall v \in [0,1]\end{aligned}$$

좀 더 일반적인 경우에서 논리곱에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 논리곱을매스메티카를 이용하여 나타내면 다음 [그림 2], [그림 3]와 같다.

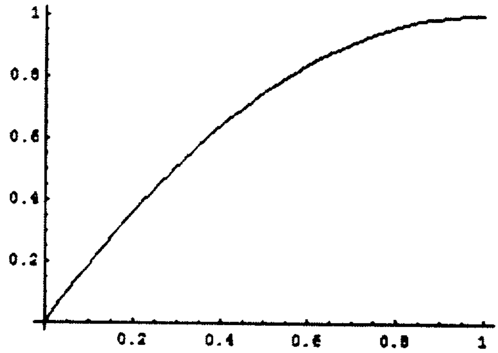


[그림 2] 논리곱에 대한 알고리즘

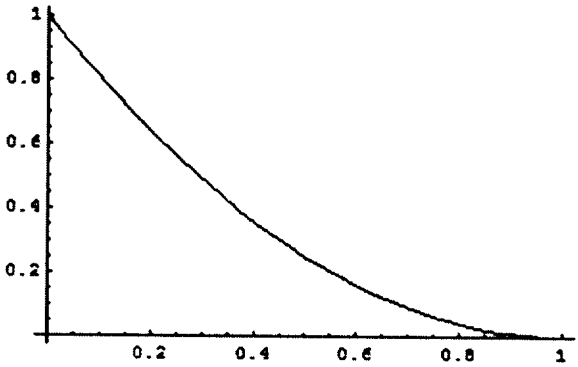
```
f[η_]:=-η^2+1
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```



```
g[λ_]:=-(λ-1)^2+1
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```



```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Min[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[f[v], g[1]],Min[f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```



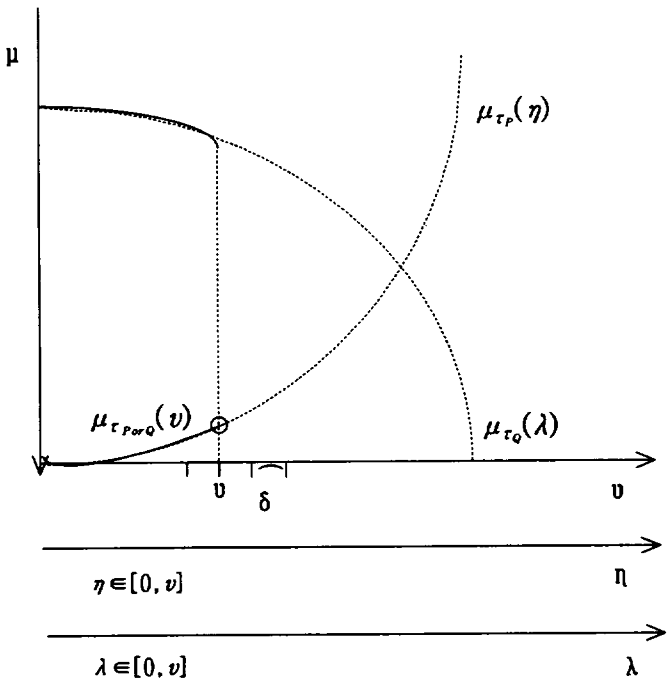
[그림 3]

4. 결　론

(1) 논리합

언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 ‘P is τ_P’와 ‘Q is τ_Q’의 논리합은 ‘P is τ_P or Q is τ_Q’ 이고 이것은 ‘P or Q is τ_P or τ_Q’로 말할 수 있다. 즉, $v(P\, or\, Q) = \tau_{P or Q}$라고 할 때, OR 연산으로 나타내면

$$\mu_{\tau_{P\,or\,Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta,\lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}, \quad \forall v \in [0,1]$$



[그림 4]

[그림 4]으로부터 다음을 알 수 있다.

$$\mu_{\tau_{P or Q}}(v) = [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \max\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee$$
$$[\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max\{\mu_{\tau_P}(\eta)\}\}], \quad \forall v \in [0, 1]$$

여기에서도 논리곱에서와 마찬가지 과정으로 식을 간단히 하면

$$\max_{\lambda \in [0, v]}\{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\} = \mu_{\tau_Q}(0),$$

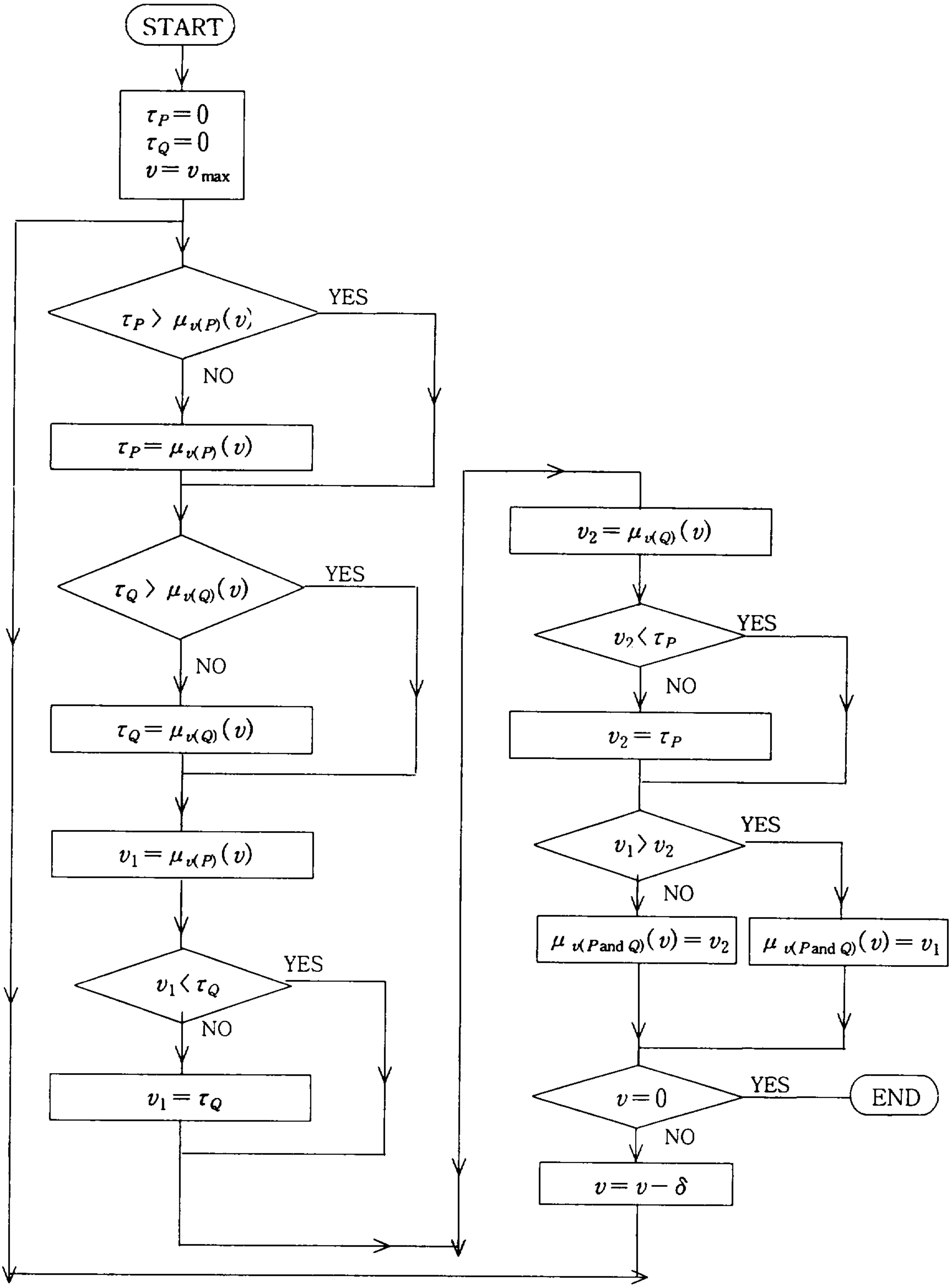
이고

$$\max_{\eta \in [0, v]}\{\mu_{\tau(P)}(\eta)\} = \mu_{\tau(P)}(v).$$

그러므로 이런 경우에 대한 식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

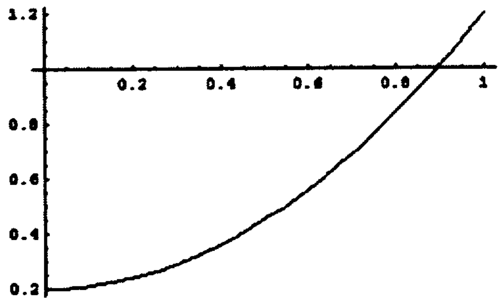
$$\mu_{\tau_{P and Q}}(v) = [\{\mu_{\tau_P}(v) \wedge \mu_{\tau_Q}(0)\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \mu_{\tau_P}(v)\}]$$
$$= \mu_{\tau_P}(v) \qquad \forall v \in [0, 1]$$

마찬가지로, 좀 더 일반적인 경우에서 논리합에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 논리합을 매스메티카를 이용하여 나타내면 다음 [그림 5], [그림 6]와 같다.

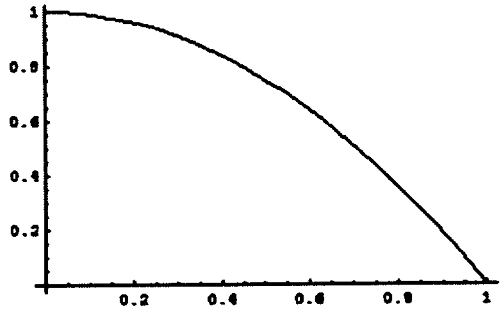


[그림 5] 논리합에 대한 알고리즘

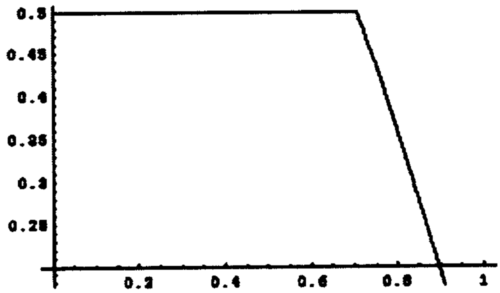
```
f[η_]:=η^2+1/5
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```




```
g[λ_]:=-λ^2 +1
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```




```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Max[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[f[v], g[0]],Min[f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```



[그림 6]

(2) 암시

"If P is τ_P then Q is τ_Q'는 '$P \rightarrow Q$ is $\tau_P \rightarrow \tau_Q$'로 생각할 수 있다. 즉,

$$\tau_{P \rightarrow Q} = \tau_{\neg P \vee Q} = \tau_{\neg P} \vee \tau_Q$$

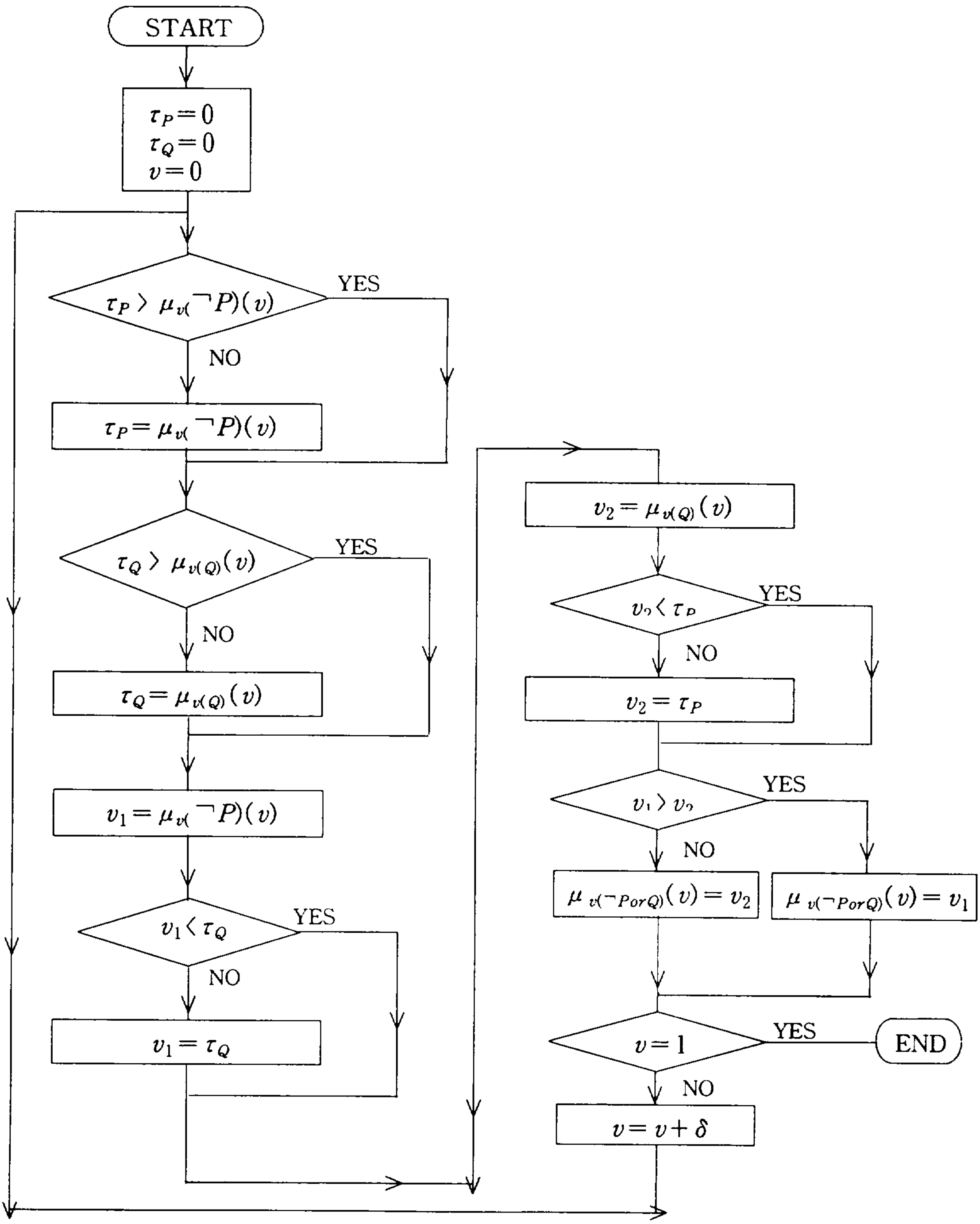
이므로 언어진리값 τ_P와 τ_Q에 대하여 '$\neg P$ is $\tau_{\neg P}$ or Q is τ_Q'는 '$\neg P$ or Q is $\tau_{\neg P}$ and τ_Q'로 말할 수 있다. 위 식을 OR 연산으로 나타내면

$$\mu_{\tau_{\neg P \, or \, Q}}(v) = \max_{\substack{\eta \vee \lambda = v \\ \eta, \lambda \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_{\neg P}}(\eta) \wedge \mu_{\tau_Q}(\lambda)\}$$

$$= [\{\mu_{\tau_{\neg P}}(v) \wedge \max_{\lambda \in [0,v]} \{\mu_{\tau_Q}(\lambda)\}\}] \vee [\{\mu_{\tau_Q}(v) \wedge \max_{\eta \in [0,v]} \{\mu_{\tau_{\neg P}}(\eta)\}\}],$$

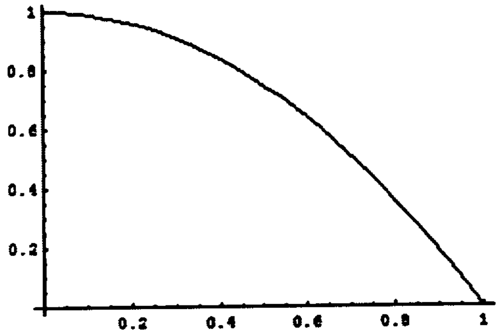
단, $\forall v \in [0,1]$

마찬가지로, 좀 더 일반적인 경우에서 암시에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 암시를 매스메티카를 이용하여 나타내면 [그림 7], [그림 8]와 같다.

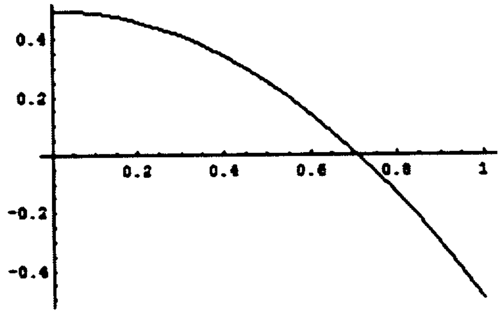


[그림 7] 암시에 대한 알고리즘

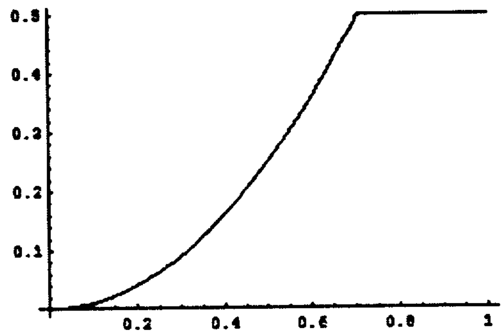
```
f[η_]:=η^2 +1
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```



```
g[λ_]:=-λ^2 +0.5
Plot[g[λ], {λ, 0 ,1}];
```



```
j[v_]:=Max[Min[f[η], g[λ]]]
v:=Max[η, λ]
j[v_]:=Max[Min[1-f[v], g[0]],Min[1-f[v], g[v]]]
Plot[j[v],{v, 0, 1}];
```



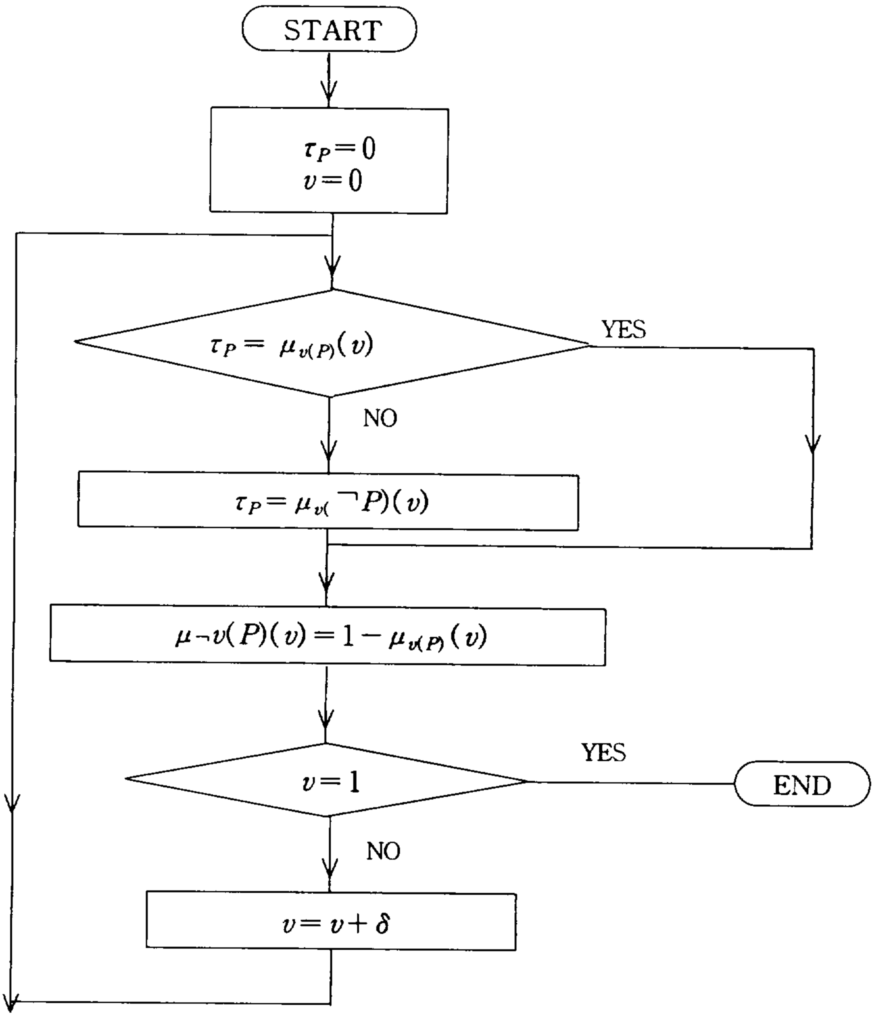
[그림 8]

(3) 부정

명제 'P is τ_P'의 부정을 'P is not τ_Q'라 하면 'P is $\neg\tau_P$'로 생각할 수 있다.

$$\mu_{\neg\tau_P}(\eta) = 1 - \mu_{\tau_P}(\eta) \qquad \eta \in [0, 1]$$

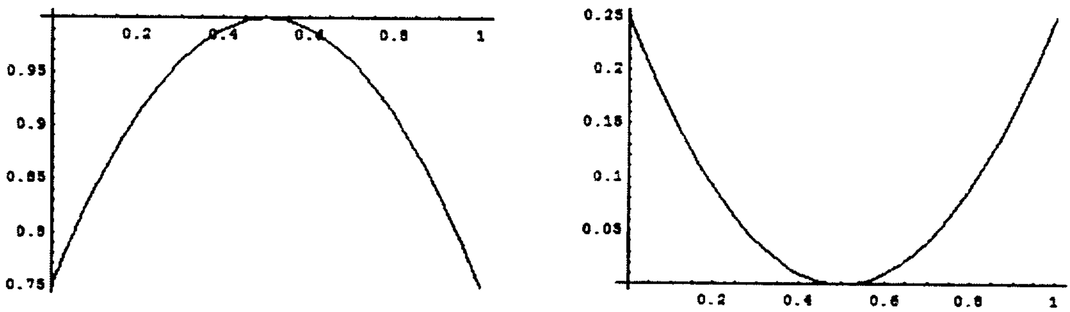
마찬가지로, 좀 더 일반적인 경우에서 부정에 대한 알고리즘과 어떤 함수에 관한 암시를 매스메티카를 이용하여 나타내면 [그림 9], [그림 10]과 같다.



[그림 9] 부정에 대한 알고리즘

```
f[η_]:=-(η-0.5)^2 +1
Plot[f[η], {η, 0, 1}];
```

```
g[η_]:=1-f[η]
Plot[g[η], {η 0, 1}];
```



[그림 10]

참 고 문 헌

[1] 송재충, Normal fuzzy probability and exponential fuzzy probability for various fuzzy numbers, 제주대학교 박사학위논문, 2005

[2] 채 석 외, 퍼지이론과 제어, 청문각, 2004

[3] J. F. Baldwin, Fuzzy logic and approximate reasoning for mixed input arguments, Research Report EM/FS4, Engineering Mathematics Dept., University of Bristol(1978)

[4] J. F. Baldwin, "Fuzzy logic and fuzzy reasoning", Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 11, 1979

[5] J. F. Baldwin and N. C. F. Guild, "Feasible algorithms for approximate reasoning using fuzzy logic", FSS, Vol. 3, (1980) 225-251

[6] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and Systems: Theory and Appli-cation, Academic Press, London, 1980

[7] A. Kaufmann, Introduction to the theory of fuzzy subsets, Academic Press, New York, 1975

[8] A. Kaufmann and M. M. Gupta, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, North-Holland, 1988

[9] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I", Information Sciences, Vol 8, (1975) 199-249

[10] L.A.Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex- systems and decision processes", IEEE Trans. Systems, Man, and Cyber-netics, Vol. SMC-3 NO, 1, (1973) 28-44

[11] L. A. Zadeh, fuzzy sets, Information and Control 8, No. 338, (1965) 338-353

[12] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer-Nijh off Publishing, 1985