

種牡牛模型을 통한 直接法과 反復法の 解의 推定

梁 榮 勳

Solution from G-inverse and Iterative Method in Sire Model

Y. H. Yang

SUMMARY

For the use in estimation of breeding values of animals, A trial to get solutions from the Iterative (SUR : Successive underrelaxation method) and the G-inverse was carried out using a sire model with 76 levels of 7 independent factors in this study. The results showed no differences between the solutions from directive(G-inverse) method and the solutions from iterative method. For the four(0.1, 0.2, 0.3, 0.35) different relaxation factors(w) to speed up the convergence to the final solution, even though the number of rounds of iteration was affected, there were no differences in the final solutions. The numbers of rounds of iteration to get final solutions from a restriction ($|b_i^{n-1} - b_i^n| < 0.0001$) for the 0.1, 0.2, 0.3 and 0.35 relaxation factors were 1729, 928, 6459, and 563 rounds respectively. It is dependent on the good iteration parameter(w) whether the convergence is speeded up or not. Since iterative method is very simple to be programized and needs relatively small computer memory, it could be useful for solving large and complex equations in animal evaluation.

I. 緒 論

過去에 家畜의 遺傳의 能力을 評價함에 있어서 理想의인 家畜模型(Animal Model)에 대하여 選好되지 못한 理由의 하나가 評價對象인 모든 家畜個體의 同時評價(父, 母, 個體, 子孫)에 따른 컴퓨터의 容量 限界(逆行列計算의 觀點)와 모든 個體를 評價함에 따른 統計的 模型의 複雜性 때문 이었으나 最近에 이르러 模型方程式을 줄이는 方法(Absorption, Reduced Model)을 利用하거나 또는 逆行列을 구하지 않고 解(Solution)를 얻는 反復的 解接近方法(Iterative Method)으로 家畜模型의 解를 구하는데 大 시금 關心對象이 되고 있다.(Quass 等, 1980 ; Blair 等, 1984 ; Van Vleck 等, 1985^a, 1985^b ;

Henderson, 1986 ; Misztal 等, 1987 ; Wiggans 等, 1987 ; Hang Pang 等, 1988).

따라서 本研究는 反復法으로 家畜模型의 解를 얻기위한 試圖로서 먼저 種牡牛模型을 設定하고 G-inverse 方法과 反復法(SUR법 : Successive Underrelaxation)을 利用한 解를 推定 比較하였다.

II. 資料 및 方法

本 研究에 利用된 資料는 後代檢定用 7個月齡 수 송아지 613頭의 體重資料를 利用하였으며 種牡牛模型을 다음과 같이 設定하고 慣行的인 方法인 G-inverse를 利用한 解와 反復法(Iterative Solution)

을 이용한 解를 推定比較하였다. 統計的 混合模型은 다음과 같다.

$$Y_{ijklmnpq} = \mu + L_i + YR_j + SE_k + AGE_l + P_m + S_p + e_{ijklm}.$$

여기서

μ 는 全體平均, L 는 地域, YR 出生年度, SE 測定月(出生季節), AGE 測定日齡群, P 母産次, S 는 種牡牛의 無作爲效果, e 는 測定値에 대한 無作爲效果로 $e \sim NID(0, I\sigma^2)$ 로 假定하였고 行列式으로 나타내면,

$$Y = Xb + Zu + e, \quad e \sim NID(0, I\sigma^2) \text{로 假定.}$$

여기서, Y : 觀測值인 $n \times 1$ 벡터

X : 알려진 固定效果의 $n \times m$ 係數行列

b : 알려지지 않은 固定效果의 $m \times 1$ 벡터

Z : 알려진 $n \times p$ 의 行列

u : 觀測할 수는 없으나 알고자하는 無

作爲效果의 벡터로 種牡牛의 後代能力豫想差를 말한다.

e : 觀測할 수 없는 無作爲 誤差 벡터.

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$\text{여기서 } G^{-1} = \sigma_e^2 / \sigma_u^2 \cdot A^{-1}$$

$$V \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \sigma_e^2$$

여기서 A^{-1} 는 種牡牛間 血緣係數의 逆行列을 말하며 本分析에서는 種牡牛間 血緣關係는 없다고 假定하고 $G^{-1}\sigma_e^2 / \sigma_u^2 = 19.88$ 로 이용하였으며 逆行列을 利用하지 않고 反復的 演算課程을 通해 解를 얻는 方法은 여러가지가 있으나 (Louis 等, 1981), 本 研究에서 同一模型에 適用된 反復法(Iterative Method)의 解는 Gauss-siedel법の一部 變形形態인 Successive Underrelaxation Method(SUR法)를

Table 1-1. Solutions for the fixed effects of body weight at 7 months of age by the iterative method with different relaxation factors and the direct method (continued)

Method Item	SUR					DIRECTIVE
	W No.Iter	0.1 1729	0.2 928	0.3 649	0.35 563	G'-INVERSE
Location	1	-18.4618	-18.4608	-18.4602	-18.4601	-18.4592
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Year	'86	2.0887	2.0898	2.0901	2.0902	2.0907
	'87	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Month	5	20.5557	20.5575	20.5583	20.5584	20.5598
	6	7.9585	7.9613	7.9627	7.6929	7.9650
	9	10.6421	10.6448	10.6462	10.6465	10.6486
	10	8.3005	8.3024	8.3034	8.3036	8.3052
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Age group	1	-40.4792	-40.4881	-40.4923	-40.4931	-40.4986
	2	-17.3339	-17.3416	-17.3455	-17.3462	-17.3510
	3	-8.0630	-8.0697	-8.0731	-8.0737	-8.0779
	4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Parity over	1-3	-10.2621	-10.2680	-10.2710	-10.2716	-10.2754
	4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Note : W, relaxation factor ; No. Iter, Number of rounds of iteration

利用하였으며 그 解는 다음과 같다.

$$b_i^{n+1} = b_i^n + w(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j^{n+1} - \sum_{j=1}^p a_{ij} b_j^n) / a_{ii}$$

여기서 W는 收斂을 加速化 시키는 弛緩係數로서 0.1, 0.2, 0.3, 0.35의 4個의 값을 適用하였고 最終解는 $|b_i^{n+1} - b_i^n| < 0.0001$ 의 制限을 加해 얻었다.

III. 結果 및 考察

7個月齡 수송아지의 體重資料를 利用하여 種牝牛 混合模型으로 7個의 獨立變數要因에 總 76水準을 포함한 聯立方程式을 G-inverse를 통한 直接法과 Iterative(SUR)방법을 통한 反復法을 利用하여 解를 얻은 結果가 Table 1-1, 1-2, 1-3,에 提示되고 있다.

두 방법 모두 各 獨立變數의 마지막 水準의 解를 '0'으로 制限(Restriction)을 加해 方程式의 解를 구했다. 反復法은 弛緩係數의 값의 變化에 따른 收斂速度를 觀測코져 弛緩係數(w)를 4種類로 設定하였고 反復的 演算에 따른 最終解는 演算進行 每 回數마다 가장 最近解와 바로 앞回에서 얻은 解를 比較하여 이들간의 解의 差異가 0.0001以下에 달할 때 反復演算을 中止하고 바로 앞 回의 解를 最終解로 決定하였다. 直接法과 反復法의 演算遂行은 IBM-PC-XT를 使用 Fortran言語로 프로그램을 作成하여 利用하였다.

分析結果를 보면 直接法의 解와 反復法의 最終解는 서로 一致함을 알 수 있으며 이들 두 方法間에 輕微한 解의 差異點은 最終解를 얻는 制限方法($|b_i^{n+1} - b_i^n| < 0.0001$ 의 原因때문인 것으로 最終解를 얻는 制限條件을 더 強化하여 解를 向해 收斂해 가는 演算回數를 늘이면 顯하는 有效數字의 자리까지 一致하는 解를 얻을 수 있을 것으로 思料된다.

SUR方法에서도 弛緩係數인 w값의 相異함으로 인한 最終解에 對한 差異點은 없는 것으로 나타났으며, w값을 0.1, 0.2, 0.3, 0.35로 設定한 結果 最終解를 얻는데 各各 1729回, 928回, 648回, 563回의 反復演算이 遂行된 바 弛緩係數 w값은 주어진 制限條件으로 最終解에 接近하는 反復 演算回數에만 影響하는

것을 알 수 있다.

이 結果에 따르면 方程式의 解를 求하는데 直接法과 反復法間에는 아무런 差異가 없으며 容量限界에 따른 逆行列計算이 不可能하거나 非能率的일 때, 統計的模型이 複雜할 때, 대형컴퓨터 使用에 따른 演算費用 負擔等이 家畜能力을 評價함에 制限條件이 될 때에는 Personal Computer를 使用하고 反復法을 利用하면 손쉽게 家畜能力을 評價할 수 있는 것으로 思料된다.

IV. 摘 要

家畜能力을 反復法으로 評價하기 위한 段階로서 수송아지 7個月齡 體重의 記錄을 利用하여 單一 種牝牛模型을 設定하고 逆行列利用法과 SUR法을 利用하여 解를 얻은 結果 다음과 같다.

1. 固定效果와 無作爲效果인 種牝牛效果를 模型에 包含하여 總 76水準의 線型聯立方程式을 두가지 方法으로 解를 얻은 結果 方法에 따른 解의 差異는 없는 것으로 나타났다.
2. 反復法(SUR)에서도 解를 向한 收斂을 加速化 시키는 弛緩係數(w)를 0.1, 0.2, 0.3, 0.35의 4種類로 設定하고 解를 얻은 結果 弛緩係數는 最終解의 差異에 아무런 影響을 주지 못했으며 다만 最終解를 얻는 制限條件 ($|b_i^{n+1} - b_i^n| < 0.0001$)에 到達하는 反復演算回數가 各各 1729回, 928回, 649回, 563回로 나타났다.
3. 反復法을 利用할 때에는 最終解를 빨리 求하는 것이 關心對象으로 大形 家畜模型의 境遇 이에 適切한 弛緩係數(w)를 利用하는 것이 解를 얻는데 따른 效率性이 決定될 것으로 思料된다.
4. 컴퓨터의 容量限界에 따른 逆行列 計算이 不可能하거나 非能率的일 때, 統計的模型이 複雜할 때, 컴퓨터 使用料負擔 等이 家畜能力 評價에 制限條件이 될 때에는 퍼스널컴퓨터를 使用 反復法을 通하면 손쉽게 評價가 可能하리라 思料된다.

Table 1—2. Solutions for the sire effects of body weight at 7 months of age by the iterative method with different relaxation factors and the direct method (continued)

Method	Item	W No.Iter	SUR				DIRECTIVE
			0.1 1729	0.2 928	0.3 649	0.35 563	G ² - INVERSE
Sire	1		-0.5336	-0.5339	-0.5341	-0.5341	-0.5343
	2		-5.2831	-5.2826	-5.2823	-5.2823	-5.2820
	3		-0.7628	-0.7637	-0.7641	-0.7641	-0.7646
	4		-0.4169	-0.4165	-0.4164	-0.4164	-0.4161
	5		-0.3437	-0.3435	-0.3435	-0.3435	-0.3435
	6		-2.4493	-2.4494	-2.4495	-2.4496	-2.4497
	7		1.7931	1.7931	1.7931	1.7931	1.7931
	8		-0.0158	-0.0158	-0.0158	-0.0158	-0.0158
	9		3.5906	3.5897	3.5894	3.5893	3.5889
	10		-2.0234	-2.0233	-2.0233	-2.0233	-2.0233
	11		-2.3325	-2.3325	-2.3325	-2.3325	-2.3325
	12		0.4788	0.4788	0.4788	0.4788	0.4788
	13		-0.7552	-0.7551	-0.7550	-0.7550	-0.7549
	14		1.1319	1.1319	1.1319	1.1319	1.1319
	15		0.6361	0.6362	0.6362	0.6362	0.6362
	16		-3.3005	-3.3004	-3.3004	-3.3004	-3.3004
	17		-0.6391	-0.6397	-0.6399	-0.6399	-0.6403
	18		3.2909	3.2909	3.2909	3.2910	3.2910
	19		-3.2931	-3.2933	-3.2935	-3.2935	-3.2937
	20		2.3410	2.3411	2.3412	2.3412	2.3413
	21		-2.6675	-2.6679	-2.6680	-2.6680	-2.6682
	22		-4.4622	-4.4626	-4.4627	-4.4628	-4.4629
	23		5.2545	5.2537	5.2534	5.2533	5.2530
	24		1.1689	1.1691	1.1691	1.1691	1.1693
	25		5.0383	5.0384	5.0384	5.0384	5.0385
	26		0.9910	0.9910	0.9910	0.9910	0.9910
	27		2.2675	2.2674	2.2674	2.2674	2.2673
	28		1.2075	1.2076	1.2076	1.2076	1.2077
	29		-2.0407	-2.0418	-2.0423	-2.0424	-2.0431
	30		3.6728	3.6728	3.6729	3.6729	3.6730

Note : W, relaxation factor ; No. Iter, Number of rounds of iteration

Table 1-3. Solutions for the sire effects of body weight at 7 months of age by the iterative method with different relaxation factors and the direct method

Method Item	W No.iter	SUR				DIRECTIVE
		0.1 1729	0.2 928	0.3 649	0.35 563	G'-INVERSE
Sire	31	3.3890	3.3870	3.3862	3.3861	3.3850
	32	2.4199	2.4199	2.4199	2.4199	2.4200
	33	3.0284	3.0279	3.0277	3.0277	3.0275
	34	1.6765	1.6764	1.6764	1.6764	1.6764
	35	0.0952	0.0958	0.0961	0.0962	0.0967
	36	3.3477	3.3475	3.3474	3.3474	3.3474
	37	-0.5227	-0.5236	-0.5240	-0.5241	-0.5247
	38	-0.8194	-0.8195	-0.8195	-0.8195	-0.8195
	39	-0.8370	-0.8382	-0.8386	-0.8387	-0.8394
	40	-6.6390	-6.6392	-6.6393	-6.6394	-6.6395
	41	-0.1738	-0.1797	-0.1803	-0.1805	-0.1813
	42	-1.2129	-1.2135	-1.2137	-1.2137	-1.2140
	43	-1.8595	-1.8586	-1.8583	-1.8582	-1.8578
	44	6.8047	6.8027	6.8023	6.8023	6.8008
	45	-0.1995	-0.2001	-0.2003	-0.2003	-0.2006
	46	-0.2396	-0.2405	-0.2409	-0.2410	-0.2415
	47	-2.0432	-2.0439	-2.0442	-2.0442	-2.0446
	48	1.6977	1.6962	1.6957	1.6955	1.6947
	49	-6.4402	-6.4409	-6.4412	-6.4412	-6.4417
	50	0.3490	0.3492	0.3493	0.3493	0.3494
	51	-1.6718	-1.6713	-1.6711	-1.6711	-1.6708
	52	0.7114	0.7117	0.7118	0.7118	0.7119
	53	0.0749	0.0756	0.0758	0.0759	0.0762
	54	-0.2086	-0.2083	-0.2082	-0.2082	-0.2080
	55	-0.7926	-0.7922	-0.7920	-0.7920	-0.7918
	56	-0.4366	-0.4361	-0.4358	-0.4358	-0.4355
	57	-0.1284	-0.1282	-0.1280	-0.1280	-0.1279
	58	-1.9891	-1.9889	-1.9888	-1.9888	-1.9887
	59	-2.3977	-2.3972	-2.3971	-2.3970	-2.3969
	60	-1.7280	-1.7297	-1.7303	-1.7305	-1.7314

Note : W, relaxation factor ; No. Iter, Number of rounds of iteration

V. 参考文献

1. Blair, H. T., and E. J. Pollak, 1984. Comparison of an animal model and equivalent reduced animal model for computational efficiency using mixed methodology. *J. Anim. Sci.* Vo. 58 : 1090~1096.
2. Henderson, C. R., 1986. Estimation of variances in animal model and reduced animal model for single traits and simple records. *J. Dairy Sci.*, 69 : 1394~1402.
3. Louis, A. H. and David M. Y., 1981. Applied iterative methods. Academic Press. INC. Orlando, Florida.
4. Misztal, I., and D. Gianola, 1987. Indirect solution of mixed model equations. *J. Dairy Sci.*, 70 : 716~723.
5. Pang Hang, Changhsin Wu, and Yuan Chang, 1988. Animal model and multiple trait BLUP applied in poultry genetic evaluation, *Poultry Sci. Proceeding XVIII World's Poultry Congress*, 325~327.
6. Quaas, R. L., and E. J. Pollak, 1980. Mixed model methodology for farm and ranch beef cattle testing programs. *J. Anim. Sci.*, 51 : 1277~1287.
7. Van Vleck L. D., and D. J. Dwyer, 1985^a. Comparison of iterative procedures for solving equation for sire evaluations. *J. Dairy Sci.*, 68 : 1006~1014.
8. Van Vleck L. D., and D. J. Dwyer, 1985^b. Successive overrelaxation, Block iteration, and method of conjugate gradients for solving equation of sires. *J. Dairy Sci.* 68 : 760~767.
9. Wiggans, G. R. and I. Misztal, 1987. Supercomputer for Animal Model Evaluation of Ayrshire milk yield, *J. Dairy Sci.* 70 : 1906~1912.