자연수 체계의 지도법에 관한 연구※

梁　成　豪*

목　　차

Ⅰ. 서　　론

수의 개념은 우리의 실생활에 없어서는 안 될 중요한 개념중의 하나이다. 그러나 수의 정의가 무엇인지를 묻는다면 수와 숫자를 구분하여 생각할 때 그 대답은 거의 불가능하다. 수는 추상적인 개념인 데에 그 어려움이 있다. 여기서 우리는 수(數 : Numbers)와 숫자(數字 : Numerals)를 명확히 구분할 필요가 있다. 빨간색이 추상적인 개념이듯이 수 역시 쉽게 정의할 수 없는 추상적인 개념이다. 그러나 숫자는 수를 나타내는 기호에 불과하다. 기호자체를 수라고 할 수 없듯이 숫자가 곧 수라고 말할 수는 없다. 종이 위에 그려놓은 어떤 표시가 숫자는 될 수 있지만 수는 아니다. 이러한 숫자는 여러가지 방법으로 표시할 수 있다. 숫자의 표시방법이 무엇이든 관계없이 수는 그 본연의 성질을 갖고 있다. 그러한 성질을 어떤 숫자로 표시하는 것이다. 수는 인간의 존재와는 별도로 존재하는 것이고 오직 인간에 의하여 그 수가 발견된 것으로 한때는 생각되어 왔었으나 적어도 숫자는 물론 수는 인간의 창조물이라는 것이 일반적인 현대적 견해이다. 수학자는 새로운 수학을 발견한다라기 보다 창조하는 것이라는 것이 오늘날의 견해이다. 우리의 실생활에서 널리 사용되는 수는 실수의 체계이다. 그런데 우리는 그러한 실수의 체계가 실제로 존재하고 있으며 그 실수들의 성질이 모두 당연한 사실로 단순하게 받아 들여지고 있다. 그러나 실수의 체계

※ 본 論文은 第6次 IBRD 교육차관 사업중 사범계대학 과학교육계 교수 해외 연수 계획에 의거 연구되었음.

* 師範大學 助敎授

의 존재성과 막연히 사실일 것이라고 믿고 있는 실수의 성질들에 대한 논리적인 추론에 의하여 증명이 필요하다는 것은 매우 중요한 일이다. 더우기 수학교육에 있어서 실수의 존재성과 실수의 여러 성질들이 당연한 사실로 또는 인정하지 않으면 안 되는 공리로 취급되고 있음을 우리는 중시하지 않으면 안되겠다. 한때 독일의 수학자 크레네카(Kronecker : 1823–1891)는 신은 인간에게 자연수를 주었고 인간이 그 나머지를 창조하였다고 말했다. 그 말이 오늘날 얼마나 진실한지는 확실치 않다. 그러나 자연수의 성질을 습득해야만 창조를 위하여 나아갈 수 있고 다른 종류의 수를 연구할 수 있음을 지적하였다. 따라서 본 연구에서는 수의 체계에서 가장 기본적인 자연수의 체계를 이론적으로 전개하여 실수의 체계로 확장하는 데에 기초자료로 활용하는 동시에 수의 체계를 지도하는 데 있어서 효과적인 지도법을 모색하여 교사교육의 자료로 활용하고자 한다.

Ⅱ. 본　　론

1. 자연수의 체계에 대한 이론적 배경

자연수는 두 가지의 기본적인 유용성을 가지고 있다. 즉 셈(Counting)과 순서를 붙이는 것(Ordering)이다. 이러한 자연수를 본 연구에서는 오늘날 가장 널리 사용되고 있는 아라비아숫자로 표시하겠다. 어떤 유한 대상들과 자연수를 하나씩 일대일 대응시키면서 하나, 둘 등과 같이 세어 나갈 수 있고 또한 첫째, 둘째 등으로 순서를 붙여 나갈 수 있다. 이러한 두 가지 관점으로부터 집합론과 명제논리만을 기본으로 하여 자연수의 기본적인 성질들을 밝혀 나아 가겠다.

정의(1) : (페아노 체계 : Peano System)

집합 P와 P에 속하는 특정한 원소 1과 P에서 P로의 함수 S가 다음의 세 조건을 만족할 때 페아노 체계라 하고 기호 (P, S, 1)로 나타낸다.

① 1은 P의 어떤 원소 x의 후자(後者 : Successor), 즉 S(x)가 될 수 없다.

② P의 서로 다른 원소는 각기 다른 후자를 갖는다.

③ P는 수학적 귀납법이 만족된다.

즉, $(\forall A)([A \subseteq P \wedge 1 \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow S(x) \in A)] \Rightarrow P = A)$.

직관에 의하면 자연수는 위 정의의 세 가지의 조건을 모두 만족 시킨다는 것을 알 수 있다. 따라서 누구나 적어도 하나의 페아노 체계가 존재할 것이라는 것을 인정할 것이다. 그러나 페아노 체계의 존재성을 일반적인 집합론의 원리로 부터 추론해 낼 수가 없다. 그러므로 페아노 체계의 존재성을 수학적인 전개에서 기본적인 가설로 받아들일 수 밖에 없다.

기본공리(2) : (Basic Axiom)

적어도 하나의 페아노 체계는 존재한다.

정리(3) : (P, S, 1)을 페아노 체계라 하면 1이 아닌 P의 모든 원소는 후자가 된다.
즉, $(\forall x \in P)(x=1 \vee (\exists y \in P)(x=S(y)))$.

증명 : 집합 $B=\{x \in P \mid x=1 \vee (\exists y \in P)(x=S(y))\}$라 하자. 그러면 명백히 $1 \in B$이다. 이제 $x \in B$라고 가정할 때 $S(x) \in B$임을 밝히면 수학적 귀납법에 의하여 $P=B$가 되어 정리는 증명된다. 즉, $(S(x)=1) \vee (\exists z \in P)(S(x)=S(z))$임을 밝히면 된다. 그런데 정의(1)-①에 의하여 $S(x) \neq 1$이다. 그러면 $z=x$라 두면 $x \in P$이고 $S(x)=S(z)$이다.

주의(4) : 정리(3)에서 1이 아닌 P의 원소는 유일한 원소의 후자가 된다.

증명 : 만일 $x=S(y)$이고 $x=S(z)$라 하면 $S(y)=S(z)$이다. 정의(1)-②에 의하여 $y=z$이다.

정리(5) : (P, S, 1)을 페아노 체계라 하면 어떤 P의 원소도 자신의 후자가 되지 못한다.
즉, $(\forall x \in P)(S(x) \neq x)$.

증명 : 집한 $B=\{x \in P \mid S(x) \neq x\}$라 하자. 그러면 정리(1)-①에 의해 $1 \in B$이다. 이제 $x \in B$라고 가정하면 $S(x) \neq x$이다. 정의(1)-②에 의하여 $S(S(x)) \neq S(x)$이다. 따라서 $S(x)$는 자신의 후자가 아니다. 따라서 $S(x) \in B$이므로 수학적 귀납법에 의하여 $P=B$이다.

정리(6) : (반복정리 : Iteration Theorem)
(P, S, 1)을 페아노 체계라 하고 W를 임의의 집합이라 하자. $c \in W$이고 $g : W \to W$라 하면 다음의 성질을 갖는 함수 $F : P \to W$는 유일하게 존재한다.
① $F(1) = c$
② 모든 원소 $x \in P$에 대하여 $F(S(x))=g(F(x))$이다.

증명 : 우선 함수의 존재성을 증명하기 전에 n-허용함수(n-admissible function)을 정의하자. P의 원소 n에 대하여 함수 $f : A \to W$를 다음의 6가지 조건을 만족할 때 n-허용함수라 한다.

① $A \subseteq P$	② $1 \in A$
③ $n \in A$	④ $(\forall u \in P)(S(u) \in A \Rightarrow u \in A)$
⑤ $f(1)=c$	⑥ $(\forall u \in P)(S(u) \in A \Rightarrow f(S(u)) = g(f(u)))$.

그러면 다음과 같은 세 가지 성질을 갖는다.
(a) 만일 f가 S(n)-허용함수이면 f는 n-허용함수이다.
왜냐면, ③을 제외한 모든 조건은 명백히 만족된다. 그리고 f가 S(n)-허용함수이므로 ③의 조건에 의하여 $S(n) \in A$이다. 따라서 ④의 조건에 의하여 $n \in A$이다.

(b) P에 속하는 임의의 원소 n에 대하여 적어도 하나의 n－허용함수가 존재한다.

왜냐면, 집합 B를 적어도 하나의 n－허용함수가 존재하는 P의 모든 원소 n의 집합이라 하자. $A=\{1\}$이고 $f(1)=c$라 두면 명백히 f는 1－허용함수이므로 $1 \in B$이다. 이제 $n \in B$라고 가정하면 n－허용함수 $f: A \to W$가 존재한다. $A^* = A \cup \{S(n)\}$라 하고 $f^*: A^* \to W$를 모든 $x \in A$에 대해서는 $f^*(x)=f(x)$ 그리고 $S(n) \notin A$일 때는 $f^*(S(n))=g(f(n))$라 정의하자. 그러면 f^*는 S(n)－허용함수가 된다. 왜냐면, 우선 $S(n) \in A$인 경우에는 $A^*=A$이므로

① $A^*=A \subseteq P$　② $1 \in A=A^*$　③ $S(n) \in A=A^*$

④ $\forall u \in P$, $S(u) \in A^*$이면 $S(u) \in A$이고 $f: A \to W$가 n－허용함수이므로 $u \in A=A^*$이다.

⑤ $f: A \to W$가 n－허용함수이므로 $1 \in A$이고 $f^*(1)=f(1)=c$이다.

⑥ $\forall u \in P$에 대하여 $S(u) \in A^*$이면 $S(u) \in A$이고 $u \in A$이다. 따라서 $f^*(S(u))=f(S(u))=g(f(u))=g(f^*(u))$이다.

다음으로 $S(n) \notin A$인 경우에는

① $A \subseteq P$이고 $S(n) \in P$이므로 $A^*=A \cup \{S(n)\} \subseteq P$이다.

② $1 \in A \subset A^*$　③ $S(n) \in \{S(n)\} \subset A^*$

④ $\forall u \in P$에 대해서 $S(u) \in A^*$이면 $S(u)=S(n)$이거나 $S(u) \in A$이다. 만일 $S(u)=S(n)$이면 $u=n \in A \subset A^*$이다. 만일 $S(u) \in A$이면 $f: A \to W$가 n－허용함수이므로 $u \in A$이다. 따라서 $u \in A \subset A^*$이다.

⑤ $f: A \to W$가 n－허용함수이므로 $1 \in A$이고 $f^*(1)=f(1)=c$이다. 만일 $S(u)=S(n)$이면 $u=n \in A$이다. 따라서 $f^*(S(u))=f^*(S(n))=g(f(n))=g(f^*(n))=g(f^*(u))$이다. 만일 $S(u) \in A$이면 $u \in A$이므로 $f^*(S(u))=f(S(u))=g(f(u))=g(f^*(u))$이다.

그러므로 f^*는 S(n)－허용함수이다. 즉, S(n)－허용함수가 존재하므로 $S(n) \in B$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $B=P$이다.

(c) 만일 f와 h가 모두 n－허용함수이면 $f(n) = h(n)$이다.

왜냐면, 집합 $Y=\{n \in P \mid$ 임의의 n－허용함수 f와 h에 대해서 $f(n)=h(n)$이다$\}$라 하면 $f(1)=c=h(1)$이므로 $1 \in Y$이다. 이제 $n \in Y$이고 f와 h가 모두 S(n)－허용함수라 하면 (a)의 성질에 의하여 f와 h는 모두 n－허용함수이기도 하다. 그리고 $n \in Y$이므로 $f(n)=h(n)$이다. 따라서 ⑥의 조건에 의하여 $f(S(n))=g(f(n))=g(h(n))=h(S(n))$이므로 $S(n) \in Y$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 $P=Y$이다.

이제 함수 $F: P \to W$의 존재성을 증명하자. 모든 $n \in P$에 대해서 (b)의 성질에 의하여 n－허용함수 f가 존재한다. 따라서 모든 $n \in P$에 대해서 $F(n)=f(n)$로 정의하자. 이때 (c)의 성질에 의하여 F(n)의 값은 n－허용함수 f의 선택에 관계없이 유일하게 결정되므로 F는 정의가능하다. 그리고 명백하게 F의 정의구역은 P이고 공역은 W이다. 그러면 $F(1)=f(1)=c$ (단, f는 어떤 1－허용함수이다.)이다. 그리고 $F(S(n))= f(S(n))$이고 f는 어떤 S(n)－허용함수이므로 $S(n) \in A$이고 ⑥의 성질에 의하여 $f(S(n))=g(f(n))$이다. 그리고 (a)의 성질에 의하여 f는 n－허용함수이기도 하므로 $F(n)=f(n)$이다. 따라서 $F(S(n))=f(S(n))=g(f(n))=g(F(n))$이다. 그러므로 F는 정리의 조건을 모

두 만족시킨다.

마지막으로 F의 유일성을 증명하자. P에서 W로의 함수 F_1과 F_2가 모두 정리의 조건을 만족시킨다고 하자. 그리고 $K=\{n \in P \mid F_1(n)=F_2(n)\}$라 하면 $F_1(1)=c=F_2(1)$이므로 $1 \in K$이다. $n \in K$라고 가정할 때 $F_1(n)=F_2(n)$이므로 $F_1(S(n))=g(F_1(n))=g(F_2(n))=F_2(S(n))$이다. 즉, $S(n) \in K$이므로 수학적 귀납법에 의하여 $P=K$이다. 따라서 $F_1=F_2$이다.

정의(7) : $\mathcal{P}=(P, S, 1)$과 $\mathcal{P}^*=(P^*, S^*, 1^*)$를 두 개의 페아노 체계라 하자. P에서 P^*로의 전단사 함수 H가 존재하여 다음의 조건을 만족시킬 때 두 개의 페아노 체계 $\mathcal{P}$와 $\mathcal{P}^*$는 서로 동형(同形 : Isomorphic)이라 하고 함수 H를 동형사상(同形寫像 : Isomorphism)이라 한다.

① $H(1)=1^*$

② 모든 $x \in P$에 대하여 $H(S(x))=S^*(H(x))$이다.

정리(8) : 임의의 두 개의 페아노 체계는 서로 동형이다.

증명 : $\mathcal{P}=(P, S, 1)$과 $\mathcal{P}^*=(P^*, S^*, 1^*)$를 임의의 두 개의 페아노 체계라 하고 $W=P^*$, $c=1^*$, $g=S^*$라 두면 반복정리(6)에 의하여 $F(1)=c=1^*$이고 모든 $x \in P$에 대하여 $F(S(x))=g(F(x))=S^*(F(x))$을 만족하는 함수 $F : P \to P^*$가 유일하게 존재한다. 이제 F가 전단사 함수임을 보이면 정리의 증명은 완전하게 된다. 먼저 F가 전사함수임을 보이기 위해서 집합 B를 F의 치역이라하자. 그러면 $F(1)=1^*$이므로 $1^* \in B$이다. $z \in B$라 가정하면 적당한 $x \in P$에 대해서 $z=F(x)$이다. 따라서 $S^*(z)=S^*(F(x))=F(S(x))$이다. 즉, $S^*(z) \in B$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $B=P^*$이다. 즉, F는 전사함수이다. 마지막으로 F가 단사함수임을 보이기 위하여 집합 $A=\{x \in P \mid (\forall y \in P)(y \neq x \Rightarrow F(y) \neq F(x)\}$라 하자. 그리고 $1 \in A$임을 보이기 위해서 $y \in P$이고 $y \neq 1$라고 가정하면 정리(3)에 의하여 $y=S(u)$가 되는 $u \in P$가 존재한다. 따라서 $F(y)=F(S(u))=S^*(F(u)) \neq 1^* = F(1)$이다. 즉, $1 \in A$이다. 이제 $x \in A$라고 가정하면 임의의 $y \in P$에 대해서 $y \neq x$일 때 $F(y) \neq F(x)$이다. 그러면 $S(x) \in A$임을 보이기 위해서 $y \in P$이고 $y \neq S(x)$라고 가정하자. 그러면 $y=1$이거나 $y \neq 1$이다. 만일 $y=1$이면 $F(S(x))=S^*(F(x)) \neq 1^*=F(1)=F(y)$이므로 $F(S(x)) \neq F(y)$이다. 만일 $y \neq 1$이면 정리(3)에 의하여 적당한 $u \in P$에 대하여 $y=S(u)$이다. $S(u)=y \neq S(x)$이므로 $u \neq x$이다. 귀납법의 가정에 의하여 $F(u) \neq F(x)$이다. 그러면 $S^*(F(u)) \neq S^*(F(x))$이다. 따라서 $F(S(x))=S^*(F(x)) \neq S^*(F(u))=F(S(u))=F(y)$이므로 $S(x) \in A$이다. 수학적 귀납법에 의하여 $A=P$이다. 즉, F는 단사함수이다.

정의(9) : (P, S, 1)을 페아노 체계라 할 때 P의 원소들을 자연수(自然數 : Natural numbers)라 하고 $S(1)=2$, $S(2)=3$, $S(3)=4$, ……등으로 나타내기로 한다.

주의(10) : 앞으로는 (P, S, 1)이 페아노 체계를 이룬다는 말을 생략하고 기호 P, S, 1을 쓰기

로 한다.

정리(11) : (합에 대한 정리)
다음과 같은 성질을 갖는 P위에서의 이항연산 +는 유일하게 존재한다.
① 모든 $x \in P$에 대하여 $x+1=S(x)$이다.
② 모든 $x, y \in P$에 대하여 $x+S(y)=S(x+y)$이다.
(여기서 $+(x,y)$대신에 관습적인 기호 $x+y$를 쓰기로 한다.)

증명 : 정리(6)을 적용하기 위해서 임의의 특정한 원소 $x \in P$에 대하여 $W=P$, $c=S(x)$, $g=S$라 두면 유일한 함수 $F : P \to P$가 존재하여 $F(1)=c=S(x)$이고 모든 $y \in P$에 대하여 $F(S(y))=g(F(y))=S(F(y))$를 만족시킨다. 여기서 F는 특정한 원소 $x \in P$에 의해서 결정됐기 때문에 함수 F를 f_x로 표시하기로 하자. 그러면 $f_x(1)=S(x)$이고 모든 $y \in P$에 대하여 $f_x(S(y))=S(f_x(y))$이다. 이제 이항연산 +를 모든 $x \in P$와 모든 $y \in P$에 대하여 $x+y=f_x(y)$로 정의하면 $x+1=f_x(1)=S(x)$이고 $x+S(y)=f_x(S(y))=S(f_x(y))=S(x+y)$이다. 이제 이항연산 +의 유일성을 증명하기 위해서 또 다른 이항연산 h가 존재하여 모든 $x, y \in P$에 대해서 $h(x,1)=S(x)$이고 $h(x,S(y))=S(h(x,y))$라고 가정하자. 임의의 $x \in P$에 대해서 $B=\{y \in P \mid h(x,y)=x+y\}$라 하면 $h(x,1)=S(x)=x+1$이므로 $1 \in B$이다. $y \in B$라고 가정하면 $h(x,y)=x+y$이다. 그러면 $h(x. S(y))=S(h(x.y))=S(x+y)=x+S(y)$이므로 $S(y) \in B$이다. 수학적 귀납법에 의하여 $P=B$이다. 즉, $h=+$이다.

정의(12) : 정리(11)에서 이항연산 +를 P위에서의 합의 연산(Additive operation)이라 하고 $x+y$를 x와 y의 합(合 : Sum)이라 한다.

예(13) :

① $2+2=2+S(1)$	(2의 정의)
$=S(2+1)$	(정리(11)−②의 성질)
$=S(S(2))$	(정리(11)−①의 성질)
$=S(3)$	(3의 정의)
$=4$	(4의 정의)
② $4+3=4+S(2)$	(3의 정의)
$=S(4+2)$	(정리(11)−②의 성질)
$=S(4+S(1))$	(2의 정의)
$=S(S(4+1))$	(정리(11)−②의 성질)
$=S(S(S(4)))$	(정리(11)−①의 성질)
$=S(S(5))$	(5의 정의)
$=S(6)$	(6의 정의)
$=7$	(7의 정의)

정리(14) : (합의 연산에 대한 결합법칙)
모든 $x,y,z \in P$에 대하여 $x+(y+z)=(x+y)+z$이다.

증명 : 임의의 $x,y \in P$에 대하여 집합 $A=\{z \in P \mid x+(y+z)=(x+y)+z\}$라 하자. $x+(y+1)=x+S(y)=S(x+y)=(x+y)+1$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $z \in A$라 가정하면 $x+(y+z)=(x+y)+z$이다. 그러면 $x+(y+S(z))=x+S(y+z)=S(x+(y+z))=S((x+y)+z)=(x+y)+S(z)$ 이므로 $S(z) \in A$이다. 따라서 $P=A$이다.

주의(15) : 정리(14)를 이용하면
$((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)=(a+(b+c))+d=a+((b+c)+d)=a+(b+(c+d))$임을 보일 수 있다. 따라서 위의 합들을 괄호를 모두 생략하고 $a+b+c+d$로 써도 무방하다.

보조정리(16) :
① 모든 $x \in P$에 대해서 $x+1=1+x$이다.
② 모든 $x,y \in P$에 대해서 $S(y)+x=S(y+x)$이다.

증명 : ① 집합 $A=\{x \in P \mid x+1=1+x\}$라 하자. 그러면 $1+1=1+1$이므로 $1 \in A$이다. $x \in A$라 가정하면 $S(x)+1=(x+1)+1=(1+x)+1=1+(x+1)=1+S(x)$이다. 즉, $S(x) \in A$이다. 따라서 $A=P$이다.
② $S(y)+x=(y+1)+x=y+(1+x)=y+(x+1)=(y+x)+1=S(y+x)$.

정리(17) : (합의 연산에 대한 교환법칙)
모든 $x,y \in P$에 대하여 $x+y=y+x$이다.

증명 : 임의의 $x \in P$에 대하여 집합 $A=\{y \in P \mid x+y=y+x\}$라 하자. 보조정리(16)-①에 의하여 $x+1=1+x$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $y \in A$라 가정하면 $x+S(y)=S(x+y)=S(y+x)=S(y)+x$이다. 따라서 $S(y) \in A$이다. 즉, $A=P$이다.

정리(18) : (합의 연산에 대한 소거율)
임의의 $x,y,z \in P$에 대하여 $x+z=y+z$이면 $x=y$이다.

증명 : 임의의 원소 $x,y, \in P$에 대해서 집합 $A=\{z \in P \mid x+z=y+z$이면 $x=y$이다$\}$라 하자. 그러면 $x+1=y+1$일 때 즉, $S(x)=S(y)$일 때 $x=y$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $z \in A$이고 $x+S(z)=y+S(z)$라 가정하면 $S(x+z)=S(y+z)$이므로 $x+z=y+z$이다. 그리고 $z \in A$이므로 $x=y$이다. 따라서 $S(z) \in A$이다. 즉, $A=P$이다.

정리(19) : 모든 원소 $x,y \in P$에 대해서 $y \neq x+y$이다.

증명 : 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 집합 $A = \{y \in P \mid y \neq x+y\}$라 하면 $1 \neq S(1) = x+1$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $y \in A$라 가정하며 $y \neq x+y$이다. 따라서 $S(y) \neq S(x+y)$이다. 즉, 보조정리(16)-②에 의하여 $S(y) \neq x+S(y)$이다. 따라서 $S(y) \in A$이다. 즉, $A=P$이다.

정리(20) : 합의 연산에 대한 3분법칙(三分法則 : Trichotomy Law)

임의의 두 원소 $x, y \in P$에 대해서 다음의 세 경우중 반드시 어느 하나의 경우이다.

① $x=y$이다.

② 적당한 원소 $u \in P$에 대해서 $x=y+u$이다.

③ 적당한 원소 $v \in P$에 대해서 $y=x+v$이다.

더우기 위 경우중 어느 두 가지의 경우가 동시에 만족될 수 없으며 ②와 ③경우의 u와 v는 유일하게 결정된다.

증명 : 우선 정리의 후반부를 먼저 증명하자, 만일 ①과 ②가 동시에 만족된다면 $x=y+u=x+u$가 되어 정리(19)에 모순이다. 만일 ①과 ③이 동시에 만족된다면 $y=x+v=y+v$가 되어 역시 정리(19)에 모순이다. 만일 ②와 ③이 동시에 만족된다면 $x=y+u=(x+v)+u=x+(u+v)$가 되어 역시 정리(19)에 모순이다. 따라서 위 세가지의 경우중 두 가지 이상의 경우를 만족할 수 없다.

다음으로 ②와 ③의 경우의 u와 v에 대한 유일성을 증명하자. 만일 적당한 두 원소 $u_1, u_2 \in P$에 대해서 $x=y+u_1$이고 $x=y+u_2$라 하면 $y+u_1=x=y+u_2$이므로 정리(18)에 의해서 $u_1=u_2$이다. v에 대해서도 마찬가지로 비슷하게 증명할 수 있다.

마지막으로 위 세 가지의 경우중 어느 한 가지 경우는 반드시 만족됨을 증명하자. 임의의 원소 $y \in P$에 대해서 집합 A를 위 세 가지 경우중 어느 한 경우를 반드시 만족시키는 원소 x들의 집합이라 하자, 먼저 $1 \in A$임을 밝히자. 그런데 $1=y$이거나 $1 \neq y$이다. 만약 $1=y$라면 명백히 $1 \in A$이고, 만약 $1 \neq y$라면 정리(3)에 의하여 어떤 $v \in P$에 대해서 $y=S(v)$이다. 따라서 $y=S(v)=v+1=1+v$이다. 즉, $1 \in A$이다. 그러므로 어느 경우이나 $1 \in A$이다. 이제 $x \in A$라고 가정하면 $x=y$이거나 $x=y+u$이거나 $y=x+v$이다. 만약 $x=y$라면 $S(x)=S(y)=y+1$이 되어 $S(x)$와 y는 ②의 경우를 만족시키므로 $S(x) \in A$이다. 만약 $x=y+u$이면 $S(x)=S(y+u)=y+S(u)$가 되어 $S(x)$와 y는 ②의 경우를 만족시키므로 $S(x) \in A$이다. 만약 $y=x+v$이면 다시 $v=1$인 경우와 $v \neq 1$인 경우로 나누어 생각하면, $v=1$인 경우는 $y=x+1=S(x)$가 되어 $S(x)$와 y는 ①의 경우를 만족시키므로 $S(x) \in A$이다. 또 $v \neq 1$인 경우는 적당한 $w \in P$에 대하여 $v=S(w)$이므로 $y=x+v=x+S(w)=S(x+w)=S(x)+w$가 되어 $S(x)$와 y는 ③의 경우를 만족시키므로 $S(x) \in A$이다. 따라서 모든 경우에 대해서 $S(x) \in A$이다. 즉, $A=P$이다.

정리(21) : (곱에 대한 정리)

다음과 같은 성질을 갖는 P위에서의 이항연산 ×가 유일하게 존재한다.

① 모든 원소 $x \in P$에 대해서 $x \times 1 = x$이다.

② 모든 원소 $x, y \in P$에 대해서 $x \times S(y) = (x \times y) + x$이다.

(여기서 $\times(x,y)$ 대신에 관습적인 기호 $x \times y$를 쓰기로 한다.)

증명 : 정리(6)를 적용하기 위해서 임의의 특정한 원소 $x \in P$에 대하여 $W=P$, $c=x$라 두고 함수 $g : P \to P$를 모든 원소 $u \in P$에 대해서 $g(u)=u+x$로 정의하자. 그러면 유일한 함수 $F : P \to P$가 존재하여 $F(1)=c=x$이고 모든 원소 $y \in P$에 대하여 $F(S(y))=g(F(y))=F(y)+x$를 만족시킨다. 여기서 함수 F를 특정한 원소 $x \in P$에 의하여 결정됐기 때문에 ψ_x로 표시하기로 하자. 그러면 $\psi_x(1)=x$이고 모든 원소 $y \in P$에 대해서 $\psi_x(S(y))=\psi_x(y)+x$이다. 이제 이항연산 ×를 모든 원소 $x, y \in P$에 대하여 $x \times y = \psi_x(y)$로 정의하면 $x \times 1 = \psi_x(1) = x$이고 $x \times S(y) = \psi_x(S(y)) = \psi_x(y) + x = (x \times y) + x$이다. 이항연산 ×의 유일성을 증명하기 위해서 또 다른 이항연산 θ가 존재하여 모든 원소 $x, y \in P$에 대해서 $\theta(x,1)=x$이고 $\theta(x,S(y))=\theta(x,y)+x$라고 가정하자. 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 $B=\{y \in P \mid \theta(x,y)=x \times y\}$라 하면 $\theta(x,1)=x=x \times 1$이므로 $1 \in B$이다. 이제 $y \in B$라 가정하면 $\theta(x,S(y))=\theta(x,y)+x=(x \times y)+x=x \times S(y)$이므로 $S(y) \in B$이다. 따라서 $B=P$이다. 즉, $\theta = \times$이다.

정의(22) : 정리(21)에서의 이항연산 ×를 P위에서의 곱의 연산(Multiplicative operation)이라 하고 $x \times y$를 x와 y의 곱(product)이라 한다.

예(23) :

① $2 \times 2 = 2 \times S(1)$	(2의 정의)
$= (2 \times 1) + 2$	(정리(21)－②의 성질)
$= 2 + 2$	(정리(21)－①의 성질)
$= 4$	(예(13)－①의 결과)
② $4 \times 3 = 4 \times S(2)$	(3의 정의)
$= (4 \times 2) + 4$	(정리(21)－②의 성질)
$= (4 \times S(1)) + 4$	(2의 정의)
$= ((4 \times 1) + 4) + 4$	(정리(21)－②의 성질)
$= (4 + 4) + 4$	(정리(21)－①의 성질)
$= 8 + 4$	(4+4의 결과)
$= 12$	(8+4의 결과)

정리(24) : (배분법칙)

모든 원소 $x, y, z \in P$에 대해서 다음이 만족된다.

① $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

② $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$

증명 : ① 임의의 원소 $x,y\in P$에 대해서 집합 $B=\{z\in P \mid x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)\}$라 하면 $x\times(y+1)=x\times S(y)=(x\times y)+x=(x\times y)+(x\times 1)$이므로 $1\in B$이다. 이제 $z\in B$라 하면 $x\times(y+S(z))=x\times S(y+z)=(x\times(y+z))+x=((x\times y)+(x\times z))+x=(x\times y)+((x\times z)+x)=(x\times y)+(x\times S(z))$이므로 $S(z)\in B$이다. 따라서 $B=P$이다.

② 임의의 원소 $x,y\in P$에 대해서 집합 $A=\{z\in P \mid (x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)\}$라 하면 $(x+y)\times 1=x+y=(x\times 1)+(y\times 1)$이므로 $1\in A$이다. 이제 $z\in A$라 가정하면 $(x+y)\times S(z)=((x+y)\times z)+(x+y)=((x\times z)+(y\times z))+(x+y)=((x\times z)+x)+((y\times z)+y)=(x\times S(z))+(y\times S(z))$이므로 $S(z)\in A$이다. 따라서 $A=P$이다.

보조정리(25) : 모든 원소 $x\in P$에 대해서 $1\times x=x\times 1$이다.

증명 : 집합 $A=\{x\in P \mid 1\times x=x\times 1\}$라 하면 $1\times 1=1=1\times 1$이므로 $1\in A$이다. 이제 $x\in A$라 가정하면 $1\times S(x)=(1\times x)+1=(x\times 1)+1=x+1=S(x)=S(x)\times 1$이므로 $S(x)\in A$이다. 따라서 $A=P$이다.

정리(26), : (이항연산 ×에 대한 교환법칙)
모든 $x,y\in P$에 대하여 $x\times y=y\times x$이다.

증명 : 임의의 원소 $x\in P$에 대하여 집합 $A=\{y\in P \mid x\times y=y\times x\}$라 하면 보조정리(25)에 의해서 $1\in A$이다. 이제 $y\in A$가 가정하면 $x\times S(y)=(x\times y)+x=(y\times x)+x=(y\times x)+(x\times 1)=(y\times x)+(1\times x)=(y+1)\times x=S(y)\times x$이므로 $S(y)\in A$이다. 따라서 $A=P$이다.

정리(27) : (이항연산 ×에 대한 결합법칙)
모든 원소 $x,y,z\in P$에 대하여 $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$이다.

증명 : 임의의 원소 $x,y\in P$에 대하여 집합 $B=\{z\in P \mid x\times(y\times z)=(x\times y)\times z\}$라 하면 $x\times(y\times 1)=x\times y=(x\times y)\times 1$이므로 $1\in B$이다. 이제 $z\in B$라 가정하면 $x\times(y\times S(z))=x\times((y\times z)+y)=(x\times(y\times z))+(x\times y)=((x\times y)\times z)+(x\times y)=(x\times y)\times S(z)$이므로 $S(z)\in B$이다. 따라서 $B=P$이다.

정리(28) : (이항연산 ×에 대한 소거율)
모든 원소 $x,y,z\in P$에 대하여 $x\times z=y\times z$이면 $x=y$이다.

증명 : $x\times z=y\times z$이고 $x\neq y$라고 가정하자. 그러면 정리(20)에 의하여 $x\neq y$이므로 적당한 원소 $u\in P$에 대해서 $x=y+u$이거나 아니면 적당한 원소 $v\in P$에 대해서 $y=x+v$이다. 만일 $x=y$

$+u$라면 $x\times z=y\times z \Rightarrow (y+u)\times z=y\times z \Rightarrow (y\times z)+(u\times z)=y\times z$가 되어 정리(19)에 모순이다. 만일 $y=x+v$라면 $x\times z=y\times z \Rightarrow x\times z=(x+v)\times z \Rightarrow x\times z=(x\times z)+(v\times z)$가 되어 정리(19)에 모순이다.

정리(29) : (지수연산)

다음과 같은 성질을 갖는 P위에서의 이항연산 τ가 유일하게 존재한다.

① 모든 원소 $x\in P$에 대하여 $\tau(x,1)=x$이다.

② 모든 원소 $x,y\in P$에 대하여 $\tau(x,S(y))=\tau(x,y)\times x$이다.

증명 : 정리(6)을 적용하기 위해서 임의의 특정한 원소 $x\in P$에 대하여 $W=P$, $c=x$라 두고 함수 $g:P\rightarrow P$를모든 원소 $u\in P$에 대해서 $g(u)=u\times x$로 정의하자. 그러면 함수 $F:P\rightarrow P$가 유일하게 존재하여 $F(1)=c=x$이고 모든 원소 $y\in P$에 대하여 $F(S(y))=g(F(y))=F(y)\times x$를 만족시킨다. 여기서 함수 F를 특정한 원소 $x\in P$에의하여 결정됐기 때문에 h_x로 표시하기로 하자. 그러면 $h_x(1)=x$이고 모든 원소 $y\in P$에 대해서 $h_x(S(y))=h_x(y)\times x$이다. 이제 이항연산 τ를 모든 원소 $x,y\in P$에 대해서 $\tau(x,y)=h_x(y)$로 정의하면 $\tau(x,1)=h_x(1)=x$이고 $\tau(x,S(y))=h_x(S(y))=h_x(y)\times x=\tau(x,y)\times x$이다. 이제 이항연산 τ의 유일성을 증명하기 위해서 또 다른 이항연산 μ가 존재하여 모든 원소 $x,y\in P$에 대해서 $\mu(x,1)=x$이고 $\mu(x,S(y))=\mu(x,y)\times x$라고 가정하자. 임의의 원소 $x\in P$에 대해서 집합 $B=\{y\in P \mid \tau(x,y)=\mu(x,y)\}$라 하면 $\tau(x,1)=x=\mu(x,1)$이므로 $1\in B$이다. 이제 $y\in B$라고 가정하면 $\tau(x,S(y))=\tau(x,y)\times x=\mu(x,y)\times x=\mu(x,S(y))$이므로 $S(y)\in B$이다. 즉, $B=P$이다.

주의(30) : 정리(29)에서 $\tau(x,y)$대신에 x^y로 쓰기로 한다. 그러면 $x^1=x$이고 $x^{y+1}=x^y\times x$이다.

더우기 $x^2=x^{1+1}=x^1\times x=x\times x$

$x^3=x^{2+1}=x^2\times x=(x\times x)\times x$

$x^4=x^{3+1}=x^3\times x=((x\times x)\times x)\times x$ 등으로 나타난다.

정리(31) : 모든 원소 $x,y,z\in P$에 대해서 다음을 만족한다.

① $1^x=1$ ② $x^{y+z}=x^y\times x^z$

③ $(x^y)^z=x^{y\times z}$ ④ $(x\times y)^z=x^z\times y^z$

증명 : ① 집합 $A=\{x\in P \mid 1^x=1\}$라하면 $1^1=1$이므로 $1\in A$이다. $x\in A$라 가정하면 $1^{s(x)}=1^{x+1}=1^x\times 1=1\times 1=1$이므로 $S(x)\in A$이다. 즉, $A=P$이다.

② 임의의 원소 $x,y,\in P$에 대하여 집합 $B=\{z\in P \mid x^{y+z}=x^y\times x^z\}$라 하면 $x^{y+1}=x^y\times x=x^y\times x^1$이므로 $1\in B$이다. $z\in B$라 가정하면 $x^{y+s(z)}=x^{s(y+z)}=x^{y+z}\times x=(x^y\times x^z)\times x=x^y\times(x^z\times x)=x^y\times x^{s(z)}$이므로 $S(z)\in B$이다. 즉, $B=P$이다.

③ 임의의 원소 $x,y \in P$에 대하여 집합 $C=\{z \in P \mid (x^y)^z = x^{y \times z}\}$라 하면 $(x^y)^1 = x^y = x^{y \times 1}$이므로 $1 \in C$이다. $z \in C$라 가정하면 $(x^y)^{s(z)} = (x^y)^z \times (x^y) = x^{y \times z} \times x^y = x^{(y \times z)+y} = x^{y \times s(z)}$이므로 $S(z) \in C$이다. 즉, $C=P$이다.

④ 임의의 원소 $x,y \in P$에 대하여 집합 $D=\{z \in P \mid (x \times y)^z = x^z \times y^z\}$라 하면 $(x \times y)^1 = x \times y = x^1 \times y^1$이므로 $1 \in D$이다. $z \in D$라 가정하면 $(x \times y)^{s(z)} = (x \times y)^z \times (x \times y) = (x^z \times y^z) \times (x \times y) = (x^z \times x) \times (y^z \times y) = x^{s(z)} \times y^{s(z)}$이므로 $S(z) \in D$이다. 즉, $D=P$이다.

정리(20)에 의하면 임의의 서로 다른 원소 $x,y \in P$에 대해서 $x=y+u$이거나 $y=x+v$(단, u, v는 P에 속하는 어떤 원소)이므로 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

정의(32) : 서로 다른 임의의 원소 $x,y \in P$에 대해서 적당한 원소 z가 존재하여 $y=x+z$일 때 x는 y를 앞선다(x는 y보다 작다). 또 y는 x를 따른다(y는 x보다 크다.) 라고 하고 $x<y$ 또는 $y>x$로 나타낸다.

정의(33) : 임의의 두 원소 $x,y \in P$에 대해서 다음과 같이 정의한다.

① $x<y$의 부정은 $x \nless y$.

② $x<y$이거나 $x=y$일 때 $x \leq y$.

③ $x \leq y$의 부정은 $x \nleq y$.

정리(34) : (<에 대한 3분법칙)

임의의 원소 $x,y \in P$에 대하여 $x<y$이거나 $x=y$이거나 $y<x$중 꼭 한 가지의 경우만이 반드시 성립한다.

증명 : 정리(20)로부터 명백하다.

정리(35) : **임의의** 원소 $x,y,z \in P$에 대하여 다음의 성질들을 만족한다.

① $1 \leq x$ ② $x \nless x$

③ $x<y$이고 $y<z$이면 $x<z$이다.

④ $x<S(x)$

⑤ $x<u<S(x)$를 만족하는 $u \in P$는 존재하지 않는다.

⑥ $x<y \Leftrightarrow S(x) \leq y$ ⑦ $x<S(x) \Leftrightarrow x \leq y$.

증명 : ① $x \neq 1$라 가정하면 적당한 $u \in P$가 존재하여 $x=S(u)$이다. 즉, $x=u+1=1+u$이다. 따라서 $1<x$이다.

② $x<x$라고 가정하면 적당한 원소 $z \in P$가 존재하여 $x=x+z=z+x$가 되어 정리(19)에 모순이다. 따라서 $x \nless x$이다.

③ $x<y$이고 $y<z$라 하면 적당한 원소 $u,v\in P$가 존재하여 $y=x+u$이고 $z=y+v$이므로 $z=y+v=(x+u)+v=x+(u+v)$이다. $u+v\in P$이므로 $x<z$이다.

④ 합의 정의에 의하여 $x+1=S(x)$이므로 $x<S(x)$이다.

⑤ $x<u<S(x)$를 만족하는 $u\in P$가 존재한다고 가정하면 $x<u$이므로 적당한 $v\in P$에 대해서 $u=x+v$이다. 이때 v는 $v=1$이거나 적당한 $t\in P$에 대해서 $v=S(t)$이다. 만약 $v=1$이면 $S(x)=x+1=x+v=u$이고 가정에 의하여 $u<S(x)$이므로 정리(34)에 모순이다. 만약 $v=S(t)$이면 $S(x)+t=t+S(x)=S(t+x)=S(t)+x=v+x=x+v=u$이다. 즉, $S(x)<u$이고 가정에 의하여 $u<S(x)$이므로 정리(34)에 모순이다.

⑥ (⇨) $x<y$이면 $y=x+u$(단, $u\in P$)이다. 만일 $u=1$이면 $y=x+1=S(x)$이고 만일 $u\neq 1$이면 $u=S(v)$, (단, $v\in P$)이므로 $y=x+u=x+S(v)=S(x+v)=S(x)+v$이다. 따라서 $S(x)<y$이다. 즉, $S(x)\leq y$.

(⇦) $S(x)\leq y$라 가정하면 $S(x)=y$이거나 $S(x)<y$이다. 만일 $S(x)=y$이면 $y=x+1$이므로 $x<y$이고 만일 $S(x)<y$이면 $y=S(x)+u=x+S(u)$(단, $u\in P$)이므로 $x<y$이다.

⑦ (⇨) $x<S(y)$이면 $S(y)=x+u$ (단, $u\in P$)이다. 만일 $u=1$이면 $S(y)=x+1=S(x)$이므로 $y=x$이다. 만일 $u\neq 1$이면 $u=S(v)$(단, $v\in P$)이다. 그러면 $S(y)=x+u=x+S(v)=S(x+v)$이므로 $y=x+v$이다. 즉, $x<y$이다.

(⇦) 만일 $x=y$이면 $S(y)=y+1=x+1$이므로 $x<S(y)$이고 만일 $x<y$이면 $y=x+u$(단, $u\in P$)이므로 $S(y)=S(x+u)=x+S(u)$이다. 즉, $x<S(y)$이다.

따름정리(36) : 임의의 원소 $x,y,z\in P$에 대해서 다음의 성질들을 만족한다.

① $x\leq x$

② $x<y$이고 $y\leq z$이면 $x<z$이다.

③ $x\leq y$이고 $y<z$이면 $x<z$이다.

④ $x\leq y$이고 $y\leq z$이면 $x\leq z$이다.

⑤ $x\leq y$이거나 $y\leq x$이다.

⑥ $x\leq y$이고 $y\leq x$이면 $x=y$이다.

증명 : 정리(34)와 정리(35)로 부터 쉽게 증명할 수 있다.

정의(37) : 집합 A를 P의 임의의 부분집합이라 하자. 원소 $z\in A$가 존재하여 임의의 원소 $u\in A$에 대해서 $z\leq u$일 때 z를 A의 최소원소라 한다.

정리(38) : P의 공집합이 아닌 임의의 부분집합은 반드시 최소원소를 갖는다.

증명 : 집합 A를 $\phi\neq A\subseteq P$라 하자. 그리고 A는 최소원소를 갖지 않는다고 가정하고 모순을 유도하여 증명하자. 집합 $B=\{x\in P \mid \forall u\in P,\ u\leq x \Rightarrow u\notin A\}$라 하면 B의 어떤 원소도 A의 원소가 되지 못하므로 $A\subseteq P-B$이다. 이제 수학적 귀납법에 의하여 $B=P$임을 증명하자. 그러면 $A\subseteq P-B=P-P=\phi$이므로 $A=\phi$가 되어 가정에 모순으로 유도되므로 증명은 완전하게 된다. 만약

$1 \notin B$라고 가정하면 적당한 $u \in P$가 존재하여 $u \leq 1$이고 $u \in A$이다. 그런데 $u \leq 1$이므로 $u=1$이다. 그러면 $1 \in A$이므로 1은 A의 최소원소가 되어 가정에 모순이다. 따라서 $1 \in B$이다. $x \in B$라 가정하면 임의의 원소 $u \in P$에 대해서 $u \leq x$이면 $u \notin A$이므로 $S(x) \notin A$이다. 왜냐면 $S(x) \in A$라 하면 임의의 원소 $y \in A$에 대해서 $x<y$이므로 정리(35)－⑥에 의하여 $S(x) \leq y$이다. 즉, $S(x)$는 A의 최소원소가 된다. 이것은 가정에 모순이므로 $S(x) \notin A$이다. 따라서 정리(35)－⑤에 의하여 임의의 원소 $u \in P$에 대하여 $u \leq S(x)$이면 $u \notin A$가 된다. 따라서 $S(x) \in B$이다. 즉, $B=P$이다.

정리(39) : (합의 연산에 대한 <의 성질)

임의의 원소 $x, y, z \in P$에 대하여 다음의 성질들을 갖는다.

① $x<x+y$

② $x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$

③ $x<y$이고 $u<v$이면 $x+u<y+v$이다.

증명 : ① $(x+y)=x+y$이므로 $x<x+y$이다.

② ($\Rightarrow$) $x<y$이면 $y=x+u$(단, $u \in P$)이므로 $y+z=(x+u)+z=(x+z)+u$이다. 즉, $x+z<y+z$이다.

($\Leftarrow$) $x+z<y+z$이면 $y+z=(x+z)+v$(단, $v \in P$)이다. 따라서 $y+z=(x+v)+z$이므로 정리(18)에 의하여 $y=x+v$이다. 즉, $x<y$이다.

③ $x<y$이므로 ②에 의하여 $x+u<y+u$이고 $u<v$이므로 ②에 의하여 $y+u<y+v$이다. 그러면 정리(35)－③에 의하여 $x+u<y+v$이다.

따름정리(40) : 임의의 원소 $x, y, z \in P$에 대하여 다음의 성질을 갖는다.

① $x \leq y \Leftrightarrow x+z \leq y+z$

② $x<y$이고 $u \leq v$이면 $x+u<y+v$이다.

③ $x \leq y$이고 $u<v$이면 $x+u<y+v$이다.

④ $x \leq y$이고 $u \leq v$이면 $x+u \leq y+v$이다.

증명 : ① 정리(39)－②와 정리(18)에 의하여 쉽게 증명된다.

②～④ 정리(39)－③에 의하여 쉽게 증명된다.

정리(41) : (곱의 연산에 대한 <의 성질)

임의의 원소 $x, y, z \in P$에 대하여 $x<y$은 $x \times z<y \times z$가 될 필요충분조건이다.

증명 : $x<y$라 가정하면 $y=x+u$(단, $u \in P$)이므로 $y \times z=(x+u) \times z=(x \times z)+(u \times z)$이다. 따라서 $x \times z<y \times z$이다. 역으로 $x \times z<y \times z$라 가정하고 $x \not< y$라 하면 $x=y$이거나 $y<x$이다. 만일 $x=y$이면 $x \times z=y \times z$이므로 가정에 모순이다. 만일 $y<x$이면 전반부의 증명에 의하여 $y \times z<x \times z$이므로 역시 가정에 모순이다.

주의(42) : 정리(28)의 이항연산 ×에 대한 소거율이 정리(41)를 이용해서 증명할 수 있다. $x\times z=y\times z$이고 $x\neq y$라고 가정하면 $x<y$이거나 $y<x$이다. 그러면 정리(41)에 의해서 $x\times z<y\times z$이거나 $y\times z<x\times z$이므로 가정에 모순이다.

따름정리(43) : 임의의 원소 $x,y,z,u,v\in P$에 대해서 다음을 만족한다.

① $x\leq y \Leftrightarrow x\times z\leq y\times z$

② $z\leq y\times z$

③ $1<y \Leftrightarrow z<y\times z$

④ $x<u$이고 $y<v$이면 $x\times y<u\times v$이다.

⑤ $x<u$이고 $y\leq v$이면 $x\times y<u\times v$이다.

⑥ $x\leq u$이고 $y<v$이면 $x\times y<u\times v$이다.

⑦ $x\leq u$이고 $y\leq v$이면 $x\times y\leq u\times v$이다.

증명 : ① 정리(41)과 정리(28)에 의해서 쉽게 증명된다.

② ①에서 $x=1$라 놓으면 된다.

③ 정리(41)에서 $x=1$라 놓으면 된다.

④ 정리(41)과 정리(35)−③에 의해서 증명된다.

⑤~⑦ ④에 의해서 증명된다.

정리(44) : (지수와 ·순서관계)

임의의 원소 $x,y,z\in P$에 대해서 다음의 성질을 갖는다.

① $x<y \Leftrightarrow x^z<y^z$

② $1<z,\ x<y \Leftrightarrow z^x<z^y$

③ $(1+x)^y\geq 1+(x\times y)$

④ $1<z,\ 1<y \Leftrightarrow z<z^y$

⑤ $1<x \Leftrightarrow z<x^z$

증명 : ① $x<y$라 가정하고 집합 $A=\{z\in P \mid$ 임의의 $x,y\in P$에 대해서 $x^z<y^z\}$라 하면 $x^1=x<y=y^1$이므로 $1\in A$이다. $z\in A$라 가정하면 $x^z<y^z$이므로 $x^{s(z)}=x^z\times x<y^z\times y=y^{s(z)}$이다. 즉, $S(z)\in A$이다. 따라서 $A=P$이다. 역으로 $x^z<y^z$라 가정하고 $x\not<y$라 하자. 그러면 $x=y$이거나 $y<x$이다. 만일 $x=y$이면 $x^z=y^z$이므로 가정에 모순이다. 만일 $y<x$이면 전반부의 증명에 의하여 $y^z<x^z$가 되어 가정에 모순이다.

② $1<z$이고 $x<y$라 가정하면 $y=x+u$(단, $u\in P$)이다. $1<z$이므로 ①에 의하여 $1^u<z^u$이다. 즉, $1<z^u$이다. 따라서 따름정리(43)−⑥에 의해서 $z^x=z^x\times 1<z^x\times z^u=z^{x+u}=z^y$이다. 역으로 $z^x<z^y$라

가정하면 정리(31)－①에 의해서 $z \neq 1$이다. 따라서 정리(35)－①에 의해서 $1 < z$이다. 이제 $x < y$를 증명하기 위해서 $x \not< y$라고 가정하자. 그러면 $x = y$이거나 $y < x$이다. 만일 $x = y$이면 $z^x = z^y$이므로 가정에 모순이고 만일 $y < x$이면 전반부의 증명에 의해서 $z^y < z^x$이므로 가정에 모순이다.

③ 집합 $A = \{y \in P \mid$ 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 $(1+x)^y \geq 1+(x \times y)\}$라 하면 $(1+x)^1 = 1+x = 1+(x \times 1)$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $y \in A$라 가정하면 $(1+x)^y \geq 1+(x \times y)$이므로 $(1+x)^{s(y)} = (1+x)^y \times (1+x) \geq [1+(x \times y)] \times (1+x) \geq (1+y) \times (1+x) = 1+(x \times y)+x+y > 1+(x \times y)+x = 1+(x \times S(y))$이다. 즉, $S(y) \in A$이다. 따라서 $A = P$이다.

④ ②에서 $x = 1$라 두면 된다.

⑤ $1 < x$라 가정하면 $x = 1+u$ (단, $u \in P$)이다. 그러면 ③에 의해서 $x^z = (1+u)^z \geq 1+(u \times z) > u \times z \geq z$이므로 $z < x^z$이다. 역을 증명하기 위해서 $z < x^z$이고 $1 \not< x$라 가정하면 $x = 1$이므로 $x^z = 1^z = 1 \leq z$가 되어 가정에 모순이다.

정의(7)에서 두 개의 페아노 체계 사이에 동형사상을 정의한 바 있다. 이 때 동형사상은 각 페아노 체계에서의 모든 연산과 순서관계를 보존한다는 것을 다음 정리로 부터 알 수 있다.

정리(45) : $+, \times, \tau, <$을 페아노 체계 $\mathcal{P}$에서의 합, 곱, 지수 그리고 순서관계라 하고 $+^*$, $\times^*$, τ^*, $<^*$을 페아노 체계 $\mathcal{P}^*$에서의 합, 곱, 지수 그리고 순서관계라 하고 F를 $\mathcal{P}$와 $\mathcal{P}^*$ 사이의 동형사상이라 하면 임의의 원소 $x, y \in P$에 대해서 다음을 만족한다.

① $F(x+y) = F(x) +^* F(y)$

② $F(x \times y) = F(x) \times^* F(y)$

③ $F(\tau(x,y)) = \tau^*(F(x), F(y))$ 즉, $F(x^y) = (F(x))^{F(y)}$

④ $x < y \Leftrightarrow F(x) <^* F(y)$

증명 : ① 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 집합 $A = \{y \in P \mid F(x+y) = F(x) +^* F(y)\}$라 하면 $F(x+1) = F(S(x)) = S^*(F(x)) = F(x) +^* 1^* = F(x) +^* F(1)$이므로 $1 \in A$이다. 이제 $y \in A$라 가정하면 $F(x+S(y)) = F(S(x+y)) = S^*(F(x+y)) = S^*(F(x) +^* F(y)) = F(x) +^* S^*(F(y)) = F(x) +^* F(S(y))$이므로 $S(y) \in A$이다. 즉, $A = P$이다.

② 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 집합 $B = \{y \in P \mid F(x \times y) = F(x) \times^* F(y)\}$라 하면 $F(x \times 1) = F(x) = F(x) \times^* 1^* = F(x) \times^* F(1)$이므로 $1 \in B$이다. 이제 $y \in B$라 가정하면 $F(x \times S(y)) = F((x \times y)+x) = F(x \times y) +^* F(x) = (F(x) \times^* F(y)) +^* F(x) = F(x) \times^* S^*(F(y)) = F(x) \times^* F(S(y))$이므로 $S(y) \in B$이다. 즉, $B = P$이다.

③ 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 집합 $C = \{y \in P \mid F(x^y) = (F(x))^{F(y)}\}$라 하면 $F(x^1) = F(x) = (F(x))^{1^*} = (F(x))^{F(1)}$이므로 $1 \in C$이다. 이제 $y \in C$라 가정하면 $F(x^{s(y)}) = F(x^y \times x) = F(x^y) \times^* F(x) = (F(x))^{F(y)} \times^* F(x) = (F(x))^{S^*(F(y))} = (F(x))^{F(S(y))}$이므로 $S(y) \in C$이다. 즉, $C = P$이다.

④ 임의의 원소 $x \in P$에 대해서 집합 $D = \{y \in P \mid x < y \Leftrightarrow F(x) <^* F(y)\}$라 하면 $x < 1 \Leftrightarrow F(x) <^* 1^*$

$=F(1)$은 언제나 참이므로 $1 \in D$이다. 이제 $y \in D$라 가정하면 정리(35)-⑦에 의하여 $x<S(y) \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow F(x) \leq {}^*F(y) \Leftrightarrow F(x) <^* S^*(F(y)) \Leftrightarrow F(x) <^* F(S(y))$이므로 $S(y) \in D$이다. 즉, $D=P$이다.

2. 자연수의 체계에 대한 지도법

지금까지 우리는 자연수의 체계를 이론적으로 전개하여 대수적인 구조들을 살펴 보았다. 이것을 토대로 하여 수학교육에 있어서 자연수의 체계에 대한 효과적인 지도법을 모색하고자 한 방안을 제시한다.

그러나 중등 수학교육에 있어서는 자연수의 체계에 대한 엄밀한 이론적 전개과정을 지도하려는 것이 아니라, 다만 교육현장에 임하는 지도교사 개개인의 지도내용에 대한 이론적 배경으로 삼고 학생이 장차 높은 수준의 수학적 지식을 습득하는 데에 큰 저항이 없도록 기본적 소양을 함양한다는 점에 유의하여야 한다.

1) 수와 숫자를 명확히 구분하여 자연수의 개념을 이해한다.

빨간색이 추상적인 개념이듯이 수의 개념 역시 쉽게 정의할 수 없는 추상적인 개념이다. 종이 위에 그려놓은 어떤 표시가 숫자는 될 수 있지만 수는 아니다. 숫자는 수를 나타내는 수단에 불과하다. 수의 개념을 구체화하고 발전시키는 데에는 수를 나타내는 수단인 숫자가 중요한 역활을 한다. 수를 말로써 나타낸 것이 수사(數詞)이고, 기호로 나타낸 것이 숫자이다. 세계 여러 민족의 문자가 각각 다른 것 처럼 숫자도 여러가지 방법으로 표시된다. 이를테면 이집트 숫자, 그리이스 숫자, 로마 숫자, 마야의 숫자, 한자의 숫자, 인도의 숫자, 쐐기형 문자로 나타내는 바빌로니아 숫자 등이다. 오늘날 세계적으로 널리 사용되고 있는 숫자는 인도에서 발달되어 온 것으로서 아라비아 숫자로 불린다. 아라비아 숫자의 기수법은 10을 기저로 하는 십진법이며, 특히 영의 발견은 모든 수학적 발견중에서도 가장 큰 공헌을 한 것으로 볼 수 있다. 그 후 12세기 경에 유럽으로 전하여진 것으로 알려지고 있다.

자연수는 두 가지의 측면을 가지고 있다. 즉, 기수(基數 : Cardinal number)와 순서수(順序數 : Ordinal number)가 그것이다.

사과 5개의 모임과 우리의 다섯 손가락들 사이에 어떤 유사성이 있음을 느낄 수 있다. 이 유사성은 두 모임 사이의 원소를 서로 짝지울 수 있다는 즉, 일대일 대응이 이루어진다는 개념이다. 서로 짝지울 수 있다는 개념은 두 집단의 원소의 성질을 배제하고 남은 일종의 추상화된 개념이다. 다섯 손가락들의 모임을 다섯이라고 표현한다면 사과 5개의 모임도 다섯이고 연필 5자루의 모임도 다섯인 것이다. 이러한 추상화된 개념을 구체화한 것이 기수인 것이다. 즉, 기수의 개념은 어떤 집합의 크기를 구체화한 것이다.

유아에 있어서 걸음마를 하는 행위는 한 발을 앞으로 내밀고, 또 다른 발을 앞으로 옮기면서 체중을 앞으로 진행시키는 반복행위인 것이다. 이런 유아의 한 걸음 한 걸음에 어른들이 박자를 쳐서 대응시켜 줌으로써 유아들은 일종의 리듬을 의식하게 되어 내면적으로 계열의식이 싹트게

된다고 한다. 그러한 계열의식에 의하여 그 다음의 발걸음을 내딛게 된다고 한다. 이 처럼 반복 행위는 "그 다음"이라는 의식의 연쇄현상인 것이다. 각 행위는 동일한 것이지만 그 다음의 행위와 그 앞의 행위를 명확히 구분하기 위하여 박자의 리듬에 강약을 붙이거나 하나, 둘, 셋 등의 호칭을 붙인다. 이것이 곧 순서수이다.

이러한 기수의 개념과 순서수의 개념을 형식화한 것이 집합에서의 농도(濃度 : Cardinality)의 개념이며, 페아노 체계인 것이다. 이와 같은 두 개념을 하나의 통합된 개념으로 구성된 것이 자연수의 개념이다.

2) 합과 곱의 연산에 대한 의미와 그 성질들을 이해한다.

자연수의 체계를 정의(9)와 같이 정의하면 $P=\{1, 2, 3, \cdots\}$이 된다. 자연수의 덧셈은 두 가지 성질

① $x \in P \Rightarrow x+1=S(x)$

② $x,y \in P \Rightarrow x+S(y)=S(x+y)$을 만족하는 P에서의 유일한 이항연산임을 정리(11)에 의하여 알 수 있다. 이를 테면

$x+3=x+S(2)=S(x+2)=S(x+S(1))=S(S(x+1))=S(S(S(x)))$이다. 이것은 곧 $x+3=\{(x+1)+1\}+1$이기도 하다. 자연수의 곱셈은 두 가지 성질

① $x \in P \Rightarrow x \times 1=x$

② $x,y \in P \Rightarrow x \times S(y)=(x \times y)+x$을 만족하는 P에서의 유일한 이항연산임을 정리(21)에 의하여 알 수 있다. 이를 테면

$x \times 3=x \times S(2)=(x \times 2)+x=(x \times S(1))+x=\{(x+1)+x\}+x=(x+x)+x$이다. 이와 같은 합과 곱의 연산에 대한 성질을 이용하면 다음과 같은 성질들을 증명할 수 있다.

① $x+(y+z)=(x+y)+z$ (정리(14))

② $x+y=y+x$ (정리(17))

③ $x+z=y+z \Rightarrow x=y$ (정리(18))

④ $x \times (y+z)=(x \times y)+(x \times z)$
$(x+y) \times z=(x \times z)+(y \times z)$ (정리(24))

⑤ $x \times y=y \times x$ (정리(26))

⑥ $x \times (y \times z)=(x \times y) \times z$ (정리(27))

⑦ $x \times z=y \times z \Rightarrow x=y$ (정리(28))

3) 지수의 연산에 대한 의미와 그 성질들을 이해한다.

지수의 연산은 두 가지의 성질

① $x \in P \Rightarrow x^1=x$

② $x,y \in P \Rightarrow x^{S(y)}=x^y \times x$을 만족하는 P에서의 유일한 이항연산임을 정리(29)에 의하여 알 수 있다. 이를 테면

$x^3=x^{S(2)}=x^2\times x=x^{S(1)}\times x=(x^1\times x)\times x=(x\times x)\times x$이다. 이와 같은 지수의 연산에 대한 성질을 이용하면 다음과 같은 성질들을 증명할 수 있다.(정리(31)).

① $1^x=1$ ② $x^{y+z}=x^y\times x^z$

③ $(x^y)^z=x^{y\times z}$ ④ $(x\times y)^z=x^z\times y^z$

4) 순서의 개념과 그 성질들을 이해한다.

정리(20)에 의하면 서로 다른 자연수 x,y에 대해서 $x=y+u$이거나 $y=x+v$인 자연수 u 또는 v가 유일하게 반드시 존재하므로 $y=x+z$(단, $z\in P$)일 때 y는 x보다 크다고 정의하고 $x<y$로 나타낸다. 그러면 다음과 같은 성질들이 증명된다.

① $x<y$, $x=y$, $y<x$ 중 한 가지만 반드시 성립한다. (정리(34))

② 모든 자연수는 1보다 크거나 같다. (정리(35))

③ $x<S(x)$ (정리(35))

④ $x<y$, $y<z \Rightarrow x<z$ (정리(35))

⑤ $x<y<S(x)$인 자연수 y는 존재하지 않는다. (정리(35))

⑥ $x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$ (정리(39))

⑦ $x<y \Leftrightarrow x\times z<y\times z$ (정리(41))

⑧ $x<u$, $y<v \Rightarrow x+y<u+v$, $x\times y<u\times v$ (정리(39), (43))

5) 자연수 체계의 유일성을 이해한다.

정리(8)에 의하면 임의의 두 페아노 체계는 서로 동형이다. 그리고 정리(45)에 의하면 서로 동형인 페아노 체계에서의 모든 연산이 그대로 보존됨을 알 수 있다. 즉, F를 페아노 체계 $\mathcal{P}$와 $\mathcal{P}^*$사이의 동형사상일 때 임의의 원소 $x,y\in P$에 대해서 다음의 성질을 갖는다.

① $F(x+y)=F(x)+^*F(y)$

② $F(x\times y)=F(x)\times^*F(y)$

③ $F(x^y)=(F(x))^{F(y)}$

④ $x<y \Leftrightarrow F(x)<^*F(y)$

따라서 모든 페아노 체계는 대수적 구조로 볼 때 모두 동일시 할 수 있다. 즉, 페아노 체계의 존재성을 가정한다면 페아노 체계는 유일하다. 이러한 페아노 체계를 자연수의 체계로 정의하였기 때문에 자연수의 체계는 유일하게 존재하고 있음을 알 수 있다.

Ⅲ. 결　　론

본 연구는 수학교육에 있어서 가장 중요하고 기본적인 자연수의 체계에 대해서 그 개념과 이론적 배경을 조사하고 지도내용을 체계화하여 효과적으로 지도하는 한 방안을 제시하였다.

그리고 중등교사교육의 자료로 활용하여 교육현장에 임하는 교사들이 수의 체계의 지도에 대한 이론적 배경을 공고히 하는 데에 크게 도움이 될 것으로 기대한다.

자연수의 체계에 대한 지도법을 정리하면 다음과 같다.

1) 수와 숫자를 명확히 구분하여 자연수의 개념을 이해한다.

2) 합과 곱에 대한 의미와 그 성질들을 이해한다.

3) 지수의 연산에 대한 의미와 그 성질들을 이해한다.

4) 순서의 개념과 그 성질들을 이해한다.

5) 자연수 체계의 유일성을 이해한다.

참 고 문 헌

1. A. Ya. Khinchin; *The Teaching of Mathematics*, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1968.
2. Roy Dubisch ; *The Teaching of mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York and London, 1963.
3. Stephen S. Willoughby; *Contemporary Teaching of Secondary School Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., New York and London, 1967.
4. Norman Gowar; *An Invitation to Mathematics*, Oxford University Press, Oxford and New York, 1979.
5. T. L. Wade & H. E. Taylor; *Fundamental Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1961.
6. Burton W. Jones; *Elementary Concepts of Mathematics*, The Macmillan Company, New York, 1963.
7. Elliott Mendelson; *Number Systems and The Foundations of Analysis*, Academic Press, New York and London, 1973.
8. Solomon Feferman; *The Number Systems/Foundations of Algebra and Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Palo Alto and London, 1964.
9. M. L. Keedy ; *Number Systems/A Modern Introduction*, Addison-Wesley Publishing Company, California and London, 1969.
10. A. J. Pettofrezzo & D. W. Hight; *Number Systems/Structure and Properties*, Scott-Foreman and Company, Atlanta and London, 1969.
11. Henry B. Fine; *The Number-System of Algebra*, D. C. Heath & Co., Publishers, Boston, 1903.
12. 하대연, 박재균; 수학 영한 사전, 형설출판사, 1984.
13. 한국교육개발원; 중학교 1학년 교사용지도서, 1985.

Summary

A Study on the Teaching Methods of the System of Natural Numbers

Yang, Sung -ho

In this study, we investigate the concept and the theoretical backgrounds about the system of natural numbers which is important and fundamental in mathematics education, and then, describe the effective teaching methods by systemazing the teaching contents about the system of natural numbers.

Furthermore, using these results in the teacher trainings, mathematics teachers would be helped themselves to make firm the theoretical backgrounds about the system of numbers.

Finally, we summarize the teaching methods of the system of natural numbers as follows;

1. To understand the concept of natural numbers with distingushing between numbers and numerals definitely.

2. To understand the meaning and the properties for the addition and the multiplication of natural numbers.

3. To understand the meaning and the properties for the exponentiation of natural numbers.

4. To understand the concept and the properties for the order of natural numbers.

5. To understand the uniqueness of the system of natural numbers up to isomorphic.