

프로세스平均의 信賴區間設定을 위한 區間規模選定技法

千 瑛 秀*

목 차

- I. 서 론
- II. 기법의 개발
- III. 실험계획
- IV. 실험결과와 분석
- V. 결 론

I. 서 론

모의실험분석에서 중요한 문제는 모의실험으로 얻은 출력프로세스의 정상상태 평균을 추정하는 일이다. 출력자료의 표본평균은 프로세스평균에 대한 무편기 추정량이기 때문에 프로세스 평균에 대한 점추정량을 결정하는 문제는 단순하다. 그러나 점추정량의 정밀도를 측정하는 수단으로 필요한 신뢰구간을 설정하는 것, 즉 구간추정을 하는 것은 매우 어려운 문제가 되고 있다. 이는 보통의 모의실험 출력프로세스에는 자동상관이 내재하기 때문이다.

모의실험을 한 차례 실시하여 얻는 n 개의 관측치들을 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 로 표기하자. 만일 X_i 가 서로 독립이고 동일한 분포를 갖는다면 프로세스평균(μ)에 대한 구간추정량은 다음의 공식으로 주어진다.

$$\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} S(\bar{X}) \quad (1)$$

단, 여기에서 $\bar{X} = (1/n) \sum_i (X_i - \bar{X})^2$ 는 표본평균, $S(\bar{X}) = (\hat{V}(\bar{X}))^{1/2}$ 이고, $t_{1-\alpha/2, n-1}$ 는 자유도가 $n-1$ 인 t 분포에서 상위 $1-\alpha/2$ 임계값을 의미한다. 여기에서 $\hat{V}(\bar{X})$ 는 표본평균의 분산에 대한 추정량이고(이하 간단히 "분산추정량"이라 한다.) 다음의 공식으로 주어진다.

$$\hat{V}(\bar{X}) = (1/n(n-1)) \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (2)$$

구간추정량 공식 (1)은 변량 $(\bar{X} - \mu)/S(\bar{X})$ 가 자유도 $n-1$ 인 t 분포를 갖는다는 가정에 입각한

* 經商大學 經營學科 專任講師

것인데 이 가정은 \bar{X} 가 정규분포를 갖고 $n\hat{V}(\bar{X})/V(\bar{X})$ 가 χ_{n-1}^2 분포를 갖고 이 두 통계량이 독립이면 타당하다고 할 수 있다.

그러나 일반적으로는 X_i 들이 독립이고 동일한 분포를 갖지 않고 정규분포를 따르지도 않는다. 예컨대, X_i 가 i 번째로 도달한 고객이 대기행렬에서 기다리는 시간을 나타내는 변수라고 하자. 그러면 X_{i+1} 값은 X_i 값에 영향을 받을 것이다. \bar{X} 가 정규분포를 갖는다는 가정은 표본이 클 때에는 어느 정도 타당하다고 할 수 있다. 그러나 X_i 프로세스에 내재하는 자동상관은 공식 (2)로 정의된 분산추정량에 편기를 유발한다. 이 편기를 보정하는 문제가 본 연구의 초점이다.

사실, 모의실험의 출력프로세스가 보통 초기상태에 있다는 사실도 분산추정량에 편기를 유발하는 또 다른 원인이 되고 있다. 이 초기상태 문제는 모의실험의 초기조건이 프로세스의 정상상태 확률분포에서 도출될 수 없기 때문에 발생하는 것이다. 그러나 본 연구에서는 분산추정량의 편기 중에서 자동상관으로 인하여 생긴 부분에만 관심을 국한시켰다. 즉, 모의실험이 정상상태에서 시작하였던가 아니면 모의실험을 충분히 오랫동안 실시하여 정상상태에 도달한 후에 관측치를 취하였다고 가정하였다.

지금까지, 자동상관 문제를 해소하기 위하여 여러가지 신뢰구간설정방법(이하 "신뢰구간기법")이 개발된 바 있다. 그 기법중의 하나가 구간평균기법(batch-means method, 이하 'BM기법'이라 칭함)이다. BM기법에서는 원래의 출력프로세스에서 인접한 관측치들을 묶어 구간을 형성하되 각 구간의 규모를(구간내에 포함된 관측치의 갯수를 의미함) 동일하게 한다. 그리고 각 구간내의 평균을 늘어 놓은 프로세스를 구간평균(BM; Batch-Means) 프로세스라고 한다. BM기법에서는 이 BM프로세스를 마치 "독립적이고 동일 확률분포를 갖는(i. i. d.)" 확률변수의 집합으로 간주하여 공식 (1)에 의해 신뢰구간을 구한다. 구간의 규모가 커짐에 따라 BM간의 상관관계가 점차 소멸되기 때문에 충분히 많은 갯수의 관측치를 확보할 수 있다면 이 방법은 타당하다고 할 수 있다. 그리고 BM기법은 이해하기 쉽고 계산하기 쉬운 장점이 있다. 성과면에서도 지금까지 개발된 여타의 기법에 비하여 손색이 없음이 알려졌다. 이러한 장점들 때문에 BM기법은 모의실험 결과분석에서 가장 보편적으로 사용되어 왔고, 새로운 기법이 개발될 때에는 그 기법을 평가하는 기준으로 채택되곤 하였다. 그러나 BM기법에도 약점이 없는 것은 아니다. 관측치의 숫자를 사전에 임의적으로 정하였을 경우에는 신뢰구간이 실제로 프로세스평균을 포함하는 "포함확률"이 의도된 수준(신뢰계수)보다 심각하게 낮을 수가 있다. 반면에 신뢰구간의 실제 포함확률이 원하는 수준을 유지할 수 있도록 관측치의 수를 결정하는 경우에는 엄청나게 많은 관측치가 요구될 수 있다. 어느 면에서는 데이터를 집계(aggregate)하는 과정에서 정보를 상실하는 것은 낭비이다. 구간규모가 커짐에 따라 BM의 프로세스가 iid 프로세스에 수렴하는 속도가 체감하기 때문에 이 정보손실은 심각할 수 있다.

본 연구에서는 분산추정량의 편기를 보정하기 위한 목적으로 새로운 신뢰구간기법을 개발하고 그 기법을 구간규모선택기법(Batch-Size Selection Method; 이하 "BSS기법"이라 부름)이라 칭하였다. 이 기법의 기본적인 착상은 구간의 규모를 가급적 크게 하는 대신 적절한 수준에서 결정하고 결과적으로 얻은 BM프로세스를 간단한 자동상관이동평균(ARMA) 모델로 대표하는 것이다. 그리고는 추정된 ARMA 모수를 사용하여 표본평균에 대한 분산을 추정한다. 이렇게 함으로써 우리는 구간규모를 무한정으로 확대하는 대신에 적당한 크기의 구간으로 얻은 BM프로세스에 남아있는 상호의존관계를 활용할 수 있다.

II. 기법의 개발

BM프로세스의 AR 및 MA모수의 결정

정상상태의 ARMA(p, q) 프로세스의 BM프로세스는 ARMA(p, q')이고 q'는 다음과 같이 결정된다.

$$q' = p - \lceil (p - q) / m \rceil \quad (3)$$

구간규모가 m일 때의 BM프로세스의 AR모수들 $\phi_1(m), \dots, \phi_p(m)$ 은 각각 식 $\prod_{j=0}^{p-1} (1 - a_{jm}x)$ 에서 x^1, \dots, x^p 의 계수와 같은 값을 갖는다. 여기에서 (a_1, \dots, a_p) 는 다음 다항식의 근이다.

$$a^p + \phi_1 a^{p-1} + \phi_2 a^{p-2} + \dots + \phi_{p-1} a + \phi_p = 0 \quad (4)$$

즉,

$$\phi_h(m) = (-1)^{h-1} \sum \delta(i_1, i_2, \dots, i_h) (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_h})^m, \quad h=1, 2, \dots, p \quad (5)$$

$$\delta(i_1, i_2, \dots, i_h) = \begin{cases} 1 & i_1, i_2, \dots, i_h \text{가 모두 다를 경우} \\ 0 & \text{그 이외의 경우} \end{cases}$$

여기에서 원래의 프로세스에서의 안정성 조건으로 인하여 $a_j < 1$ ($1 < j < q$)이다. 따라서 만일 a_j 들이 모두 실수이고 m_2, m_1 가 짝수이라면 모든 $m_2 > m_1$ 에 대하여 $|\phi_h(m_2)| < |\phi_h(m_1)|$ 가 성립한다. 즉, m이 증가함에 따라 $\phi_h(m)$ 의 값은 0에 수렴하게 된다. 또한 $\phi_1(m)$ 은 다른 AR모수들 $\phi_2(m), \dots, \phi_p(m)$ 을 지배하게 되는 경향이 있다. 즉, $\phi_1(m)$ 의 절대값에 비하여 고차의 AR모수의 절대값이 작아지는 경향이 있다. 왜냐하면 만일 a_n 들 중에서 한 개 이상이 1에 가까운

값을 갖지 않는다면 고차의 AR모수들은 저차의 AR모수보다 더 빨리 0에 수렴하기 때문이다.

저차 모수의 지배

당분간 a_b 들이 모두 실수이고 m 은 짝수라고 가정하자. 그리고 $\{a_1, \dots, a_p\}$ 를 절대값 순으로 정렬하여 $\{a_{(1)}, \dots, a_{(p)}\}$ 를 얻었다고 하자. 즉, $1 > |a_{(1)}| \geq |a_{(2)}| \geq \dots \geq |a_{(p)}| = 0$. 여기에서 우리는 $|a_{(1)}| > 0$ 라고 가정할 수 있다. (왜냐하면, 만일 $|a_{(1)}| = 0$ 이라면, $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$ 이 되고 따라서 $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_p = 0$ 이 되기 때문이다. 이 경우에는 프로세스가 자동상관의 특성을 갖지 않기 때문에 자동상관에 대하여 추정할 필요가 없게 된다.) 공식 (4)에 의해

$$\phi_1(m) = a_1^m + \dots + a_p^m \geq a_{(1)}^m > 0,$$

$$0 \leq |\phi_h(m)| \leq {}_p C_h (a_{(1)} a_{(2)} \dots a_{(h)})^m.$$

이 성립한다. 따라서

$$0 \leq |\phi_h(m)| \leq {}_p C_h (a_{(1)} a_{(2)} \dots a_{(h)})^m / a_{(1)}^m \\ = {}_p C_h (a_{(2)} \dots a_{(h)})^m \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow \infty, 2 \leq h \leq p$$

이 성립한다. 이는 ${}_p C_h$ 가 상수이고 $0 \leq |a_{(2)} \dots a_{(h)}| < 1$ 라는 점에서 분명하다. 즉, $\phi_1(m)$ 는 m 이 증가함에 따라 고차의 AR모수들을 지배하게되는 성향이 있다. 여기에서 수렴의 속도는 $|a_{(2)} \dots a_{(h)}|$ 에 의해서 결정되는데 $a_{(2)}, \dots, a_{(p)}$ 들이 모두 1에 가까운 값을 갖지 않는다면 수렴속도는 매우 빠를 것이다.

BM프로세스의 AR모수간에 발견되는 지배관계는 MA모수간에도 존재할 것으로 추론된다. 만일 $p > q$ 이고 m 이 충분히 크다면 공식(3)에 의해 $q' = p$ 이 성립한다. 만일 $\phi_1(m)$ 의 지배가 이미 실현되었다면 이 m 값에 대하여 BM프로세스는 ARMA(1, p) 모델로 표현될 수 있다. 이제, 보다 큰 구간규모(예컨대, ms)에 대하여 고찰하자. 이 구간규모로 얻은 BM프로세스의 MA차수를 q'' 라 하면 q'' 는 식 (3)에 의하여 $q'' = 1 - \lceil (1-p)/s \rceil$ 로 정해진다. 따라서 큰 s 값에 대응하는 q'' 값은 2를 넘지 못하게 된다.

그러나, 식 (4)의 근인 a_b 가 모두 실수라고는 할 수 없고 몇쌍의 복소수가 있을 수 있다. 그러한 경우에는 m 값이 증가함에 따라 $\phi_1(m)$ 가 진동하여 특정 m 값에서 0에 가까운 값을 갖게 되어 충분히 큰 m 값에서도 $\phi_h(m)/\phi_1(m)$ 비율이 확대될 수 있다. 즉, 식 (4)의 근중 일부가 허수 부분을 가질 경우 $\phi_h(m)/\phi_1(m)$ 비율은 0에 수렴하지 않는다.

이러한 수렴의 실패가 얼마나 빈번히 발생하는지 확인하기 위하여 무작위적으로 선정된 200개의 AR(3) 모델을 가지고 실험을 하였다. 이 실험에서 우리는 난수발생 프로그램을 활용하여 $|\phi_b| <$

ρC_0 조건을 만족시키는 AR(3) 모델의 모수 값들 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 을 얻고 이 값들이 안정성 조건을 만족시키는 경우에만 실험 모델로 선정하였다. 선정된 모델 AR(3), ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 에 대하여 구간규모가 m 인 BM프로세스의 AR 및 MA모수인 $\phi_1(m), \phi_2(m), \phi_3(m), \theta_1(m), \theta_2(m), \theta_3(m)$ 값을 계산하였다. 실험의 결과 역시 m 이 증가함에 따라 저차의 AR 및 MA모수가 점차 고차의 모수를 지배하게 됨을 보여주고 있다.

요약하면, 구간규모가 충분히 크면 BM프로세스는 ARMA(1, 1) 모델로 잘 대표될 수 있다. 이러한 특성을 응용하면 새로운 신뢰구간기법을 고안할 수 있다. 즉, BM기법에서와 같이 구간규모를 가급적 크게하여 고전적 통계이론을 적용하거나, 아니면 원래의 프로세스를 잘 표현하는 ARMA(p, q) 모델을 찾기 위하여 p, q를 추정하는 대신에, 구간규모를 결정하는 규칙을 정할 수 있다면 그 규칙에 따라 구간규모를 적절히 정하고 BM프로세스에 ARMA(1, 1) 모델을 적용할 수 있다.

구간규모선정 규칙

BM프로세스가 ARMA(1, 1) 모델로 대표될 수 있도록 하는 구간규모를 선정하는 것은 어려운 일이 아니다. 만일, 구간규모가 m 인 BM프로세스에서 추정된 ARMA(1, 1) 모델이 적합성검정에서 적정하다고 판명되면 그 구간규모는 충분히 크다고 결론지어도 좋을 것이다. 선정의 대상으로서 모든 가능한 m 값을 고려할 수도 있으나 우선 다음의 집합에 포함된 r 개의 값만을 검토한다고 상정하자.

$$S_r = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$$

여기에서, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r < \lfloor n/2 \rfloor$ 이다. 이 집합 S_r 를 테스트 집합이라 하자. 우선 구간규모가 m_1 인 BM프로세스를 ARMA(p, q) 모델로 표현하는 것을 시도할 수 있다. 만일 추정된 ARMA(p, q) 모델이 적합성검정에 합격하면 m_1 을 적정 구간규모로 선정하고, 합격하지 못하면 보다 큰 m 값에 대하여 모델추정과 적합성검정의 과정을 반복할 수 있다. 이 반복과정의 결과로 한 구간규모를 선정하거나 아니면 테스트집합내의 모든 값을 검토한 후에도 선정을 못할 수 있다. 이 경우 적합성검정에서 사용된 유의수준을 $\alpha = 0.10$ 라고 한다면 이 구간규모선정규칙(이하 'BSS규칙'이라 함)을 '1st. $\alpha 10$ ' 규칙이라 하자. 이 규칙의 명칭이 의미하는 바는 유의수준이 $\alpha = 0.10$ 인 적합성검정에서 첫째로 합격한(즉, 가장 작은) 구간규모를 선정한다는 것이다. 만일 출력자료가 많지 않다면 우리는 $m_1 = 1$ 로 정하여 원래의 출력 프로세스에서부터 시작할 수 있다. 그렇지 않으면 충분히 큰 m_1 값에서부터 시작함으로써 구간의 갯수(즉, $k_1 = n/m_1$)가 시계열분석에 적정한 수 이내로 되도록 할 수 있다.

유사한 방식으로 1st. $\alpha 30$, 1st. $\alpha 05$, 혹은 1st. $\alpha 01$ 규칙들을 정의할 수 있다. 즉 추정된 ARMA 모델이 유의수준이 각각 $\alpha = 0.30, 0.05, 0.01$ 인 적합성검정에서 처음으로 합격한 구간 규모를 선정할 수 있다. 같은 맥락에서 1st. $\alpha 00$ 규칙은 테스트 집합에서 제일 작은 값인 m_1 을 구간규모로 선정하는 규칙을 의미한다. (어떠한 모델이라도 유의수준이 $\alpha = 0$ 인 적합성검정에 합격할 것임) 이 1st. $\alpha 00$ 규칙 자체는 중요한 의미를 갖지 않으나 다른 규칙의 성과를 비교할 때 참조하기 위하여 실험에 포함되었다.

테스트 집합내에 있는 값들 중에서 구간규모가 예컨대 $m_{e1}, m_{e2}, \dots, m_{es}$ 인 BM프로세스에서 추정된 모델들이 적합성검정에 합격하였다고 하자. 그리고 선정후보 집합($S(\alpha)$)을 다음과 같이 정의하자.

$$S(\alpha) = \{m_{e1}, m_{e2}, \dots, m_{es}\}$$

여기에서 유의할 점은 테스트 집합과 추정되는 모델이 주어지면 선정후보집합은 데이터와 유의수준에 따라 결정된다는 점이다. 이제 $m_{e1} < m_{e2} < \dots < m_{es}$ 라고 가정하자. 그러면 우리는 $\alpha = 0.10$ 에 상응하는 선정후보집합에 포함된 구간규모들 중에서 적합성검정시 사용되는 통계량인 Q통계량의 값이 가장 적은 구간규모를 선정하는 규칙을 생각할 수 있다. 이 규칙을 min. $\alpha 10$ 규칙이라 정하자. 또한 유의수준 $\alpha = 0.30, 0.05, 0.01$ 에 의해 결정된 선정후보집합에서 검정통계량의 값이 가장 적은 구간규모를 선정하는 규칙이라는 뜻으로 min. $\alpha 30$, min. $\alpha 05$, 및 min. $\alpha 01$ 규칙을 정할 수 있다.

분산추정량

일단 구간규모가 m^* 인 BM프로세스에 대하여 ARMA 모델이 정의되면 우리는 ARMA모수와 $V(X)$ 간에 성립하는 극한특성을 응용하여 분산추정량을 얻을 수 있다. 즉,

$$\hat{V}_w(m^*) = \frac{V_e(m^*) (1 - \sum_i \theta_i(m^*))^2}{k^* (1 - \sum_i \theta_i(m^*))^2} \quad (6)$$

은 표본평균의 분산에 대한 추정량으로 좋은 대안이라 할 수 있다. 단 여기에서 $\hat{V}_e(m^*)$ 은 White noise의 분산에 대한 추정량이다.

구간규모선정기법의 완성

지금까지 논의된 이론들을 종합하면 하나의 신뢰구간기법을 구성할 수 있다. 그 기법을 구간규모선정기법(BSS기법)이라 하고 내용을 보자. 위에서 언급된 바와 같이 안정적 확률 프로세스로부터

터 도출된 BM프로세스는 구간규모가 충분히 커지면 ARMA(1,1) 모델로 잘 대표될 수 있다. 그러나 ARMA(1,1) 모델의 대안으로서 AR(1) 모델이나 AR(2) 모델과 같이 다른 단순한 ARMA 모델을 사용하여 BM프로세스를 묘사하지 못할 이유가 없다. 특정 ARMA 모델로 잘 대표될 수 있는 구간규모 m^* 가 일단 선정되면 우리는 식 (6)에 의하여 분산의 추정량 $V_w(m^*)$ 을 구할 수 있다. 신뢰구간설정기법을 완성하기 위하여 유효 자유도는

$$f^* = \max\{1, \min\{k/\hat{b}(m^*) - p - q - 1, k - p - q - 1\}\}$$

로 정할 수 있다. 여기에서

$$\begin{aligned} \hat{b}(m^*) &= \hat{V}_w(m^*) / \hat{V}_B(m^*), \\ \hat{V}_B(m^*) &= (1/k^*(k^*-1)) \sum_i (X_i(m^*) - \bar{X})^2. \end{aligned}$$

III. 실험 계획

위에서 개발된 BSS기법이 실제 응용에서 기대된 기능을 실현하는지 다음과 같은 틀에서 실증적으로 검토하였다.

민감도 분석 : 우선 BSS기법의 성과가 BM프로세스를 대표하는 APMA모델의 AR 및 MA차수나 BSS규칙에 따라 민감하게 변하는지 검토하는 것을 목적으로 하였다. 만일 BSS기법이 이러한 모수들에 대하여 민감할 경우에는 최적의 모수값을 선정하기로 하였다.

성과평가 : 위의 검토과정에서 선정된 모수를 사용하여 BSS기법의 성과를 평가하였다. 이 평가는 본기법의 성과가 기존의 BM기법에 비하여 향상되는지를 기준으로 하였다. 성과평가의 기준으로는 다음의 세 가지를 선정하였다.

관측된 포함빈도

신뢰구간폭의 평균

신뢰구간폭의 분산

실험설계

다음과 같이 15개의 테스트모형을 사용하고 네 가지의 표본규모 ($n = 512, 1024, 2048,$

8196)를 선정하였다. 그리고 각각의 표본상황에서 성과를 관측하기 위하여 200회의 실험을 반복하였다.

프로세스 1. AR(1), $\phi = 0.9$

프로세스 2. AR(2), $\phi_1 = 1.3435, \phi_2 = -0.0225$

프로세스 3. M/M/1 FIFO, $\tau = 0.8$

프로세스 4. M/M/1 LIFO, $\tau = 0.8$

프로세스 5. M/M/1 SIRO, $\tau = 0.8$

프로세스 6. 시분할 컴퓨터 시스템 (Law and Carson [10]에 소개된 모델)

프로세스 7. ARMA(2, 1), $\phi_1 = 0.9, \phi_2 = -0.18, \theta = -0.9$

프로세스 8. M/M/1/M/1/M/1 FIFO, $\tau = 0.9, 0.7, 0.9$

프로세스 9. E₄/M/1 FIFO, $\tau = 0.8$

프로세스 10. M/H₂/1 FIFO, $\tau = 0.8$

프로세스 11. AR(1), $\phi = 0.5$

프로세스 12. AR(1), $\phi = 0.8$

프로세스 13. AR(2), $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.7$

프로세스 14. ARMA(1, 1), $\phi = 0.7, \theta = -0.4$

프로세스 15. ARMA(2, 1), $\phi_1 = 1.32, \phi_2 = -0.687, \theta = -0.4$

IV. 실험결과의 분석

민감도 분석

4종류의 표본규모, 10종의 테스트모델(프로세스1-프로세스10), 3종의 자료표현모델 (AR(1), AR(2), and ARMA(1, 1)), 7종의 BSS규칙으로 840개의 표본상황을 만들고, 각 표본상황에 대하여 관측된 포함빈도가 갖는 분산을 분석하였다. (BSS규칙중에서 1st. $\alpha 00$ 규칙은 예비분석단계에서 배제되었다. 왜냐하면 이 규칙의 성과는 다른 7종의 규칙에 비하여 현저히 열등하여 계속 관심을 둘 필요가 없다고 판단되었기 때문이다.) 분산분석표인 도표1은 제시된 요인들의 주효과(main effect)와 상호작용효과(interaction effect)를 요약하고 있다.

<도표1> 포함빈도에 대한 분산분석표

분산의 원천	자유도	SS	MS	F통계값
N (표본규모)	3	1.70541	0.56847	293.0
P (테스트모델)	9	3.59069	0.44884	231.4
F (자료표현모델)	2	0.00601	0.00301	1.55
R (BSS규칙)	6	0.01032	0.00147	0.76
NF	6	0.01775	0.00296	1.53
FR	12	0.00225	0.00019	0.10
(Regression)	(38)	(5.33246)	(0.14033)	(72.3)
오 차	801	1.55215	0.00194	
총 계	839	6.88460		

분산의 대부분이 표본규모와 테스트모델의 차이에 기인하고 있다. 부분 F통계량의 값 0.10과 1.53으로 보아 자료표현모델과 BSS규칙간의 상호작용 및 자료표현모델과 표본규모간의 상호작용은 통계적으로 무의미함은 명백하다. 자료표현모델의 주효과도 부분 F통계량의 값이 1.55이므로 통계적으로 무의미한 것으로 판명되었다. BSS규칙 요인도 부분F통계값이 0.76이어서 유의성이 없는 것으로 나타났다.

신뢰구간폭의 분산도 분석하였다. 여기에 제시되지는 않았지만, 자세한 자료를 포함한 도표를 보면, 표본규모와 테스트모델의 차이가 분산의 주요 원천임이 분명하다. 그러나 표본규모에 증가하면 신뢰구간의 폭이 감소한다는 점은 잘 알려진 사실이기 때문에 표본규모에 기인한 분산은 주의를 끌지 못한다. 테스트모델의 차이에 기인한 분산도 중요하지 않다. 왜냐하면 어떤 프로세스에 대하여 BSS기법이 잘 적용되는지를 판단하는 것이 우리의 목적이 아니기 때문이다. 따라서 이 두 요인이 분산에 미치는 영향을 제거하는 것이 바람직하다. 이 목적을 위하여 주어진 표본규모와 테스트모델의 조합내에서 신뢰구간폭의 평균을 구한 후, 각 표본상황에 대하여 구해진 구간폭을 이 평균으로 나눈 비율을 구함으로써 자료를 표준화하였다. 다음의 도표2는 이 비율값이 갖는 분산의 원천을 나타내고 있다.

<도표2> 구간폭비율의 분산분석표

분산의 원천	자유도	SS	MS	F통계값
F (자료표현모델)	2	0.80424	0.40212	11.8
R (BSS규칙)	7	0.23473	0.03353	0.98
NF	6	0.60411	0.10069	2.95
FR	14	0.65256	0.04661	1.36
(Regression)	(29)	(2.29561)	(0.07916)	(2.32)
오 차	930	31.78858	0.03418	
총 계	959	34.08419		

도표 2에서 볼 수 있는 바와 같이 자료표현모델의 주효과와 자료표현모델과 표본규모와의 상호작용효과는 중요한 것으로 판명되지만, BSS규칙의 주효과와 BSS규칙과 자료표현모델간의 상호작용효과는 통계적으로 의미가 없는 것으로 나타났다. (부분F통계량의 값이 0.98과 1.36임)

요약하자면, 우리는 BSS규칙은 포함빈도나 구간폭면에서의 성과에 중요하지 않다고 결론지을 수 있다. 또한 BSS규칙과 자료표현모델간의 상호작용효과가 있는 것 같지 않다.

BSS기법의 평가

BSS규칙과 자료표현모델에 관하여 분석하는 과정에서 우리는 많은 표본상황하에서 BSS기법이 만족할 만한 포함빈도를 보여주는 것을 볼 수 있었다. 그러나 그렇지 못한 경우도 없지 않았다. BSS기법은 기존의 신뢰구간기법들에게 공통적인 문제 - 즉, 표본규모가 사전에 주어졌을 경우 신뢰구간의 실제 포함확률이 의도된 수준보다 현저하게 낮을 수도 있는 문제 - 의 완전한 치유책이 아님은 분명하다. 그러나 BSS기법으로 포함확률과 구간폭의 면에서 개선이 이루어졌는지 점검하여 보았다.

개선여부를 판단하기 위하여 BM기법을 비교의 대상으로 선택하였다. BM기법의 성과는 구간규모에 매우 민감하기 때문에 적절한 구간규모의 선정에 매우 신중하여야 할 것이다. 여러가지 고려 끝에 $k = 4$ 를 제공하는 구간규모를 선정하였다.

BSS기법의 성과를 측정하기 위하여 BSS규칙으로는 1st. $\alpha 01$ 규칙을 채택하고 자료표현모델로는 ARMA(1, 1) 모델을 사용하였다. 지금까지 관찰한 바에 의하면, 표본이 클 경우에는 AR(1) 모델이 보다 우수한 성과를 보이고 표본이 적을 때에는 ARMA(p, q) 모델이 보다 우수한 경우도 있었지만 대체적으로 ARMA(1, 1) 모델이 우수한 성과를 보였다. 이러한 점에서 ARMA(1, 1) 모델이 BSS기법의 최선의 성과를 나타내는 것이 아님에 유의할 필요가 있다.

부록의 그림 1, 2, 3은 조사된 모든 표본규모에 대하여 BSS기법과 BM기법의 성과를 대조해 보이고 있다. 구간폭과 관련한 성과를 비교하기 위하여 BSS기법의 구간폭의 평균을 BM기법의 구간폭의 평균으로 나눈 비율을 조사하였다.

* 관측된 포함빈도의 비교: 그림 1에 의하면 포함빈도의 관점에서 BSS기법은 BM기법보다 우수하다고 할 수 없다. 오히려 많은 표본상황에서 BSS기법은 BM기법보다 떨어지는 포함빈도를 보여주었다. 그러나 BSS기법은 표본이 커짐에 따라 포함빈도 성과가 상대적으로 빠르게 개선된다는 점에서 장점을 가지고 있다. 표본의 크기가 8192일 때, BSS기법의 포함빈도는 의도된 수준에 비하여 프로세스 4에서 6.6%, 프로세스 10에서 3.5% 차이를 보이고 있다. 그러나 BSS기법의

구간폭과 관측된 포함빈도를 고려하면 이 두 사례는 BSS기법의 취약점은 나타내는 것이라고 할 수 없다. 예컨대, 프로세스4의 경우 BSS기법은 85.4%의 포함빈도를 실현하였다. 그러나 BSS기법으로 구한 신뢰구간의 구간폭의 표본평균과 표준편차는 BM기법으로 얻은 신뢰구간에 비하여 각각 72%와 60%에 머물렀다. 이 경우 포함빈도에서의 낮은 성과는 좋은 구간폭 성과로 보상되었다고 할 수 있다. 프로세스10의 경우도 유사하게 설명될 수 있다.

* 구간폭의 평균 비교: 그림2를 보면 BSS기법은 구간폭 면에서 BM기법보다 우수함을 알 수 있다. BSS기법으로 얻은 신뢰구간의 구간폭 평균이 BM기법으로 구한 신뢰구간들에 비해서 적은 경우가 그 반대인 경우보다 훨씬 더 많다. BSS기법의 포함빈도 성과가 BM기법보다 다소 저조했던 프로세스 4, 5, 6에서 표본규모에 상관없이 BSS기법이 우수한 구간폭 성과를 보인 점은 놀랍지 않다. 그러나 두 기법의 포함빈도 성과가 거의 대등했던 프로세스 1, 2, 7에서도 BSS기법의 구간폭 성과가 우수했던 점은 확실히 BSS기법의 장점을 나타내고 있다. 프로세스 8과 10의 경우에는 표본규모에 따라 BSS기법의 구간폭 성과가 떨어지고 있어서 BSS기법의 한계를 보여주는 것처럼 보인다. 이 두 경우는 표본이 적을 경우에는 BSS기법이 불리할 수도 있다는 증거를 보여주는 사례라고 보인다.

종합하면, 표본의 크기가 8192일 때에는 BSS기법이 모든 테스트모델(프로세스2 제외)에서 평균적으로 좁은 신뢰구간을 제공하였다. 이 점은 표본이 클 때 BSS기법이 구간폭 면에서 보다 우수함을 보여주는 것이다.

* 구간폭의 표준편차 비교: 표본이 적을 때에는 BSS기법으로 얻은 신뢰구간의 폭의 표준편차가 BM기법의 경우에 비해서 큰 경우도 있으나 표본이 8192일 경우에는 모든 프로세스에서 적었음을 그림3에서 알 수 있다. 표본이 클 경우에는 BSS기법이 BM기법에 비하여 신뢰구간의 폭이 보다 안정적이라는 점에서 더 신뢰할 만 하다는 점은 분명하다.

* 구간규모에 대한 민감도: 부록의 그림 4, 5, 6은 BSS기법의 성과가 BSS규칙에 의해 크게 좌우되지 않음을 보여주고 있다. 이 그림들은 프로세스3, 표본규모 1024, BSS규칙 1st. $\alpha 05$ 를 사용한 예에서 각 구간규모별로 자료표현모델의 성과와 BM기법의 성과를 대비하고 있다. 이 그림들에서 주목할 만한 것은 BM기법의 성과가 구간규모의 크기에 따라 심각하게 변화하는 반면에 BSS기법은 어떤 자료표현모델을 사용하던 상관없이 성과가 일정한 수준을 유지한다는 점이다. 즉 BSS기법은 구간규모에 대해서 민감하지 않다는 장점을 가지고 있다.

V. 결 론

BM기법에 비하여 BSS기법은 특히 표본의 크기가 보통이거나 클 때 좋은 성과를 보인다. 실증적인 결과를 가지고 BSS기법의 이론적인 배경을 다음과 같이 재해석할 수 있다.

BSS기법에서는 BM프로세스가 간단한 ARMA모델로 잘 표현될 수 있을 때까지 데이터를 집계한다. 이때 우리는 데이터집계의 수준과 자료표현모델의 신축성 사이에서 절충을 고려할 수 있다. 또한, ARMA(1, 1) 모델을 사용하는 것이 합리적이라 생각된다. 왜냐하면 AR(1) 프로세스의 BM프로세스는 ARMA(1, 1) 프로세스가 되기 때문이다. 그러나 실증분석의 결과는, 특히 표본이 클 경우, 매우 간단한 ARMA모델을 자료표현모델로 사용하는 것이 유리하다는 점을 보여주고 있다. ARMA(1, 1) 모델을 사용한 경우와 비교하면, AR(1) 모델을 사용한 경우는 표본이 클 경우 포함확률이 다소 나은 것으로 나타났다. 그리고 AR(1) 모델을 사용할 경우에는 모수의 추정을 위한 계산이 훨씬 간단하다는 점에서 유리하다. 이론적으로 어느 모델이 보다 적절하나하는 점은 중요한 것 같지 않다. 만일 데이터집계가 어느 정도 진전되면 데이터에 남아있는 자동상관이 표평균의 분산에 미치는 영향을 측정하기 위하여 자료표현모델은 AR모수 하나만 가져도 충분하다.

AR(1) 모델을 사용한 BSS기법은 BM기법과 Schreiber-Andrew의 ARMA모델선정기법 사이의 절충이라고 할 수 있다. BM기법은 데이터집계의 과정을 통하여 원래의 자료에 있는 자동상관을 완전히 제거한 후 BM프로세스에 ARMA(0, 0) 모델을 적용하려고 하는 것이다. 반면에, ARMA 모델선정기법은 원래의 데이터에 있는 상호의존구조를 그대로 두고 ARMA 표현을 통하여 이 구조에 대한 정보를 도출하려 하는 것이다. AR(1) 모델을 사용한 BSS기법은 적절한 정도의 데이터집계를 통하여 상호의존구조를 단순화하려고 시도하는 것이다. 이 절충방안의 잇점은 이제 실증적으로 뒷받침되었다. 왜냐하면 표본이 커짐에 따라 BSS기법의 성과가 BM기법의 성과에 비하여 더 빠르게 개선됨이 보여졌기 때문이다.

데이터집계에 의하여 BM프로세스에 잔류하는 상호의존성이 약해짐에 따라 남아있는 의존도를 줄이는 것이 점차로 어려워진다. 그러므로 표본이 커짐에 따라 BM기법의 성과가 개선되는 속도는 점차로 떨어진다. 그러나, 실험결과에 의하면, 구간규모가 커짐에 따라 1차 AR모수가 고차의 파라미터를 지배하게 되어 AR(1) 모델은 매우 빠른 속도로 BM프로세스의 표현에 적합하게 된다. 결론적으로, 우리는 BM기법과 ARMA모델선정기법사이에서 절충을 취함으로써 이익을 얻을 수 있다. 즉, 우리는 과도한 데이터집계를 피함으로써 보다 나은 신뢰구간을 설정할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Amemiya T. and R.Y. Wu. 1972. The effect of Aggregation on Prediction in the Autoregressive Model. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 628-632.
- [2] Anderson O.D. 1979. *Time Series Analysis and Forecasting: The Box Jenkins Approach*. Butterworths, London.
- [3] Bischak, D. P. 1988, Weighted Batch Means for Improved Confidence Intervals for Steady-State Process. Ph. D. Dissertation at University of Michigan.
- [4] Brillinger, D. R. 1973. Estimation of the Mean of a Stationary Time Series by Sampling. *Journal of Applied Statistics*, 10, 419-431.
- [5] Cryer, J. D. 1986. *Time Series Analysis*. Duxbury Press, Boston.
- [6] Fishman, G. S. 1978. *Principles of Discrete Event Simulation*. Wiley, New York.
- [7] Gray, H. L., G. D. Kelley, and D. D. McIntire. 1978. A New Approach to ARMA Modeling. *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, B7 (1), 1-77.
- [8] IMSL 1987 *User Manual, For Statistical Analysis*, 1-3. IMSL, Houston, Texas.
- [9] Kang K. and B. Schmeiser. 1987. Properties of Batch Means from Stationary ARMA Time Series. *Operations Research Letters*.
- [10] Law, A. M. and J. S. Carson. 1979. A Sequential Procedure for Determining the Length of a Steady-State Simulation. *Operations Research*, , 1011-1025.
- [11] Law, A. M. and W. D. Kelton. 1982b. Confidence Intervals for Steady-State Simulations: II. A Survey of Sequential Procedures. *Management Science*, 28, 550-562.
- [12] Law, A. M. and W. D. Kelton. 1984. Confidence Intervals for Steady-State Simulations: I. A Survey of Fixed Sample Size Procedures, *Operations Research*, 32, 1221-1239.
- [13] Pandit, S. M. and S. Wu. 1983. *Time Series and System Analysis with Application*. Wiley, New York.

부 록

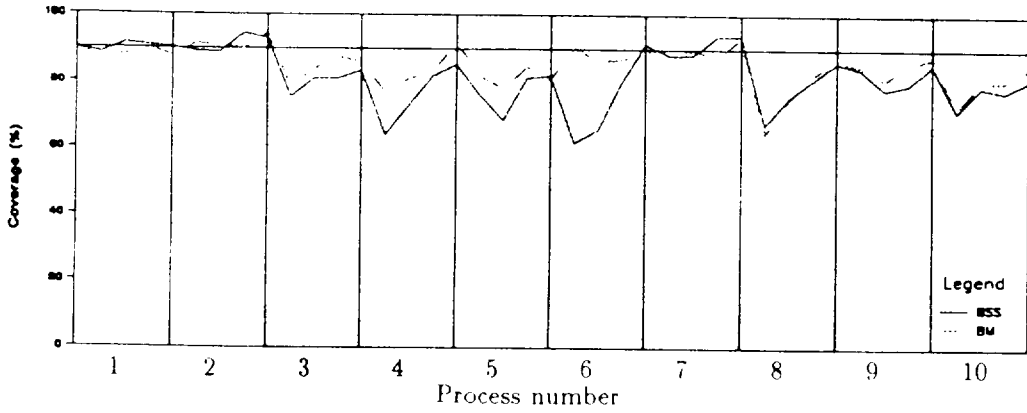


그림1 : BSS기법과 BM기법의 포함빈도

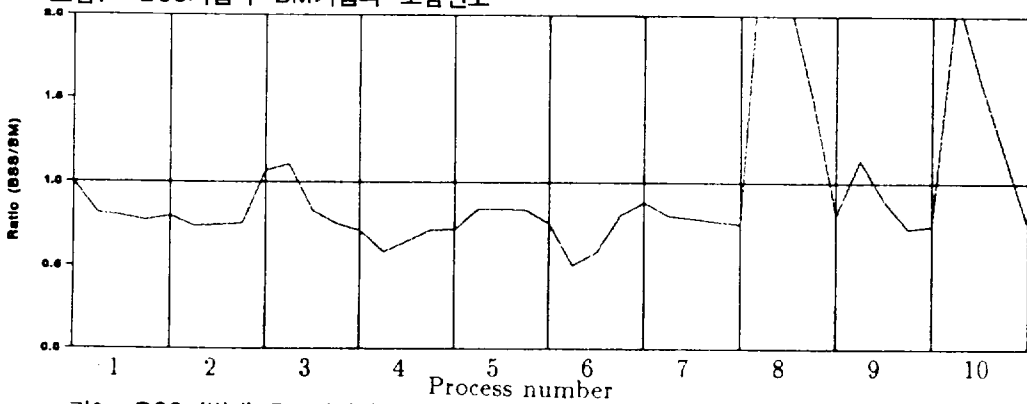


그림2 : BSS기법대 BM기법의 구간폭비율의 평균

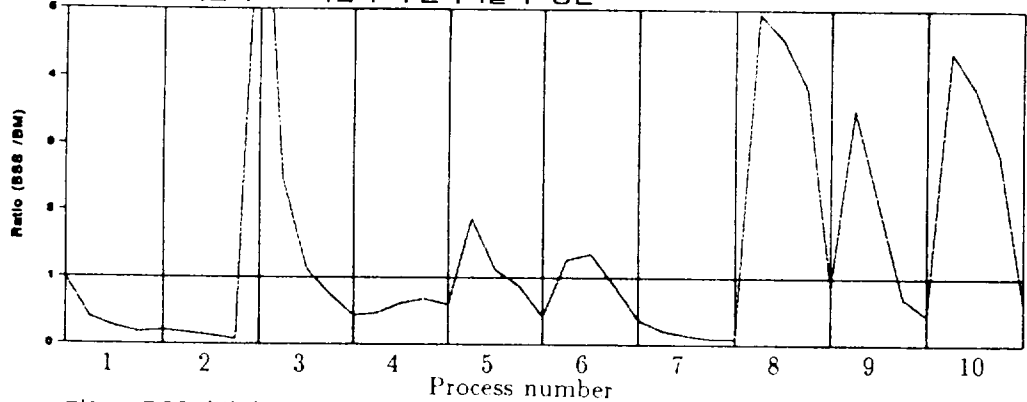


그림3 : BSS기법대 BM기법의 구간폭비율의 표준편차

주) 각 프로세스 내에서 4개의 자료점은 포본크기 512, 1024, 2048, 8192를 나타냄. BSS기법의 성과를 대표하기 위하여 자료표현모델로 ARAM(1, 1)을, BSS규칙으로 1st. $\alpha 01$ 을 사용하고 BM기법의 경우는 구간의 갯수를 4로 정함.

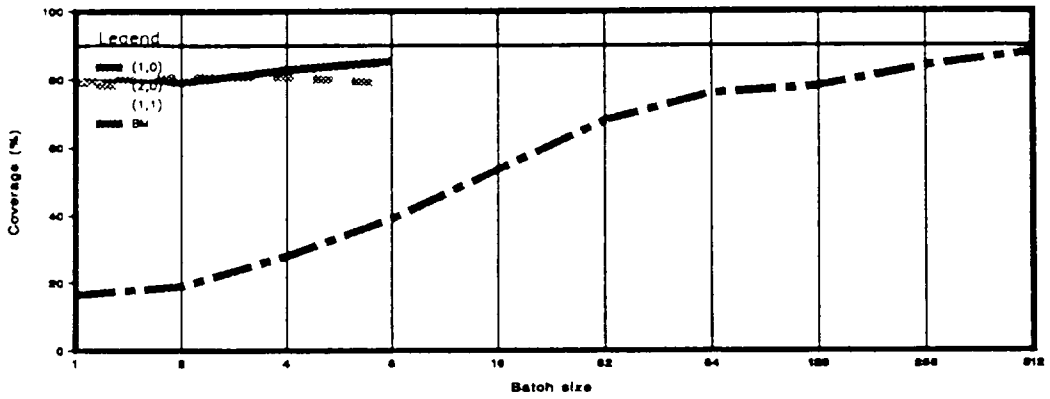


그림4 : 각 자료표현모델과 BM기법의 실측포함빈도

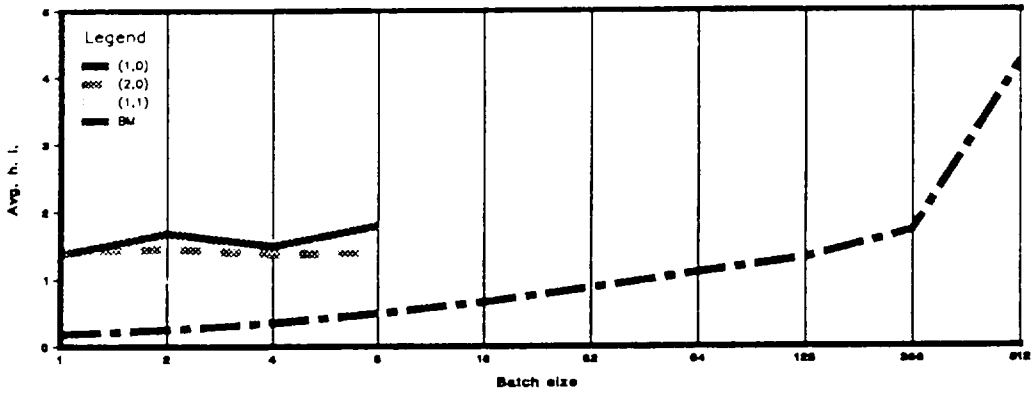


그림5 : 각 자료표현모델과 BM기법의 구간폭의 평균

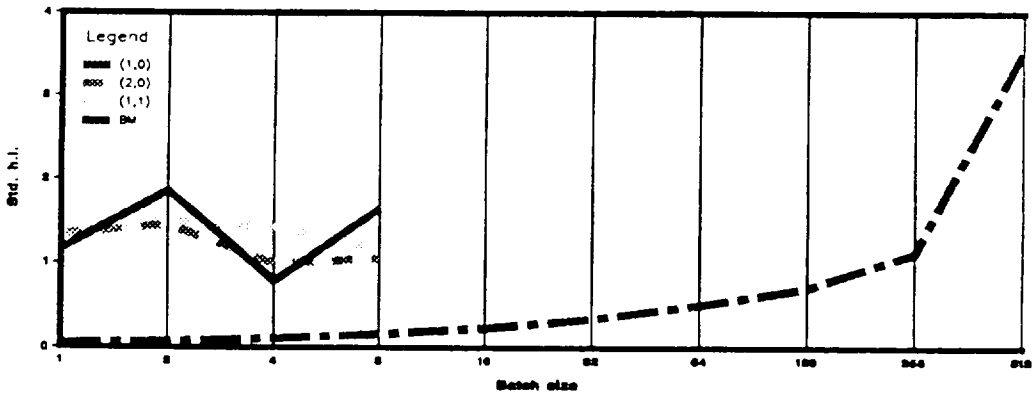


그림6 : 각 자료표현모델과 BM기법의 구간폭의 표준편차