

낮은 感度 係數特性을 가진 WDF의 設計에 關한 研究

李 鎔 鶴

A Study on the Design of WDF with Low Coefficient Sensitivity Properties

Lee Yong-hak

Summary

There has been a great amount of interest in the design of digital filters with low sensitivity in coefficient variations. The WDF(Wave Digital Filter) modeled after analog ladder networks has been known to have low coefficient sensitivity properties.

To examine this nature, a third-order Butterworth low-pass filter was realized as a WDF structure. And its low coefficient sensitivity properties were compared with the cascade structure which has a good coefficient sensitivity properties among the conventional structures.

序 論

Digital filter의 cost는 그것이 特別한 目的의 컴퓨터로 構成되었을 경우에는 係數의 word length에 의하여 크게 좌우되므로 可能하면 그것을 줄이는 것이 바람직하나 small word length는 係數의 誤差를 크게하므로 우리가 원하는 필터의 特性을 얻을 수 없게된다.(Crochiere and oppenheim, 1975) 그러므로 係數의 變化에 대해 low sensitivity特性을 갖는 digital filter의 設計에 關心을 가지게 된다.

回路素子の 變化에 대해 low sensitivity 特性을 갖는 analog LC ladder構造에(crochiere, 1972) transmission-line 變換을 통해 얻을 수 있는 WDF

構造를 使用하여 必要한 word length를 줄일 수 있다.(wegener, 1976) 本 論文에서는 analog ladder 構造의 設計方法을 利用하여 WDF를 設計하였으며 이로부터 Richards transformations, Kurodas identities 그리고 Fettweis(1971, 1972)의 digitization 方法을 使用하여 WDF의 構造를 誘導하였다.

1. WDF의 構造

Figure 1에서와 같은 analog LC ladder 構造로부터 digital filter의 周波數應答이 이 analog filter 周波數應答의 bilinear transformation이 되는 WDF 構造의 設計에 關한 理論을 考察한다.

(1) Richard's Transformation

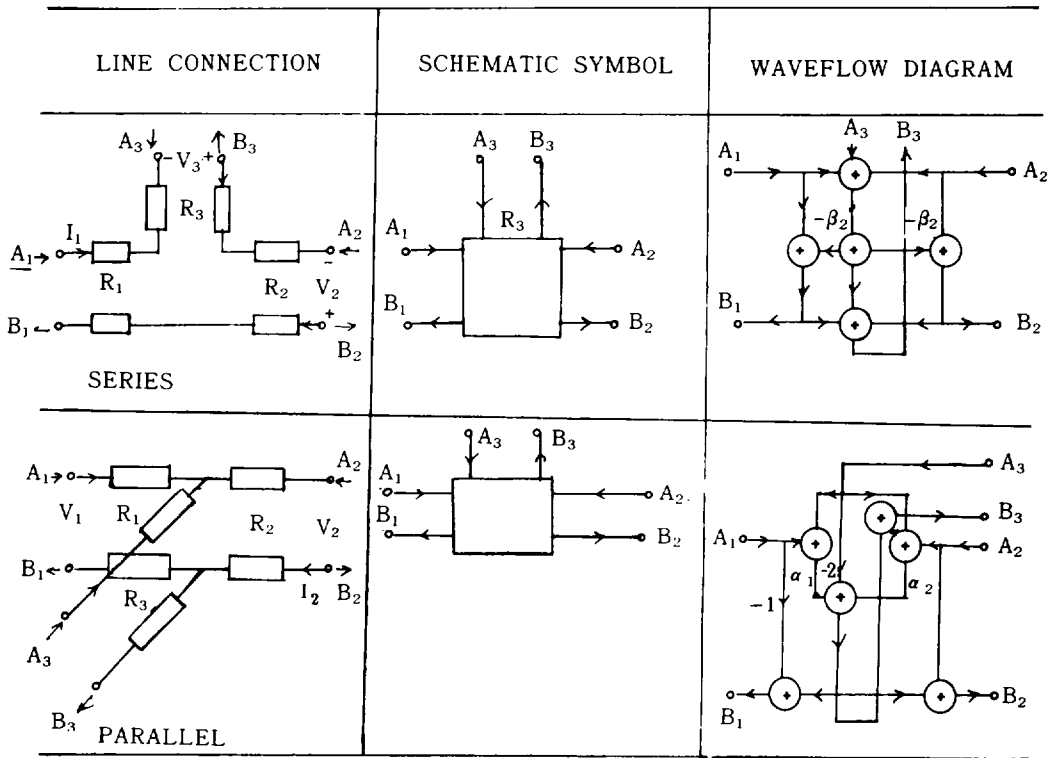


Figure 3. Adaptors

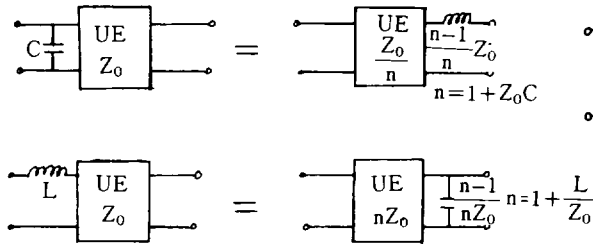


Figure 4. Kurodas Identities

Richards element로 表示된 Figure 1의 構造는 다음과 같이 바뀌어질 수 있다. load 抵抵과 같은 特性 impedance를 갖는 UE가 Filter의 出力과 負荷 사이에 從屬으로 삽입되면 이 UE는 All-pass network가 되므로 전체 network의 周波數 應答는 變하지 않는다. Figure 4의 Kurodas identity를 使用하여 UE를 Filter안으로 移動시키는 過程을 反復하면 Figure 5와 같이 모든 接合點이 UE에 의하여 分離되어 signal flow diagram의 모든 feedback loop에 delay가 나타난다.

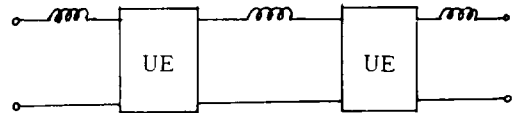


Figure 5. Analog Filter applied Kurodas Identity

(4) 回路의 디지털實現

Kurodas identity를 適用한 結果 나타난 Figure 5와 같은 構造의 디지털 實現을 하려면 Figure 2, Figure 3을 利用하여 Figure 6과 같은 waveflow network을 구한다. 그러나 Figure 6에서 half delay $\frac{T}{2}$ block으로 인해 計算的인 어려움이 있으므로 Figure 7과 같이 $\frac{T}{2}$ block을 feedback path에서 舍하여 주게된다.

2. WDF設計의 알고리즘

本 論文에서 使用된 WDF filter의 設計方式은 다

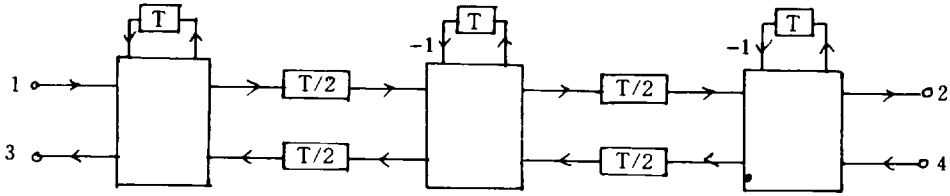


Figure 6. Digital Realization of Fig.5

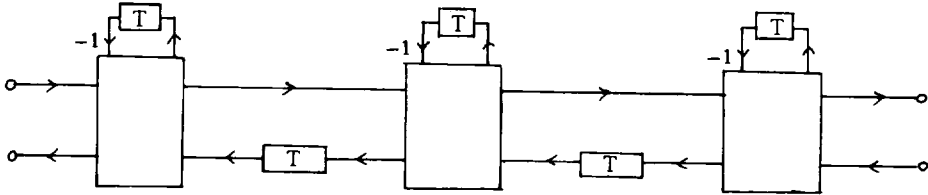


Figure 7. Final realization of 3rd-order low-pass WDF structure

음과 같이 整理할 수 있다.

1) (1)式에서 誘導된 다음式에 의해 周波數 Parameter를 얻는다.

$$W' = \tan \frac{W_0 T}{2}$$

2) 適切한 필터 函數(Butterworth, Chebyshev等)을 구한다.

3) 이 필터 函數를 analog LC ladder network의 傳達函數로 생각하고 analog LC ladder network를 設計한다.

4) 負荷와 나머지 network 사이에 UE($Z_0=R_L$)를 插入하고 Kurodas identities를 適用다.

5) 適切한 adaptor를 使用하여 wave-flow network를 얻는다.

6) Wave flow network의 node에 適切히 狀態 變數를 定해주고 WDF의 差動 方程式을 구한다.

2) 3rd-order Butterworth의 傳達函數는

$$t(s) = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1}$$

3) Power Conservation Law에 의하면

$$|t(jw)|^2 + |e(jw)|^2 = 1 \text{ 이므로}$$

$$\rho(s) = \frac{S^3}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1}$$

入力 임피던스 $Z_{11}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)}$ 이므로

$$Z_{11}(s) = \frac{2S^3 + 2S^2 + 2S + 1}{2S^2 + 2S + 1}$$

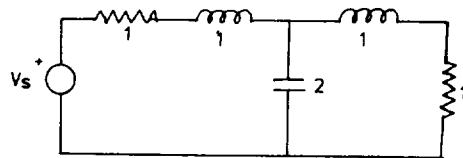


Figure 8. Normalized Butterworth Filter

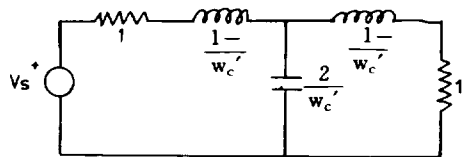


Figure 9. Scaled Butterworth Filter

結果 및 考察

Sampling 周波數가 10KHZ이고 차단 周波數가 100HZ인 3rd-order Butterworth 디지털 필터를 알고리즘에 의해 設計한다.

1) $W_c' = \tan \frac{W_0 T}{2} = \tan(1.8^\circ) = 0.03143$

4) 2個의 UE($Z_0=1$)를 挿入하고 Kurodas Identities를 適用면 Figure 10과 같이 된다. 여기에서

$$n_1 = 1 + \frac{1}{\omega'_c} \quad L = \frac{n_2 - 1}{n_2} n_1$$

$$C = \frac{1}{\omega'_c + 1} \quad n_3 = 1 + C$$

$$n_2 = 1 + \frac{2n_1}{\omega'_c} \quad L_1 = \frac{C}{1+C}$$

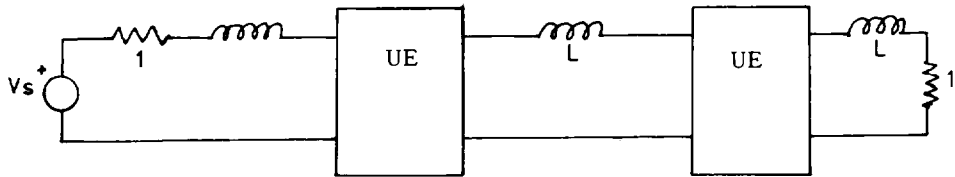


Figure 10. Transmission-Line Network

5) Figure 12에서 (6)式을 使用하면

$$\beta_1 = \frac{-2}{1 + 1/\omega'_c + n_1/n_2}$$

$$\beta_4 = \frac{-2/(1+C)}{n_1/n_2 + L + 1/(1+C)}$$

$$\beta_2 = \frac{-2n_1/n_2}{1 + 1/\omega'_c + n_1/n_2}$$

$$\beta_5 = \frac{-2/(1+C)}{1 + L_1 + 1/(1+C)}$$

$$\beta_3 = \frac{-2n_1/n_2}{n_1/n_2 + L + 1/(1+C)}$$

$$\beta_6 = \frac{-2}{1 + L_1 + 1/(1+C)}$$

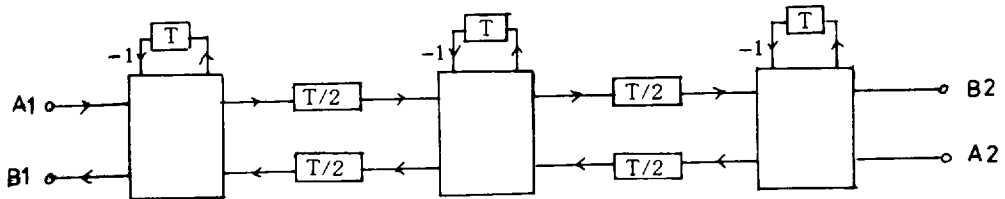


Figure 11. Wave flow Network

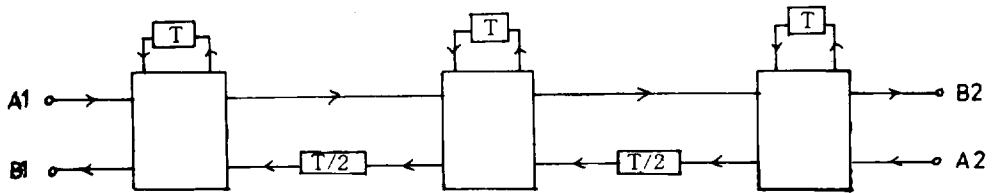


Figure 12. Wave flow Network; $\frac{T}{2}$ Blocks Combined

$$\begin{aligned} X_2(nT) &= X(nT) + X_3[(n-1)T] + X_5[(n-1)T] \\ Y_1(nT) &= X_1(nT) = X(nT) + \beta_1 X_2(nT) \\ X_4(nT) &= \beta_3 X_2(nT) + X_5[(n-1)T] \\ X_3(nT) &= X_1(nT) + X_2(nT) + X_4(nT) \\ X_6(nT) &= X_4(nT) + X_7[(n-1)T] + X_9[(n-1)T] \\ X_5(nT) &= X_4(nT) + \beta_3 X_6(nT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_8(nT) &= \beta_4 X_6(nT) + X_9[(n-1)T] \\ X_7(nT) &= X_5(nT) + X_6(nT) + X(nT) \delta(nT) \\ X_{10}(nT) &= X_8(nT) + X_1(nT) d_{21}[(n-1)T] \\ X_9(nT) &= X_8(nT) + \beta_5 X_{10}(nT) \\ Y_2(nT) &= \beta_6 X_{10}(nT) \\ X_{11}(nT) &= X_9(nT) + X_{10}(nT) + Y_2(nT) \end{aligned}$$

摘 要

Analog LC ladder network에서 transmission-line transformation에 의해 얻어진 WDF構造를 使用함으

로서 디지털 필터의 係數 sensitivity 特性이 改善되어 必要한 係數의 word length가 상당히 줄어들게 할 수 있다.

반면에 이 WDF의 multiplier의 數가 다소 增加하나 짧아진 word length가 이 問題를 補償할 수 있으므로 全體의 cost를 줄일 수 있다.

參 考 文 獻

- Fettweis, A. 1971(a). Digital filter structures related classical Filter Networks. Vol.25.
- Fettweis, A. 1971(b). Some Principles of Designing Digital Filters Imitating Classical Filter Structures. IEEE trans. circuit Theory Vol. CT-18. pp.314~316.
- Fettweis, A. 1972. Pseudopassivity, Sensitivity, and Stability of Wave Digital Filters. IEEE Trans. Circuit Theory Vol. CT-19, pp.668~673.
- Crochiere R. E. 1972. Digital Ladder Structures and Coefficient sensitivity. IEEE Trans. Audio Electroacoust Vol. AU-20, pp.240~246.
- Crochiere R. E. and A. V. Oppenheim. 1975. An Analysis of Linear Digital Network. Proc. IEEE. Vol. 63, pp.581~595.
- Wegener W. 1976. Design of wave digital filters with very short coefficient word length. in Proc. Int. Symp Circuits and Systems. pp.473~476.