교육과학연구, 제14권 제1호, pp. 79-92 (2012. 05)

J대학교 교육대학 1학년 학생의 수학을 보는 전반적인 특성 분석

최 근 배*

이 연구는 수학의 기초적인 내용인 관계 및 집합과 관련된 내용을 중심으로, 수학의 고유한 특성인 수학적 정의, 수학적 정리, 수학적 표현과 해석, 수학적 개념의 이해력 그리고 논리성 등을 중심으로 J 대학교 교육대학 1학년 학생의 특성을 분석하였다. 이 연구의 분석에 의하면 초·중등 학교에서의 결과 우선의 수학교육의 특성이 대학 1학년의 교양수학 과정을 통해서도 크게 변하지 않았음을 알 수 있었다. 이러한 분석의 목적은 교육대학에서의 교양수학의 방향성 선정에 기초적인 자료를 제공하고자 함이다.

* 주제어: 수학적 정의, 수학적 정리, 수학적 표현과 해석, 수학적 개념의 이해력과 논리성

Ⅰ. 서 론

수학은 수학 나름의 고유한 구조와 표현방식을 지니고 있다. 이러한 점이 학생들로 하여금 수학을 어렵게 만들고 또한 교수·학습에 많은 영향을 끼친다.

이미 수학자들이 만들어 놓은 공리, 정의, 정리, 증명의 기본적인 구조를 학생들은 아무런 비판과 중요성에 대한 의식 없이 그냥 받아들이며 또한 수학적 개념의 수학적인 표현에 크게 유념하지 않는 경향이 있다. 단지 학생의 관심은 문제의 답을 구하는데 있다. 이러한 현상은 학습에 있어 좀 더 능동적이여 할 대학생에게도 여전히 존재한다. 실제로, 많은 대학생들은 중등 수학교육과 대학 수학교육의 차이 이상의 심각한 단절을 느낀다(이지현·최영기, 2011).

일반대학에서 배우는 교양수학은 미·적분학이 주를 이루며, 응용과 계산능력을 주관심사로 한다. 따라서 일반대학에서는 교양수학의 교수·학습의 질을 담보하기위한 방안 또는 그 방향성을 어느 정도 정하여 졌다고도 볼 수 있다. 즉, '어떻게 교양수학 과목(지엽적으로, 미·적분학 과목)을 운영할 것인가?'라는 물음에 집중을 하면 된다. 이와 관련된 연구는 많은 논문에 나타나 있다(신향근, 1997; 서종진·유천성·최은미, 2007; 표용수 외, 2007; 전재복, 2008; 표용수 외, 2008; 박형빈·이헌수,

* 제주대학교 교육대학 초등수학교육전공 교수(email: kbchoe@jejunu.ac.kr)
◎ 접수일(2012년 4월 24일), 수정일(1차: 2012년 5월 3일, 2차: 2012년 5월 18일), 게재확정일(2012년 5월 20일)

2009; 표용수 외, 2009; 표용수·임연휘, 2010).

이와는 달리 교육대학의 경우 교양수학은 정해진 교과목이 없으며 또한 2학년부터는, 심화과정이 수학교육과인 학생의 경우를 제외하면, 수학을 내용학적으로 접할 수 있는 기회가 거의 없다. 이러한 이유로 교양수학을 수학의 기초적인 내용 위주로 강의하고 있다.[1] 실제로, 교육대학에서의 교양수학 교과목 실태를 살펴보면(신준식, 2003), 부산교대(수와 논리), 청주교대(수학의 세계I, II), 공주교대(수학의 역사, 수학의 세계), 경인교대(수학문화사, 현대수학의 이해, 레크레이션 수학, 테크놀로지 수학, 생활 속의 수학), 한국교원대 초등교육과(수학의 세계), 광주교대(수학, 수학교육사, 생활과 수학), 제주대학교 교육대학(초등 수학의 세계, 수와 논리)등으로 일반대학처럼 몇 개의 특정 교과목으로 정해진 것이 없고 단지 수학의 기초적인 내용을 강의하고 있음을 볼 수 있다. 또한 교육대학에서의 교양수학과 관련된 연구도 일반대학에 비해서 거의 없는 상황이다. 몇몇 선행연구를 살펴보면, 사용하고 있는 교재의 실태 조사·분석 및 교수요목(정은실·박교식, 2000; 신준식, 2003; 강지형, 2009)과 교양 수학 강좌에 대한 학생들의 인식조사(한대희, 2003)등이 있다. 이 시점에서 교육대학 교양수학의 근본적인 문제는 '예비 교사로서의 순수 수학적인 능력을 어떻게 향상시킬 수 있을까?' 라기 보다는 '예비 교사로서의 수학을 보는 안목을 어떻게 기를 수 있을까?'라고 볼 수 있다. 여기서 말하고 있는 안목이란 일반적인 수학의 특성을 올바르게 알고 또한 바르게 사용하고 있는가를 함의한다.

따라서 본 논문에서는 교육대학교 1학년 학생의 수학을 보는 전반적인 특성을 분석하고자 한다. 구체적으로, 수학의 기초적인 내용인 관계(relation) 및 집합과 관련된 내용을 중심[2]으로, 수학의 고유한 특성인 수학적 정의, 수학적 정리, 수학적 표현과 해석, 수학적 개념의 이해력 그리고 논리성 등을 중심으로 학생의 특성을 분석한다. 여기서 분석의 대상으로 1학년 학생을 택한 이유는 1학년의 수학을 보는 전반적인 특성이 2학년 또는 3학년에 개설될 교과 교육학(초등 수학교육)의 교수·학습 설계에 많은 영향을 미칠 수 있기 때문이다.

II. 연구 방법

본 연구는 예비 교사로서의 수학을 보는 안목과 관련하여, 교육대학 1학년 학생의 수학을 보는 전반적인 특성을 분석한다. 이를 위해서, J 대학교 교육대학 교양수학을 수강하고 있는 42명의 학생을 대상으로, 기말고사 필기시험 결과를 분석하여,

· 수학에서 정의·정리를 어떻게 취급하고 있는가?
· 수학적 표현 및 해석의 능력은 어떠한가?

1) 교육대학의 경우 입학생 중 자연계 출신의 비율이 낮고 또한 초등교사 양성이라는 교육대학의 특성상 일반대학에서 운영하고 있는 미·적분학, 행렬과 벡터 등과 같은 교양수학은 운영이 불가능하다.
2) 신현용(2003)의 연구에 의하면 초등교사 양성기관의 수학기초론 강좌는 보통의 집합론의 내용을 초등교사에 맞게 구성하는 안을 제시하고 있다.

· 수학적 개념의 이해력은 어떠한가?
· 논리성은 어떠한가?

등을 분석하여 교육대학 교양수학 내용에 대한 강의와 관련된 수학교육적인 관점에서 시사점을 얻는다.

Ⅲ. 분 석

1. 분석 방법

문항 1: (1) 주어진 집합 $A = \{a, b, c\}$에 대하여, '동치관계'와 '분할'사이의 관계를 예를 들어 설명하되, 나타날 수 있는 예를 가능한 많이 기술하시오. (2) (1)번 문제에서 얻은 사실로부터, 임의의 집합에서 동치관계와 분할간의 관계를 설명할 수 있는 두 개의 정리를 기술하시오.

문항 1의 (1)은 수학적 정의를 어떻게 생각하며 또한 활용하고 있는가와 관련된 시험문항이다. 즉, 문항 1의 (1)의 반응을 통해서 강의 시간에서 배운 정의의 취급정도를 알아본다. 이것은 문제해결에 있어, 교사는 항상 정의의 중요성을 강조하고 있지만, 대학생의 관점에서 수학적 정의의 중요성을 어떻게 생각하고 있는가를 묻는 문항으로 볼 수 있다.

문항 1의 (2)는 수학에서 정리의 위상과 정리의 이해 정도를 묻는 문항이다. 여기서 말하는 정리의 위상이란 문제해결에 있어서 정리의 중요성 정도를 의미하고, 정리의 이해 정도는 수학적 정리의 기술(記述)문제에 따른 이해정도와 관련된 것이다. 즉, 수학의 정리는 보편적으로 가능한 일반적인 사실로 기술되기 때문에 학생들이 이해하기 어려워한다. 따라서 문항 1의 (2)는 정리의 이해를 어떻게 하고 있는가를 묻는 문항이다. 실제로, 이 문항은 교재에 있는 동치관계와 분할과의 관계를 기술한 정리를 어떻게 이해하고 있는가를 묻는 에 것으로, 일반적으로 서술된 진술내용을 특수화 등을 통해서 이해하고 있는가와 관련된 문항이다.

문항 2: 닫힌구간 $A = [0, 1]$에서의 동치관계 R을 다음과 같이 정의한다.

$x R y \Leftrightarrow x = y$ 또는

$$\{x, y\} = \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \text{ 또는 } \{x, y\} = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$$

이때, 아래의 물음에 답하시오.

(1) A의 원소 $\frac{1}{4}$의 동치류를 구하여라.

(2) A의 원소 1의 동치류를 구하여라.

(3) 상집합 A/R을 기하적으로 표사하여라.

문항 2는 정의의 중요성, 수학적 표현 능력과 수학적 표현의 이해력 및 중요성 그리고 수학적 개념의 이해력 정도 등을 알아 보기위한 것이다. 구체적으로, 먼저, 정의의 중요성은 학생들이 동치류와 상집합의 개념을 숙지 및 이해하고 있는 정도로 판정한다. 둘째, 수학적 표현 능력과 수학적 표현을 중시하는 정도는 동치류와 관련된 기호화 능력과 결과로 판정한다. 셋째, 수학적 표현의 이해력은 기호로 표시된 동치관계의 해석능력으로 검정한다. 끝으로, 수학적 개념의 이해력 정도는 문항 (3)으로 측정한다.

문항 3: 각 자연수 $n \in N$에 대하여, 닫힌구간 $A_n = [0, \frac{1}{n}]$을 고려하자. 다음은

$$\bigcap_{n \in N} A_n = \{0\}$$

가됨을 밝히는 과정이다. 괄호 안을 채워라.

$\bigcap_{n \in N} A_n \neq \{0\}$ 라고 가정하자. 그러면

$$x \in \bigcap_{n \in N} A_n$$

인 영이 아닌 수 x가 존재한다. 다시 말해서,

( )

이제, 자연수 m을

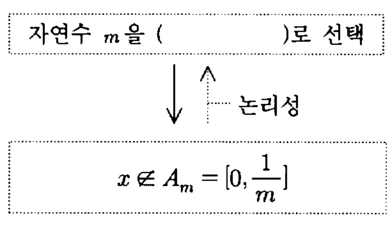
( )

로 선택하자. 그러면 $x \notin A_m = [0, \frac{1}{m}]$이다. 따라서

( )

에 모순이다.

문항 3은 정의의 중요성, 수학적 표현의 이해력 및 중요성 그리고 수학적 논리성을 측정하는 문항이다. 먼저, 정의의 중요성, 수학적 표현의 이해력 및 중요성은 일반화된 교집합의 정의를 이해하고 있는 정도로 판정한다. 수학적 논리성은 모순을 이끌기 위한 자연수 m의 선택 능력으로 측정하고자 한다. 다시 말해서,



[그림 1] 논리성 측정

2. 분석

가. 수학적 정의

학생들이 얼마나 정의를 중요하게 생각하는지를 알아보기 위해서, 문항 1의 (1)에서는 동치관계와 분할의 정의를, 문항 2에서는 동치류와 상집합의 정의를, 문항 3에서는 일반화된 교집합의 정의를 알고 있는지를 알아본다.

<표 1> 수학적 정의

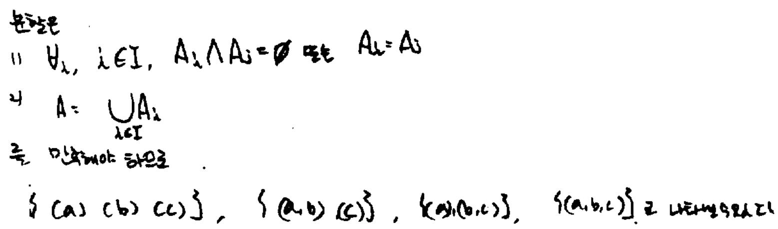
	분할	동치관계	동치류	일반화된 교집합	상집합
이해	32	21	9	3	6
피상	1	5(4)	13		
암기		4			
모름	9	12	20	39	36

※ 동치관계 범주의 피상에서 괄호안의 숫자 4는 판정불가인 학생의 수이다.

<표 1>의 분류에서 이해와 피상은 개념적으로 맞는 것을, 암기의 경우는 서술은 맞지만 개념이 틀린 경우 또는 구체적인 예에 적용을 못하는 경우로 그냥 정의를 외운 것을 의미한다. 특히, 이해와 피상의 구분은 수학적 표현의 문제를 고려한 것이다. 즉, 피상의 경우는 개념은 알고 있지만 수학적 표현이 적절하지 못한 경우를 의미한다.

<표 1>에서 분할과 동치관계는 구체적인 예를 통해서 그 정의를 이해하고 있는지를 파악하고자 하였다. 분할은 일상적인 용어에 가까워서 79%(42명 중 33)의 학생이 정의를 이해하고 있었다.

대부분의 학생(42명 중 32)이 분할을 주어진 집합 $A = \{a, b, c\}$ 을 조각내는 활동을 통해서 분할을 나타내고 있기 때문에 정확한 수학적 표현의 문제가 잘 나타나지 않았지만, 분할에서 피상으로 분류된 [그림 2]는 수학적 표현을 오용한 경우를 보여준다([그림 2]의 마지막 줄 참고).



[그림 2] 분할 : 수학적 기호의 오용

<표 1>에 의하면 동치관계와 관련된 정의의 이해는 52%(42명 중 22명)를 나타내고 있다. 수업시간에 가장 많이 접한 용어 중 하나이지만 생각보다도 낮은 수준이다. [그림 3]은 동치관계 분류에서

판정불가를 제외한 피상으로 분류된 학생의 반응으로 개념적으로는 맞지만 (동치)관계 표현에 있어 수학적 기호의 오용을 나타내고 있다.

예) ① $\{a\}$ $\{b, c\}$ → 분할.
동치관계 · $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$, $\{c, b\}$
② $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ → 분할
동치관계 $\{(a, a)\}$ $\{b, b\}$, $\{c, c\}$
③ $\{a, b\}$, $\{c\}$
동치관계. $\{(a, a)(b, b)\}$ $\{b, a\}$, $\{c, c\}$

[그림 3] 동치관계 : 수학적 기호의 오용

동치관계로부터 동치류의 개념이 나타나기 때문에, <표 1>에 의하면, 동치류는 동치관계와 비슷한 수준의 개념적 이해를 보여주고 있지만 기호 표현에 있어서 동치관계 보다 좀 더 어려움을 보여준다. 실제로, [그림 4]는 동치류와 관련된 개념은 알고 있지만 수학적 표현에 오류를 보여 주고 있으며, <표 1>의 동치류와 관련된 피상의 범주에 속하는 대부분의 학생들은 이와 유사한 오류를 범하고 있다.

(1) A의 원소 $\frac{1}{4}$의 동치류 ⇒ $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$
(2) A의 원소 1의 동치류 ⇒ $\{1, 1\}$, $\{\frac{2}{3}, 1\}$.

(1) $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$
(2) $\{(1, 1)\ (\frac{2}{3}, 1)\}$

[그림 4] 동치류 : 수학적 기호의 오용

일반화된 교집합의 정의는 이미 중등교육과정에서 배운 유한개 집합들의 교집합의 관념의 자연스러운 일반화이지만 <표 1>에 의하면 정답률이 7%밖에 되지 않았다. 이것은 학생들이 수학적 기호의 표현에 익숙하지 못함으로 비롯된 것일 수 있다.

[그림 5]는 유한개 집합들의 교집합과 관련된 관념이 무한개 집합들의 교집합의 관념으로 일반화되지 못함을 보여주고 있다.

$\bigcap_{n \in N} A_n \neq \{0\}$라고 가정하자. 그러면

$$x \in \bigcap_{n \in N} A_n$$

인 영이 아닌 수 x가 존재한다. 다시 말해서,

($A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$ 들 사이에 0 아닌 다른 수가 공통으로 포함되어 있다)

[그림 5] 유한과 무한

상집합의 개념은 동치관계, 동치류의 개념을 알아야 얻을 수 있는 개념이기 때문에 선행하는 두 개념보다 좀 더 어려운 개념으로 볼 수 있다. 실제로, <표 1>에 의하면 이해의 수준이 14%로 아주 낮은 수준임을 보여 주고 있다. [그림 10]은 상집합의 개념을 잘 이해하고 있는 학생의 반응이다.

나. 수학적 정리

수학에서의 정리(Theorem)는 문제해결에 중요한 수단으로 사용되지만 일반적으로 학생들은 정리를 이해하려고 노력하지 않는 경향이 있다. 이러한 원인 중에 하나는 정리의 진술 내용이 특수한 사실로 진술되는 것보다 일반적인 사실을 중심으로 진술되는 경향이 있고 또한 정리의 정당화는 특수한 예를 가지고 검정을 해보는 것이 아니라 연역적인 방법으로 증명을 하는 것이 순수수학에서의 일반적인 양식이기 때문이다.

문항 2의 (2)는 교재에 있는 동치관계와 분할과의 관계를 기술한 정리를 학생들이 어떻게 이해하고 있는가를 묻는 것으로, 일반적으로 서술된 진술내용을 특수화 등을 통해서 이해하고 있는가를 묻는 문항이다.3)

<표 2>는 학생들이 정리를 어떻게 취급·이해하고 있는지, 개념의 일반화 및 조직화의 능력은 어느 정도인지를 보여주고 있다. 실제로, 무응답 및 개념이 없음이 76%로 정리를 중시하지 않음을 알 수 있다.

<표 2> 수학적 정리

	양호	피상적	무응답 및 무개념
정리, 조직화	2	8	32

<표 2>에서 피상적인 반응을 보인 19%(42명 중 8명)의 학생 대부분은 분할과 동치관계 사이의 구체적인 관계를 일반화하지 못하고 그냥 피상적인 일대일 대응의 관점으로, 암기(수업시간에 강조한 것)에 의존한 반응을 보이고 있다. [그림 6]은 비교적 양호한 수학적인 조직화 능력을 보여주고 있다.4)

3) 교재(김해규·최근배·현종익, 2009)에 서술된 동치관계와 분할과의 관계를 기술한 정리는 다음과 같다.

정리 4.7 R을 집합 A에서의 동치관계라고 하자. 그러면 동치류의 모임 $\{R_x\}_{x\in A}$는 A의 분할이다.

정리 4.8 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$를 집합 A의 한 분할이라고 하자. R을 다음

$$R=\{(x,y)\in A\times A \mid \exists i\in I,\ x,y\in A_i\}$$

과 같이 정의하자. 그러면 R은 A에서의 동치관계가 된다.

이와 관련된 전반적인 교재 내용구성은 특수한 예로부터 시작하여 일반화의 관점으로 정리를 만들고 이후 연역적 증명을 하는 구조이다.

4) [그림 6]의 수학적인 조직화(일반화)를 이끌기 위한 문제에 대한 학생의 답안은 다음과 같다. 한가지의 경우 $\{a,b,c\}$를 찾지 못했지만 비교적 양호한 반응으로 볼 수 있다.

(2)

① 어떠한 집합 A를 분할하면 분할된 각 부분끼리 동치관계를 이룬다.

② 어떠한 집합 A의 원소를 동치관계에 따라 나누면 그 결과가 하나의 분할과 같은 형태가 된다. (즉, 분할의 조건을 만족한다)

[그림 6] 양호한 수학화

다. 수학적 표현과 해석

학생들의 수학적인 기호 표현의 문제를 조사하기 위해서, 동치관계와 동치류의 표현을 중심으로 조사하였다.

<표 3>에서 틀린 표현의 예는 집합관념 무시([그림 7] 참고), 쌍과 순서쌍 구분을 무시([그림 3] 참고)하는 경우와 동치관계의 표시 R을 다른 문자로 사용하는 경우가 대부분이다.

<표 3> 동치관계의 표현

	정확한 표현	틀린 표현	모름	제외
동치관계	19	5	14	4

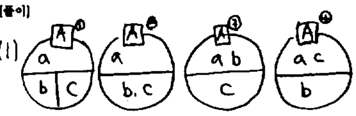
ex) $R = (a.a)(a.b)(b.a)(b.b)(c.c)(d.d)$

$R_a = (a.a)(a.b)(b.a)(b.b) = R_b \quad R_c = (c.c) \quad R_d = (d.d)$

[그림 7] 동치관계

<표 4>의 동치류 표현에서 정확한 표현의 비율이 19%로 나타났다. 비율이 낮은 이유는 문항 2에 주어진 동치관계로부터 동치류를 바르게 해석하지 못한 이유가 원인일 수 있다. 즉, 동치류의 관념

[풀이]

(1)


분할은 위와 같이 총 4가지가 있다.
이 때 분할되어진 각 영역 안의 원소들은 동치관계를 가진다

①과 같이 분할되어 있으면 동치관계 R은 {(a.a) (b.b) (c.c)} 이고
② 〃 {(a.a)(b.b)(c.c)(b.c)(cb)} 이고
③ 〃 {(a.a)(b.b)(c.c)(a.b)(b.a)} 이고
④ 〃 {(a.a)(b.b)(c.c)(a.c)(c.a)} 이다.

이때, 분할은 빠지는 원소가 있어서는 안되고,
각 그룹마다의 원소가 겹쳐서도 안되며,
모든 그룹의 합집합이 A가 되어야 한다는 조건이 있다
그런데, 동치관계에 따라 집합을 나누었을때, 바로 이러한 분할도 만족한다.

을 집합의 관념(주어진 한 원소와 관계있는 것들의 모임[5])보다 쌍 또는 순서쌍(이 원소는 저 원소와 관계있다)의 관념이 선행하였다고 볼 수 있다.([그림 8])과 ([그림 9] 참고)

<표 4> 동치류의 표현

	정확한 표현	틀린 표현	제외
동치류	8	30(7)	4

$R_{\frac{1}{4}} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

$R_1 = \{1, 1\}$ or $\{\frac{2}{3}, 1\}$

[그림 8] 동치류의 표현 Ⅰ

(1) A의 원소 $\frac{1}{4}$의 동치류를 구하여라. → $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(2) A의 원소 1의 동치류를 구하여라. → $(1, 1)$ $(\frac{2}{3}, 1)$ $(1, \frac{2}{3})$

(3) 상집합 A/R을 기하적으로 묘사하여라.

[풀이]

[그림 9] 동치류의 표현 Ⅱ

기호적 표현의 해석력은 문항 2의 (1)과 (2) 및 문항 3의 일반화된 교집합의 정의를 중심으로 조사한다. 특히, 문항 2에서는

$$xRy \Leftrightarrow x = y \text{ 또는 }$$
$$\{x, y\} = \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \text{ 또는 } \{x, y\} = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$$

의 해석력을 알아보기 위해서, 동치류와 관련된 문항 (1)과 (2)의 결과를 통해서 추적하였다.

<표 5>에 따르면, 학생들의 수학기호 해석력이 높지 않음을 알 수 있으며, 특히 일반화된 교집합의 정의의 해석력은 대학교에서 처음으로 접하는 개념이라 그런지, 해석력이 상당히 낮은 편이다.

<표 5> 기호적 표현의 해석력

		양호	모름
동치류	(1)	31	11
	(2)	22	20
일반화된 교집합		4	38

5) 동치류: $R_a = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$

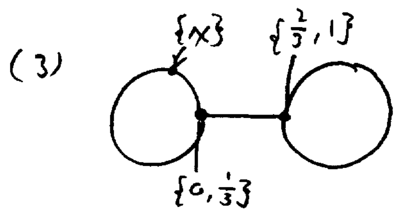
라. 수학적 개념의 이해력

수학적 개념의 이해력은 문항 2의 (3), 상집합을 기하적으로 표현할 수 있는 능력으로 측정을 한다. 상집합은 동치류들의 모임으로 원소가 집합인 집합족(family of sets)이다.

<표 6>에 의하면 수학적 개념의 이해력과 관련된 측정에서 정답률이 14%(42명 중 6명)정도로, 학생들이 수학적인 개념을 어떻게 취급하고 있는지는 어느 정도 파악할 수 있다. 즉, 학생들이 수학을 학습할 때 개념의 이해를 중심으로 하기보다는 암기 위주의 방법을 택하고 있음을 알 수 있다.6) [그림 10]은 올바른 학생의 반응을 보여준다.

<표 6> 수학적 개념의 이해력

	맞음	틀림
이해력	6	36



[그림 10] 상집합의 기하적 표현

마. 논리성

[그림 1]과 같이 논리성의 측정은 문항 3을 이용한다.

<표 7>에서와 같이 학생들의 수학적인 논리성은 매우 낮게 나타났다. 실제로, 42명 중 3명을 제외한 39명(93%)의 학생이 무응답 또는 개념이 없음을 보였다.

---

6) 교재(김해규·최근배·현종익, 2009)의 구성을 살펴보면, 이와 유사한 예제가 있다.

■ **예제 4.6** 닫힌구간 $I = [0,1]$에서의 관계 R를 다음과 같이 정의하자.

$$xRy \iff x = y \text{ 또는 } \{x,y\} = \{0,1\}$$

또한 연습문제에는 주로 $I \times I$에서의 동치관계의 예시를 다루고 있다. 예를 들어,

5. 다음에 주어진 집합 $A = [0,1] \times [0,1]$에서의 동치관계 R에 대하여

$$(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ 또는} \\ \{x_1, x_2\} = \{0,1\} \text{ 이고 } y_1 = y_2 \end{cases}$$

(a) $R_{(1/3,1/2)}$, $R_{(0,1/3)}$, $R_{(1,2/3)}$를 구하여라.

(b) 상집합 A/R을 기하적으로 표시하여라.

학생들의 틀린 반응의 대부분은 이러한 범주에 속하고 있다.

[그림 11]은 논리성이 양호한 학생의 반응이다.

[그림 12]는 직관적인 접근을 보여 주는 학생의 반응이다. 귀류법에서 모순을 찾는데 있어 구체적인 방법(존재하는 x로부터 모순을 이끄는 자연수 m을 선택)이 아닌 직관적인 접근(극한의 관념)을 생각하고 있다.

<표 7> 논리성

	양호	모호(직관)	무응답 및 무개념
논리성	1	2	39

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \{0\}$라고 가정하자. 그러면

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

인 영이 아닌 수 x가 존재한다. 다시 말해서,

(모든 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 포함되는 x가 존재한다.)

이제, 자연수 m을

($A_m=[0,\frac{1}{m}]$로 하는데, $\frac{1}{m}<x$ 으로)

로 선택하자. 그러면 $x \notin A_m = [0, \frac{1}{m}]$이다. 따라서

(모든 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 포함되는 x가 존재한다.)

에 모순이다.

[그림 11] 논리성 I

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \{0\}$라고 가정하자. 그러면

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

인 영이 아닌 수 x가 존재한다. 다시 말해서, 의미

(모든 닫힌구간 $A_n=[0,\frac{1}{n}]$에는 0이 아닌 x가 포함된다는 의미이다)

이제, 자연수 m을

(한없이 커진다고 생각했을때 구간 A_n은 점점 $[0, 0]$이 되어간다.)

로 선택하자. 그러면 $x \notin A_m = [0, \frac{1}{m}]$이다. 따라서

($\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \{0\}$ 이라는 가정 | 이 구간에 속하는 숫자는 0 밖에 없으므로 x가 0이 아닐때는 항상 포함할 수 없다.)

에 모순이다.

[그림 12] 논리성 II

Ⅳ. 논의 및 결론

사범대학과는 달리 교육대학은 특성상 전공을 불문하고 교육과정에서 많게 또는 적게 수학과 관

련된 사항을 반드시 이수하여야 하여야한다. 특히, 수학교육전공이 아닌 경우 순수수학적인 내용을 접할 수 있는 기회는 교양수학에 한정된다. 일반대학에서는 다양한 방법으로 교양수학을 개설하고 있지만, 교육대학에서의 교양수학은 학점이 학기당(과목당) 2학점으로 어떤 수학적인 내용을 담아야 할지 막막하다. 따라서 교육대학에서의 현명한 선택은 내용학적인 관점에서의 교사의 수학적인 능력을 강조하는 것보다는 수학을 보는 안목을 기르는 데 초점을 둔 교수·학습의 방법일지 모른다.

이 논문에서는 수학을 보는 안목을 기르는 데 초점을 둔 교수·학습의 방법을 위한 기초적인 자료 수집의 차원에서 J대학교 교육대학 1학년 학생의 수학을 보는 전반적인 특성을 분석하였다. 분석된 결과로부터 얻을 수 있는 교육적인 시사점은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 수학적 정의를 중요하게 여기지 않은 경향이 있다는 점이다. 수학의 구조적인 측면에서 보면 정의는 개념의 시점이자 종점일 수 있는 중요한 것이지만 학생들은 문제해결에서 정의의 중요성을 크게 인식하지 못하고 있다. 이것은 과거의 학습 경험의 문제가 주요한 원인일 수 있다. 즉, 학생들은 개념정의에 기초한 논리적 문제해결보다는 개념정의(concept definition; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Tall, 1991/2003)와 관련된 피상적인 개념이미지(concept image; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Tall, 1991/2003)를 통해서 문제해결을 하는 보편적 경향을 띤다. 실제로, 주어진 단원에 주어진 연습문제를 다 풀어 보고 시험을 치렀는데도 불구하고 "왜 수학 시험에서의 성적이 잘 나오지 않는 걸까요?"라는 질문을 하는 학생을 자주 접한다. 이유는 개념정의와 개념이미지 사이의 소통의 부재라고 볼 수 있다. 즉, 문제해결에 직관과 통찰은 개념이미지가 중요한 역할을 하지만, 대학수학에서 강조 하는 형식화를 위한 논리적인 기술의 문제는 개념정의를 통해야 하기 때문이다.

또한 <표 1>에 따르면 대학수학에서 비로소 접할 수 있는 유한에서 무한으로의 일반화의 관념과 외연적 정의(extension definition; 우정호, 2006)[7]의 이해도가 많이 부족함을 알 수 있다.

둘째, 학생들은 수학적 정의와 마찬가지로 수학적 정리를 중요하게 여기지 않는다. 수학적 정리는 수학화의 결과로 가능한 일반적으로 서술되며, 이러한 이유로 인하여 학생들의 수학적 정리에 대한 정신적 이미지 형성에 어려움을 초래하고, 결과적으로 학생들은 정리를 수동적으로 받아드리는 경향을 보인다. 결국, 학생들의 능동적인 국소적 조직화의 경험이 부족함이 주요한 원인 중 하나일 수 있다.

셋째, 학생들은 수학적 표현에 있어서 크게 신경을 쓰고 있지 않음을 알 수 있다. 특히, 표현의 일관성과 외연(범위)의 문제가 많이 나타났다. 수학적 표현의 해석력 또한 많은 문제점이 있음을 알 수 있었다. 이러한 현상은 선다형 문제를 위주로 해답을 선택하는 과거의 경험이 큰 원인일 수 있다.

끝으로, 수학적 개념의 이해력과 논리성도 낮게 나타났다.

위와 같은 분석결과는 우리의 교육환경에 비추어 보면 이미 예견된 결과일지 모른다. 한 학기의 교양수학을 통해서 과거의 학습습관을 바꿀 수는 없지만, 분석에서 나타난 문제점을 바탕으로 적절한 교재의 선정과 효율적인 교수·학습방법을 선택하면 학생들의 수학을 보는 안목을 넓힐 수 있다고 생각한다.

---

7) 외연주의는 현대수학의 개념정의 패턴을 지배하고 있다. 외연적 개념 구성 패턴은 다음과 같이 기술 할 수 있다. 동치관계 R이 정의된 집합 S는 동치류로 분할되며 동치류들의 집합인 상집합 S/R을 얻는다. 이때, 동치류는 주어진 집합S에 속하는 대등한 원소의 공통성질인 개념의 외연적 정의이다.(우정호, 2006)

참고문헌

강지형(2009). 교육대학교 교양수학 교수요목 선정을 위한 방향 탐색. **공주교육논총**, 46(2), 1-24.

김해규 · 최근배 · 현종익(2009). **초등학교 교사를 위한 수학 기초론.** 서울: 교우사.

박형빈 · 이헌수(2009). 대학생들의 교양수학에 대한 인식과 교양수학의 긍정적 인식변화를 위한 방안. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 23(4), 999-1014.

서종진 · 유천성 · 최은미(2007). 대학 교양수학의 교육 내용 구성에 관한 고찰-생명 · 나노 관련 분야를 중심으로-. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 21(3), 559-573.

신준식(2003). 초등교사 양성대학의 초등수학교육에 대한 교수-학습 프로그램 개발. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 42(4), 453-463.

신향근(1997). 컴퓨터를 이용한 대학 교양수학 교수법의 개선방안. **대한수학교육학회 논문집**, 7(1), 171-197.

신현용(2003). 교사 양성대학의 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 42(4), 431-452.

우정호(2006). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

이지현 · 최영기(2011). 학교수학과 대학수학에서 정의와 증명 개념 변화에 대한 수학사적 분석. **수학교육학연구**, 21(1), 57-65.

전재복(2008). 바람직한 대학기초수학 교육과정 운영방안 -공학기초수학을 중심으로-. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 22(4), 399-416.

정은실 · 박교식(2000). 초등학교 교직수학에 관한 연구(2)-교육대학교 교양수학 교재분석 및 초등학교 교직수학 교수요목 탐색. **대한수학교육학회지 수학교육연구**, 10(1), 115-137.

표용수 · 임연휘(2010). 대학 교양수학에서 개인지도가 학업성취에 미치는 영향. **한국수학교육학회 <제45회 전국수학교육연구대회 프로시딩>**, 73-82.

표용수 · 조성진 · 정진문 · 박진한(2009). 교양수학 교과목에 대한 교수-학습법 개선 방안 -기초미적분학 교과목을 중심으로-. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 23(3), 823-848.

표용수 · 조성진 · 정진문 · 심효섭 · 박동준 · 차지환(2007). 수학 관련 교양교과목에 대한 교수-학습법 개선 및 교재 개발. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 21(3), 483-497.

표용수 · 조성진 · 정진문 · 심효섭 · 박동준 · 차지환(2008). 교양수학 교과목 교수-학습법 개선 방안. **수학교육학논총**, 33, 251-269.

한대희(2003). 교양 수학 강좌에 대한 학생들의 인식. **청주교육대학교 과학교육연구소 논문집**, 24, 147-171.

Tall, D.(2003). **고등수학적사고**[*Advanced Mathematical Thinking*]. (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사. (원전은 1991에 출판)

Tall, D., & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

<Abstract>

An Analysis on the Characteristics of the General Notion about Mathematics of the Teachers College's Freshmen at the Jeju National University

Choi, Keunbae
(Jeju National University)

In this article, we intend to analyze the characteristics of the general notion about mathematics of teachers college's freshmen at the jeju national university focused on: definition, theorem, mathematical representation and interpretation, the abilities for the understand of mathematical concept, and reasoning. The main purpose of this analysis is to propose a fundamental data for a desirable direction of basic mathematics at university of education. According to our analysis, the freshman's results-oriented educational characteristics about mathematical viewpoints obtained from the school mathematics did not change during the first semester of the liberal mathematics.

<Key words> Mathematical definition, Mathematical theorem, Mathematical representation and interpretation, The abilities for the understand of mathematical concept, and reasoning