聯立方程式과 微分의 關係에 대한 研究

高 成 保* · 高 鳳 秀**

The Study of Some Relations between the System of Equations and Differentials

Ko, Sung-Bo · Ko, Bongsoo

Abstract

Some relations between the system of equations and differentials are studied, and using the Inverse Function Theorem of several variable functions multiplicity results of solutions of the system of equations are studied.

緖 論

中學校 또는 高等學校 數學時間에 聯立方程式에 關한 內容을 가르치다 보면 聯立方程式의 풀이 過程에서 여러가지 疑問點들을 가질 수 있다. 그러한 疑問點들을 들어보면 첫번째 疑問點은 三元一次連立方程式의 解를 구하는 過程에서 여러가지 方法들, 例를 들면 加減法 또는 代入法을 利用하여 解를 구하는 데 加減法을 利用하여 얻은 解와 代入法을 利用하여 얻은 解가 항상 같을 것인가? 라는 質問에 대한 대답은 一致한다고 할 것이다. 그렇다면 그런 事實을 어떻게 證明할 것인가? 대부분 이러한 事實에 대한 證明은 行列을 利用하리

* 신창중학교

** 제주대학교 사범대학 수학교육과

라 본다. 그러나 本 論文에서는 微分개념을 利用하여 그 事實을 證明하려 한다.

두번째 疑問點은 一般的인 聯立方程式의 解를 구하는 過程에서 方法을 달리하여 얻은 解들은 서로 相異할 것인가? 여기서 或者는 解를 구하여 比較하여 보면 알 수 있다고 대답할 것이다. 그러나 이러한 대답은 신빙성이 상당히 결여되어 있다.

왜냐하면 一般的인 聯立方程式은 풀어내기가 무척 까다롭기 때문이다.

本 論文에서는 聯立方程式을 풀지는 못하더라도 위의 質問에 대한 대답을 多變數函數의 微分에서 중요한 逆函數定理(inverse function theorem)를 利用하여 硏究하려 한다.

本 論文의 第一章에서는 本 論文을 작성하는 데 必要한 제반 定義와 記號들을 叙述한다.

第二章에서는 일변수함수에 대한 微分의 定義, 다변수함수에 대한 미분의 定義, 逆函數定理를 소개한다.

第三章에서는 위에서 소개한 첫번째 疑問點을 解析學的 方法 즉 逆函數定理를 利用하여 명확한 解를 찾는 方法을 소개하고 두번째 의문점을 微分可能한 多變數 函數의 逆函數定理를 利用하여 硏究된다.

第一章

數學的인 記號와 定義들

n-차원 유클리디안空間은 可能한 모든 點($x_1, x_2, \cdots, x_n$)들의 集合으로서 (여기서 x_i는 實數(real number), 덧셈

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

스칼라 곱(scalar product)

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$$

內的(inner product)

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot(y_1, y_2, \cdots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

이 定義되고, 덧셈과 스칼라 곱에 의하여 벡터공간(vector space)〔참고문헌 4〕이 되며, 基本基底(standard basis)

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\quad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots,\quad e_3 = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1)$$

를 갖는다. 그 空間을 一般的으로 R^n 이라고 表示한다.

R^n 상의 점 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대한 標準(norm)을 $|x|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$라고 定義하면

그 標準에 의하여 R^n 상에서 두 점 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$와 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 간의 거리(metric)가 다음과 같이 정의된다.

$$|x-y| = [(x_1-y_2)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$$

R^n의 部分集合 D의 한 점 x가 D의 內部點(interior point)이라는 定義는 x와 충분히 가까운 모든 점들이 D에 포함된다.

D가 R^n의 開部分集合(open subset)이라는 定義는 D내의 모든 점이 內部點(interior point)이다.

D가 R^n의 開球(open ball)라는 定義는 D가 R^n의 開部分集合이고 球(ball)이다.

D가 R^n의 閉部分集合(closed subset)이라는 定義는 D의 餘集合의 開部分集合이다.

D의 폐포(closure)의 정의는 D를 포함하는 가장 작은 閉部分集合이다.

R^n 상의 수열 $\{x_n\}$을 코시(Cauchy)수열이라고 할 때는 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 어떤 자연수 N이 다음 條件을 만족하면서 存在한다.

N보다 큰 임의의 두 자연수 n m>N에 대하여 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

R^n이 完備性을 갖는다는 定義는 R^n의 임의의 코시수열은 收斂한다. 사실 R^n의 完備性에 대한 事實은 참고문헌 1과 2에 자세하게 취급되었다.

D가 볼록집합(convex set)이라는 定義는 D내의 임의의 두 점 x와 y에 대하여 모든 t, $(0<t<1)$에 대하여 $tx+(1-t)y$는 D에 포함된다.

線形函數 $L:R^n\to R^m$에 대하여 $\|L\|$은 R^n의 單位球(unit sphere)上의 모든 點 x에에 대한 $\|Lx\|$ 標準들의 최대값이다.

函數 $F:D\to R^m$에 대하여 항상 좌표함수(coordinate function) $F_1, \cdots, F_m$들이 다음 條件들을 滿足하면서 存在한다.

$$F(x)=(F_1(x), \cdots, F_m(x))$$

$F:D\to R^m$가 C^1-函數가 된다는 定義는 함수 F의 제1계 導函數 F'가 連續이다.

第二章

多變數 函數에 關한 導函數의 定義와 逆函數定理

函數 $f:(a,b)\rightarrow R$가 區間 (a,b)上의 한 點 x에서 微分可能하다고 할 때는 다음의 極限狀況

(1)…………………………… $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

이 極限을 갖는다 그리고 그 극한값을 $f'(x)$라고 표시한다. (1)은 다음과 같이 나머지함수(remainder function)를 利用하여 變形된다.

(2)…………………………… $f(x+h)-f(x)=f'(x)h+r(h)$

여기서 $r(h)$는 나머지함수(remainder function)이고 다음 條件을 滿足한다.

(3)…………………………… $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{r(h)}{h}=0$

(2)의 表現에서 $f'(x)$는 하나의 數(number)이기도 하지만 하나의 一次函數로 생각할 수도 있다. 따라서 함수값들의 차 $f(x+h)-f(x)$는 h에서의 一次函數의 값과 아주 작은 나머지의 합으로 표시된다. 고봉수 교수(Ph.D)의 見解에 따른다면 $f'(x)$는 점 x에서 函數 f의 導函數이고, $f'(x)h$는 점 x서 函數 f의 h에 관한 微分이다. 위의 一次函數 用語를 使用하면 多變數函數들에 관한 導函數도 定義될 수 있다.

n-차원 유클리디안 공간상의 開部分集合 D에서 정의된 n변수함수 $F:D\rightarrow R^m$에 관해서 정의역 D의 한 점 x에서 함수 F가 微分可能하다고 할 때는 어떤 線形函數 $L:R^n\rightarrow R^m$이 다음 두 항등식

(4)…………………………… $F(x+h)-F(x)=L(h)+r(h)$

(5)…………………………… $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{|r(h)|}{|h|}=0$

을 滿足하면서 存在한다. (4)에서 L을 점 x에서 함수 F의 導函數(derivative)라 하고, $L(h)$를 점 x에서 함수 F의 점 h에 관한 微分(differential)이라 하며, 그리고 $r(h)$를 나머지함수라고 한다.

다음 定理는 (4)에서 기술되는 線形函數 L이 存在한다면 그것은 唯一(unique)하다는 事

實이다.

〔定理 1〕 만일 두 線形函數 L_1 과 L_2 가 (4)를 同時에 滿足한다면 $L_1 = L_2$ 이다.

(證明) $B = L_1 - L_2$ 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} B(h) &= |L_1(h) - L_2(h)| \\ &= |F(x+h) - F(x) - L_2(h) + L_1(h) - F(x+h) + F(x)| \\ &\leqq |F(x+h) - F(x) - L_2(h)| + |F(x+h) - F(x) - L_1(h)| \\ &= |r_2(h)| + |r_1(h)|. \end{aligned}$$

여기서 $r_2(h)$ 와 $r_1(h)$ 는 線形函數들 L_1 과 L_2 에 관한 나머지함수들이다. $h \neq 0$ 하면

$$\lim_{t \to 0} \frac{|B(th)|}{|th|} = 0.$$

B는 두 線形函數의 차이므로, 역시 B도 線形函數이다. 따라서

$$\lim_{h \to 0} \frac{B(h)}{|h|} = 0.$$

그러므로 $B(h) = 0$. 위의 結果는 모든 $h \neq 0$ 에 대하여 滿足하므로, $B = 0$ 이다. (증명끝)

定理의 結果에 의하여 一般的으로 L을 $F'(x)$ 로 表示한다. $F'(x)$ 를 實際的인 問題를 解決하는 데 利用하려면 $F'(x)$ 를 계산할 수 있다면 좋을 것이다. 다음 定理는 導函數 $F'(x)$ 를 偏導函數를 사용하여 나타내고 계산할 수 있다는 사실이다.

〔定理 2〕 n - 차원 유클리디안 空間 (Euclidean space) 의 開部分集合 (open subset) D에서 定義된 함수 $F : D \to R^m$ 가 정의역 D의 점 x 에서 微分可能하면, 모든 一階 偏導函數들 $(D_jF_i)(x)$ 이 存在하고,

$$F'(x) = \begin{bmatrix} (D_1F_1)(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (D_nF_1)(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (D_1F_m)(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (D_nF_m)(x) \end{bmatrix}$$

(證明) $\{e_1 \cdots, e_n\}$ 와 $\{u_1 \cdots, u_n\}$ 를 標準基底들 (standard bases) 이라고 하자. 우선 j를 고정한다. 함수 F가 점 x 에서 微分可能하므로, 항등식

$$F(x+te_j)-F(x)=F'(x)(te_j)+r(te_j)$$

이 충분히 작은 모든 t 에 대하여 成立하고,

$$\lim_{t\to 0}\frac{|r(te_j)|}{t}=0$$

$F'(x)$ 의 線形性에 의하여,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+te_j)-F(x)}{t}=F'(x)e_j$$

따라서 함수 F 의 座標函數들 (coordinate functions) 이 F_i 이므로

$$F'(x)e_j=\sum_{i=1}^{m}(D_jF_i)(x)u_i.$$

그러므로, (D_jF_i) 는 行列 $F'(x)$ 의 i 번째 列과 j 번째 行에서 마주치는 部分에 위치하게 된다. (증명끝)

多變數函數들의 微分性質에도 一變數函數들의 微分 性質에서 얻을 수 있는 平均値 定理 (mean value theorem) 와 類似한 다음 定理를 얻을 수 있다.

〔定理 3〕 n-차원 유클리디안 空間 (Euclidean space) 상의 한 볼록 開部分集合 (convex open subset) D상에서 定義된 함수 $F: D\rightarrow R^m$ 가 微分可能하고, 어떤 陽의 實數 M 에 대하여 不等式

$$\|F'(x)\|\leq M$$

이 D의 모든 點 x에 대하여 滿足하면, D상의 임의의 두 점 a와 b에 대하여

$$|F(b)-F(a)|\leq M\,|b-a|.$$

(證明) a와 b를 D의 임의의 두 점이라고 하자. 다음과 같이 그 두 점을 이용하여 n-차원 유클리디안 空間上에 한 直線

$$r(t)=(1-t)a+tb \quad (t \text{ 는 實數 (real number)})$$

을 定義하면, D가 볼록 (convex) 이므로, $0\leq t\leq 1$ 이면 $r(t)$ 는 집합 D에 포함된다.

$$G(t)=F(r(t))$$

라고 하면

$$G'(t) = F'(r(t))r'(t)$$
$$= F'(r(t))(b-a)$$

이고, 따라서 모든 t 에 대하여

(6)............................ $$|G'(t)| \leqq \| F'(r(t)) \| \, |b-a|$$
$$\leqq M\,|b-a|$$

이다. 여기서 $z = G(1) - G(0)$이라고 하고, $g(t) = z \cdot G(t)$ 라고 定義하자. 여기서 $\cdot$는 m-차원 유클리디안 空間에서 內積 (inner product) 이다. 그러면 $g(t)$ 는 實數值函數 (real valued function) 로서 閉區間 〔 0 , 1 〕에서 連續이고, 開區間 (0 , 1) 에서 微分可能하다. 平均值 定理에 의하면

$$g(1) - g(0) = g'(t)(1-0)$$
$$= z \cdot G'(t)(1-0).$$

여기서 t 는 開區間 (0 , 1) 상에 있는 한 점이다. 反面에

$$g(1) - g(0) = z \cdot G(1) - z \cdot G(0)$$
$$= z \cdot z = |z|^2$$

슈바르쯔 不等式 (Schwarz inequality) 에 의하면

$$|z|^2 = (1-0)|z \cdot G'(x)$$
$$\leqq (1-0)|z|\,|G'(x)|$$

따라서, 만약 양변을 $|z| \neq 0$ 인 $|z|$ 로 나누면,

(7)............................ $$|G(1) - G(0) = |z|$$
$$\leqq |G'(x)|$$

明白하게 $|z| = 0$ 일 때도 (7)은 成立한다. 그러므로 (6)과 (7)에 의하여

$$|F(b) - F(a)| = |G(1) - G(0)|$$
$$\leqq M\,|b-a|$$

이다. (증명 끝)

다음 逆函數定理 (inverse function theorem) 는 함수 F 의 정의역내의 한 점 x 에서 $F'(x)$ 에 대한 逆行列이 存在한다면, 점 x 의 근방에서 함수 F 에 대한 逆函數가 存在한다는 事實이다.

〔定理 4 〕 n-차원 유클리디안 空間 (Euclidean space) 상의 한 開部分集合 (open subset) D에서 定義된 函數 $F:D\to R^n$ 가 C^1-函數이고, D의 한 점 a에서 $F'(a)$가 逆行列을 갖는다면

(i) 두 개의 開部分集合 U와 V가 存在하고, 函數 $F:U\to V$는 全-單射函數 (bijective function) 가 된다.

(ii) 만약 函數 G가 (i)에서 定義된 函數 F의 逆函數

$$G(F(x)) = x$$

이면, 函數 G는 V상에서 C^1-函數이다.

(證明) (i)의 證明.

行列 $F'(a) = A$라 하고

(8)………………………… $2c\|A^{-1}\| = 1$

을 滿足하는 陽의 常數 c를 取한다. 函數 F의 제 1 계 導函數 F'이 點 a에서 連續이므로, 中心이 a인 한 개볼 (open ball) U가 存在하는데, U내의 모든 點 x에 대하여

(9)………………………… $\|F'(x)-A\| < c$.

n-차원 유클리디안 空間상의 임의의 한 점 y에 대하여 函數 f를 다음과 같이 정의하자.

(10)………………………… $f(x) = x+A^{-1}(y-F(x))$

그러면 函數 f는 D上에서 잘 定義되고, (10)式에서 만약 $f(x) = x$를 滿足하는 點 x가 存在한다면 $F(x) = y$이다.

$$f'(x) = 1-A^{-1}F'(x)$$
$$= A^{-1}(A-F'(x))$$

이므로, (8)과 (9)에 의한다면, U内의 모든 點 x에 대하여

$$\|f'(x)\| = \|A^{-1}(A-F'(x))\|$$
$$\leqq \|A^{-1}\|\,\|A-F'(x)\|$$
$$< (1/2c)c$$
$$= 1/2.$$

定理 3에 의하여, U内部의 모든 點 x_1과 x_2에 대하여

(11)………………………… $|f(x_1)-f(x_2)| \leqq (1/2)|x_1-x_2|$

이다. U에서 임의의 한 점 x_0 취하고, 反復方法 (iterative method) 을 使用하면,

(12) ………………… $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ \cdots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \cdots$

을 滿足하는 數列 (sequence) $\{x_n\}$ 이 形成되고, 모든 n에 대하여

$$\begin{aligned} |x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| \\ &\leqq (1/2)\,|x_n-x_{n-1}| \\ &= (1/2)\,|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| \\ &\leqq (1/2)(1/2)\,|x_{n-1}-x_{n-2}| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (1/2)^n\,|x_1-x_2| \end{aligned}$$

이다. 만약 $n, m > 0$ 이면

$$\begin{aligned} |x_n-x_m| &= |x_n-x_{n-1}+x_{n-1}-\cdots+x_{m+1}-x_m| \\ &\leqq |x_n-x_{n-1}| + |x_{n-1}-x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1}-x_m| \\ &\leqq (1/2)^n\,|x_1-x_0| + (1/2)^{n-1}\,|x_1-x_0| + \cdots + (1/2)^{n+1}|x_1-x_0| \\ &= \{(1/2)^n+(1/2)^{n-1}+\cdots+(1/2)^{m+1}\}\,|x_1-x_0|. \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n$ 는 幾何級數로서 收斂하므로, n, m이 충분히 큰 數가 되어감에 따라, $(1/2)^n+(1/2)^{n-1}+\cdots+(1/2)^{m+1}$ 은 굉장히 작아진다. 따라서 $\{x_n\}$ 은 n-차원 유클리디안 空間 上에서 코시 (Cauchy) 數列이 된다. n-차원 유클리디안 空間의 完備性 (completness) 에 의하여 數列 $\{x_n\}$ 은 收斂한다. 만약

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

라고 하면, 函數 f 가 정의역 D에서 連續函數이므로,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n-1} \\ &= x. \end{aligned}$$

따라서, $F(x) = y$를 滿足하는 점 x가 적어도 하나 存在한다. 또 하나의 점 x'이 $F(x') = y$를 滿足한다면 $f(x') = x'$ 이다. 그러면

$$
\begin{aligned}
|x-x'| &= |f(x)-f(x')| \\
&\leqq (1/2)\,|x-x'|
\end{aligned}
$$

되어서 모순이 발생한다. 따라서 函數 F 는 開部分集合 U上에서 單射函數 (injective function) 이다. $V=F(U)$ 라고 하고, V가 n- 차원 유클리디안 空間에서 開部分集合임을 證明하면, 逆函數定理 (i)의 部分의 證明이 끝난다. 그러한 事實을 보이기 위하여 V에서 임의의 한 點 y_0 를 取한다. 그러면 어떤 點 x_0 가 U에 存在하여 $F(x_0)=y_0$ 가 된다. U가 開部分集合이므로 x_0 를 중심으로 하는 개볼 (open ball) B가 存在하고 B의 폐포 (closure) B가 U에 포함된다. 그리고 B의 半徑을 r 이라 하자. 점 y_0가 V의 內部點(interior point) 임을 보이기 위하여, 만약 $|y-y_0|<cr$ 이면 y 는 V에 포함됨을 보일 것이다. 점 y 가 $|y-y_0|<cr$ 을 만족하면, (10) 에서 처럼

$$
\begin{aligned}
|f(x_0)-x_0| &= |x_0-A^{-1}(y-F(x_0))-x_0| \\
&= |A^{-1}(y-y_0)| \\
&< \|A^{-1}\|\,|y-y_0| \\
&< (1/2c)cr \\
&= r/2
\end{aligned}
$$

만약 점 x 가 B의 폐포에 포함된다면

$$
\begin{aligned}
|f(x)-x_0| &\leqq |f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)-x_0| \\
&< (1/2)\,|x-x_0| + r/2 \\
&< (r/2)+(r/2) \\
&= r.
\end{aligned}
$$

그러므로 $f(x)$ 는 B에 포함된다. B의 폐포는 n-次元 유클리디안 空間上의 閉部分集合 (closed subset) 이므로 임의의 한 점 x_0 를 B에서 취하고, (12) 와 같은 方法으로 數列을 만든 후, 그 數列의 極限을 x 라고 하면, x 는 B의 폐포에 포함된다. 따라서 $F(x)=y$ 그리고

$$
y \in F(\overline{B}) \subset F(U) = V
$$

여기서 B는 $\overline{B}$의 폐포이다. 그러므로 V는 n- 유클리디안 空間上의 開部分集合이 되면서 (i)의 證明이 完了된다.

(ii)의 證明, 函數 F를 開部分集合 U에 축소하여 생각한다면 F는 單射函數이고, F(U)=V이다. 따라서 F의 逆函數가 存在한다. 그 逆函數를 G라고 하면, G가 V에서 C^1-함수임을 보일 것이다. 만약 두 점 y와 $y+k$가 V에 포함된다고 하면, 開集合 U內에 두 점 x_0와 x_0+h가 다음 條件을 滿足하면서 存在한다.

$$y=F(x_0),\quad y+k=F(x_0+k\ )$$

(10)에서 처럼

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= (x_0+h)+A^{-1}(y-F(x_0+h))-[x_0+A^{-1}(y-F(x_0))] \\ &= h+A^{-1}[y-F(x_0+h)-y+F(x_0)] \\ &= h+A^{-1}[F(x_0)-F(x_0+h)] \\ &= h-A^{-1}(k). \end{aligned}$$

(11)에 의하여

$$\begin{aligned} |h-A^{-1}(k)| &= |f(x_0+h)-f(x_0)| \\ &\leqq (1/2)|h| \end{aligned}$$

그러므로,

$$|A^{-1}| \geqq (1/2)|h|$$

이고,

$$\text{(13)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{aligned} |h| &\leqq 2\,\|A\|\ |k| \\ &= (1/c)|k| \end{aligned}$$

이다. $\|F'(x_0)-A\|=\beta < c$ 라고 하면

$$(1/2c)\beta \leqq (c/2c)=1/2<1.$$

따라서, $2c>\beta$, n-차원 유클리디안 공간상의 임의의 한 점 x에서

$$\begin{aligned} 2c|x| &= 2c\,|A^{-1}Ax| \\ &\leqq 2c\,\|A^{-1}\|\ |Ax| \\ &= |Ax| \\ &= |\ A-F'(x_0))x+F'(x_0)x| \\ &\leqq |(A-F'(x_0)x| + |F'(x_0)x| \\ &\leqq \|A-F'(x_0)\|\ |x| - |F'(x_0)x| \\ &= \beta|x|+|F'(x_0)x| \end{aligned}$$

그러므로,

$$(2c-\beta)\ x \leqq F'(x_0)x$$

이다. $2c-\beta > 0$ 이므로, 만약 점 $x \neq 0$ 이면 $F'(x_0)x \neq 0$. 그러므로 $F'(x_0)$ 는 單射函數이다. 線形代數 (linear algebra) 의 基本定理의 일종인 "같은 有限 次元 벡터 空間들 사이에서 定義된 線形函數가 單射函數이면 全射函數 (surjective) 이다" 의 사실을 이용하면 $F'(x_0)$ 에 대한 逆行列이 存在한다. 그 逆行列을 T 라고 하자.

$$\begin{aligned} G(y+k)-G(y)-Tk &= x_0+h-x_0-Tk \\ &= h-Tk \\ &= T[F'(x_0)h)-T(F(x_0+h)-F(x_0)) \\ &= -T[F(x_0+h)-F(x_0)-F'(x_0)h] \\ &= -T[r(h)]. \end{aligned}$$

그리고

$$\lim_{k\to 0}\frac{|T(r(h))|}{|k|} \leqq \lim_{k\to 0}\frac{\|T\|\ |r(h)|}{|k|}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{|r(h)|}{|k|} = \lim_{k\to 0}\frac{|h|}{|k|}\cdot\frac{|r(h)|}{|h|}$$

$k\to 0$ 일 때 (13) 에 의해서 $h\to 0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0}\frac{|r(h)|}{|k|} &= \lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{|h|}{|k|} \\ &\leqq \lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|}\cdot\frac{1}{c} \end{aligned}$$

函數 F 가 x_0 에서 微分可能하므로,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|} = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{k\to 0}\frac{|G(y+k)-G(y)-T(k)|}{|k|} = 0$$

그러므로 函數 G는 점 y에서 微分可能하고, $G'(y)=T$이다. 여기서 $G'(y)=[F'(G(y))]^{-1}$. 마지막으로 함수 G가 微分可能 函數이므로 G는 連續函數이다. 그리고 函數 F의 第一階導函數 F'도 連續函數이므로, 轉倒 (inversion) 가 連續函數임을 보이기만 하면, G'은 合成函數의 連續性에 의하여 連續函數가 된다.

$$\|A^{-1}\| = 1/t, \quad \|B-A\| = s$$

라고 하면, n-차원 유클리디안 空間上의 임의의 점 y에 대하여,

$$(t-s)\,|B^{-1}y| \leqq |BB^{-1}y| = |y|$$

그러므로,

$$\|B^{-1}\| \leqq 1/(t-s)$$

항등식

$$B^{-1}-A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

으로부터 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\|B^{-1}-A^{-1}\| &\leqq \|B^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|A^{-1}\| \\ &\leqq \frac{s}{t(t-s)}\end{aligned}$$

따라서 $t\to 0$일 때, $B\to A$이고, 그리고, $B^{-1}\to A^{-1}$이다. 따라서 轉倒는 連續函數이다.
(證明 끝)

(참고) 逆函數定理는 聯立方程式

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ x_1,\ \cdots,\ x_n) \\ y_2 = f_2(x_2,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \end{cases}$$

에 대하여 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 $y_1, y_2, \cdots, y_n$에 관하여 풀 수 있다는 사실이다.

第三章

聯立方程式과 逆函數定理

다음 聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{4}y+\dfrac{z}{2}=13 \\ x+y-\dfrac{z}{2}=-3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z=7 \end{cases}$$

을 풀면 解는, $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$이다. 行列

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

의 行列式을 利用하면, 그 行列式이 0이 아니므로 線形代數의 基本性質에 의하여 그 이외의 다른 해는 있을 수 없다. 본 장에서는 逆函數定理를 利用하여 해가 唯一하게 存在한다는 事實을 보인다.

$$F: R^3 \to R^3,\ F(x,y,z)=\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}y+\frac{z}{2},\ x+y-\frac{z}{2},\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+z\right)$$

라고 하면, 위의 聯立方程式을 푼다는 것은

$$F(x,y,z)=(13,\ -3,\ 7)$$

을 滿足하는 점 (x,y,z)를 R^3에서 찾는 것과 마찬가지이다. 우선 $F(0,0,0)=(0,0,0)$, 定理 2에 의하여,

$$F'(0,0,0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

사실 모든 점 (x,y,z)에 대하여,

$$F'(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

위의 行列에 대한 行列式은 33/24 이다. 明白히 F′은 連續函數이므로, 逆函數定理에 의하여 (0,0,0)을 포함하는 개볼 (open ball) U가 存在하는데, F는 U상에서 單射函數이다. 逆函數定理의 證明過程에서 $U=R^3$ 임을 알 수 있고, 函數 F의 線形性을 利用하면 $F(R^3)=R^3$ 이다. 따라서 函數 $F: R^3 \to R^3$ 全－單射函數이다. 그러므로, 위의 聯立方程式의 解는 唯一하다.

다음 聯立方程式

$$\begin{cases} 6x^2 - xy - 2y^2 = 0 & \text{——— ①} \\ x^2 - xy + y^2 = 7 & \text{——— ②} \end{cases}$$

을 풀 때는 ①식을 인수분해하여 얻은 x와 y의 관계식을 ②식에 대입하여 해를 구한다. 그 해들은

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

이다. 그러면 다음 連立方程式

$$\begin{cases} 6x^2-xy-2y^2=t \\ x^2-xy+y^2=7 \quad (t>0) \end{cases}$$

을 풀기는 쉽지 않다. 여기서 t가 충분히 작아질 때 위의 聯立方程式들의 解의 개수를 逆函數定理를 利用하여 硏究한다.

$$F(x,y)=(6x^2-xy-2y^2,\ x^2-xy+y^2)$$

라고 하면, 定理 2에 의하여,

$$F'(x,y)=\begin{bmatrix} 12x-y & -x-4y \\ 2x-y & -x+2y \end{bmatrix}$$

그리고,

$$F'(2,3)=\begin{bmatrix}21 & -14\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$F'(-2,-3)=\begin{bmatrix}-21 & 14\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$F'(1,-2)=\begin{bmatrix}14 & 7\\ 4 & -5\end{bmatrix}$$

$$F'(-1,2)=\begin{bmatrix}-14 & -7\\ -4 & 5\end{bmatrix}$$

逆函數定理에 의하여 점 $(2,3)$, 점 $(-2,-3)$, 점 $(1,-2)$, 점 $(-1,2)$는 각각 개볼 (open ball) 들을 가지면서 그 개볼상에서 F는 單射函數이다. 그러면

$$F(x,y)=(t,7)$$

을 滿足하는 점 (x,y)가 $t\to 0$일 때 각각의 개볼내에 存在할 것이다. 즉 위의 聯立方程式은 $t\to 0$일 때 4개의 解가 存在한다.

結　論

一般的인 聯立方程式을 푼다는 것은 매우 어려운 일이며, 특히 中學校 또는 高等學校 數學 敎室에서 解決되는 聯立方程式들은 극소수이다. 만약 聯立方程式이 특별한 方法을 利用하여 풀릴 경우, 그 方程式으로부터 약간 변형된 聯立方程式의 解의 存在性 및 解의 개수, 解들의 存在하는 위치도 逆函數를 利用하여 硏究될 수 있다.

참 고 문 헌

1. C, Buck, Advanced Calculus, McGraw-Hill, 1978.

2. W, Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1964.

3. 고봉수, 1989년도 1학기 해석학 강의록, 제주대학교 교육대학원.

4. S, Lang, Linear Algebra, 2nd, Ed., Addison-Wesley, 1970.