초등교육연구, 제17집
The Journal of Elementary Education Research
Vol. 17, Feb. 2013 : pp. 111~146.

분수와 나눗셈에 대한 초등학교 수학의 개념 이미지 분석

Analyzing 'Concept Image' about fractions and divisions in Elementary school mathematics

신성희* · 최근배**

< 국문 초록 >

학생이 형성한 개념 이미지는 학생들의 수학 학습에서 문제 해결의 근거가 될 수도 있고, 다른 개념을 구성하는 데 활용될 수 있다. 학생들이 실제로 형성하게 된 다양한 개념 이미지의 유형을 분석하여 학생들의 수학 개념 학습 과정의 메커니즘을 이해하며, 오개념의 형성도 줄일 수 있는 방안이 필요한 실정이다. 이에 본 연구는 수학 내용 중에서 분수와 나눗셈에 관한 개념 이미지를 2차에 걸쳐 질문지를 만들고 그 질문지를 학생들에게 투입하여 각 문항별로 개념 이미지를 분석하였다.

분수와 나눗셈의 개념 이미지를 분석한 결과 학생들은 교과서에 제시된 개념 정의를 변형시키거나 자신의 것으로 재해석하여 다양한 개념 이미지를 만들어내고 있음을 알 수 있었다. 분수와 나눗셈 개념은 초등학교 학생들의 인식 수준에서는 형상화하기 어렵다. 앞으로 학생들의 다양한 개념 이미지에 맞게 여러 가지 방법으로 개념을 설명하고 예를 들어주며 절차적인 공식이나 지식보다는 과정 중심의 학습으로 구성해나갈 수 있어야 할 것이다.

* 주제어: 개념 이미지, 분수, 나눗셈

---

* 제주 해안초등학교 교사(주저자)
** 제주대학교 수학교육과 교수(교신저자, email: kbchoe@jejunu.ac.kr)
이 논문은 제주대학교 교육학 석사학위 논문(신성희, 2011)을 수정보완 한 것임

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학 내용은 현실적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 취급하기 때문에 초등학교 학생들에게는 어렵게 느껴지기 마련이다. 그러므로 초등학교 수학 교육은 내용을 연역적 방법이나 추상적인 방법으로 이해하기 보다는 학생들이 느낄 수 있는 현실에서 직관이나 구체적인 활동 등을 통해 점진적으로 추상화 과정을 거치도록 도와주어야 한다. 이러한 관점에서 제7차 개정 교육과정 교과서는 실제 상황과 구체적 활동 중심으로 짜여져 있는 것을 알 수 있다.

그러나 학생들은 개념을 이해할 때, 현실에서 직관하거나 구체적인 조작 활동을 하여 정의한 교과서 개념 정의를 곧바로 이용하여 개념을 정의하기 보다는 현실과 개념의 중간 개념으로 스스로 개념을 만들어 나간다. Skemp(1987)에 의하면 수학적 개념 형성은 수학 학습의 기본이 되는 것이므로 학습자 자신의 마음속에서 일어나야 하며 학습자에게 강요할 수도 없고 대신해 줄 수도 없는 것으로서 교사가 할 수 있는 최선의 것은 수학적인 개념을 바르게 형성할 수 있도록 도와주는 일이라고 하였다. 개념 학습은 이렇게 교사가 원하는 방식대로 학생들에게 심어질 수 있는 것이 아니다.

Vinner(류희찬 역, 2003)에 의하면, 수학에서의 개념은 주로 정의에 의해 획득된다고 하였다. 그러나, 개념에 대한 정의를 암기하는 것으로 그 개념을 이해했다고는 할 수 없다.(Vinner, 1991) 학생들은 개념을 정립하기 위해 여러 가지 조작이나 활동을 거치며 심상과 경험을 구성하게 되는데 이 때, 개념 명칭과 관련하여 개인이 기존의 경험 등과의 결합을 통해 형성하게 되는 비언어적인 것을 개념 이미지라고 한다. 개념이 시각적 표상을 갖는 경우, 개념 이미지는 시각적 표상일 수 있으며, 인상이나 경험의 집합체일 수도 있다. 개념 명칭과 결합된 시각적 표상, 심상, 인상, 경험은 언어의 형태로 번역될 수 있다. 이렇게 형성된 개념 이미지는 학생들의 수학 학습에서 문제 해결의 근거가 될 수도 있고, 다른 개념을 구성하는 데 활용될 수 있다.

초등학교 수학 교육 목표중 하나가 개념 형성임에도 불구하고, 그러한 개념 형성 학습보다는 문제 풀이 식에 급급한 교수·학습이 이루어지는 것이 지금의 현실이다. 학생들은 교과서에 나오거나 선생님이 알려주는 개념 정의를 암기하는데 시간을 투자하고 스스로 수학적인 개념을 형성하는 데 전력을 다하지 않는다. 그리고 가지고 있는 수학 개념을

표상(representation)하는 것에도 매우 서툴다.

표상은 학교 수학을 위한 원리와 규준에서 제시된 다섯 가지 수학적인 과정(문제해결, 추론, 연결성, 의사소통, 표상) 중의 하나(NCTM,2000)이며 그것은 또한 수학학습 활동 중에 일어나는 어떤 절차를 나타내는 것 이상으로 수학의 교수와 학습에 관한 한 방법으로 볼 수 있다. 뿐만 아니라 교사의 측면에서 보면 아이들이 해 놓은 표상을 통해서 수학에 관해 아이들이 어떻게 이해하고 사고하고 있는가를 꿰뚫어 볼 수 있는 중한 자료가 될 수 있다.(최창우,2002)

학생들이 실제로 형성하게 된 다양한 개념 이미지의 유형을 분석하여 학생들의 수학 개념 학습 과정의 메커니즘을 이해하고, 오개념의 형성도 줄일 수 있을 것이다. 즉, 학생들은 교사나 교과서의 언어적 진술과 시각적 설명을 통하여 수학 개념을 형성하게 되며, 교사는 직접적으로 학생이 구성한 개념을 볼 수 없으므로 학생이 표현한 개념에 대한 정의나 설명을 통해 학생이 구성한 개념을 판단하고 교정할 수 있다. 교사가 학생들이 겪는 인지적 갈등상태를 파악할 수 있고, 특정한 인지체계에 대한 지식을 가지고 있다면 학생의 반응을 보다 잘 감지할 수 있고, 학생의 갈등 요인을 표면으로 드러내어 갈등을 해결하는 시작으로 삼을 수 있다. 이러한 측면에서 학생들이 갖고 있는 개념 이미지를 파악하는 것은 학생들의 개념 이해를 돕고 잘못된 개념 이미지를 형성하는 교육 방법을 개선하기 위한 시사점을 줄 수 있을 것으로 본다. (김미령, 2004)

개념 이미지에 대한 앞선 연구들을 살펴본 결과 초등학교 수학의 개념 이미지 연구는 지극히 드물었으며, 기하 영역에 치중한 연구들이 많은 것으로 보인다. 그러나 초등학교에서는 도형 영역에서 비교적 많은 표상 활동이 이루어지기 때문에 본 연구에서는 수와 연산 영역 중에서 '분수'와 '나눗셈'에 대한 개념 이미지를 분석해보고자 한다. 또, 학생들의 개념 이미지를 분석한 결과를 통해 개념 학습 과정에서의 시사점을 도출하도록 하겠다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 초등학교 수학에서의 '분수'와 '나눗셈'에 대한 학생들의 수학 개념 이미지를 분석하고, 학생들의 다양한 개념 이미지를 통해 초등 수학 교육에 있어서 학생들의 개념 학습 과정의 시사점을 도출해보고자 한다.

가. 초등학교 학생들의 분수 개념 이미지를 분석한다.

나. 초등학교 학생들의 나눗셈 개념 이미지를 분석한다.

다. 학생들의 개념 이미지를 분석하여 개념 학습 과정에서의 시사점을 도출한다.

3. 용어의 정의

가. 개념 이미지(Concept image)와 개념 정의(Concept definition)

개념 명칭을 보거나 들을 때 그것은 우리의 기억을 자극한다. 개념 명칭에 의해 우리의 기억 속에 무엇인가가 떠오른다. 일반적으로 그 개념이 정의되어 있더라도 떠오르는 것은 개념 정의가 아니다. 떠오르는 것은 소위 개념 이미지(concept image)라고 한다.(Tall&Vinner, 1981; Vinner,1983) 즉, 개념 명칭과 결합된 시각적 표상, 심상, 인상이나 경험의 집합체를 말한다. Vinner(1983)는 비순환적인 방법으로 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의(verbal definition)를 개념 정의라고 하였다. 이 개념 정의는 공식적인 수학 이론의 바탕을 이루는 것으로 공적 개념 정의라고 할 수 있다.

본 연구에서는 개념 이미지란 개념의 시각적 표상 또는 언어적 표현 등을 말하고, 수학을 가르치는 데 필요한 개념을 명확히 설명한 것을 개념 정의라고 한다.

나. 표상(representation)

표상이라는 용어는 과정과 결과(product) 양쪽 모두에 관련된다고 할 수 있다. 다시 말해, 어떤 형태로 수학적인 개념이나 혹은 관계를 획득하는 행위와도 관련된다. 더욱 나아가, 표상은 수학을 행하는 인간의 마음 속에서 내적으로 일어나는 과정 및 결과는 물론이고 외적으로 관찰할 수 있는 것에도 적용된다. 본 연구에서는 외적으로 드러나는 학습자의 기록을 말한다.

4. 연구의 제한점

가. 본 연구는 제주시의 한 초등학교를 대상으로 하는 것이므로 다른 지역에서는 다른 결과를 기대할 수도 있다.

나. 학생들의 작성한 개념이미지 질문지를 해석하여 일반화 하는데는 한계가 있을 수

있다.

다. 본 논문에서 보이는 분수와 나눗셈의 개념이미지 유형은 학생들의 구성한 개념이미지 유형을 모두 보였다고 단정 짓기는 어렵다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 개념에 대한 이론 고찰

가. 개념 형성

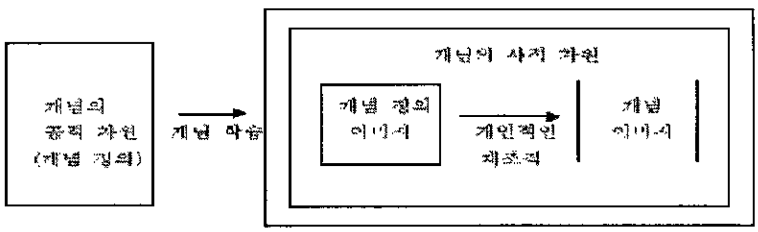
어떤 개념을 획득하는 것이 그 개념에 대한 개념 이미지를 형성하는 것이라고 가정하였을 때, 개념 정의를 암기하여 알고 있다고 해서 개념을 이해했다고 볼 수는 없다. 이해한다는 것은 그 개념 이미지를 갖는 것이라 할 수 있다. 어떤 의미는 단어와 결합되어야만 한다. 예를 들어, 어떤 주어진 집합의 멱집합이 그 집합의 모든 부분집합의 집합이라는 것을 안다고 할 때, 주어진 집합의 멱집합을 구성해 보지 않는 한 이것은 아무런 의미도 없을 것이다. 그러므로 멱집합의 개념 이미지에는 실제로 멱집합을 구성하는 것에 대한 기억이 포함되어야 한다.

집, 오렌지, 고양이 등과 같은 일상생활 속에서 사용되는 대부분의 개념은 정의와 별 상관없이 획득된다. 반면에 어떤 개념은 정의에 의해 도입된다. '숲'이라는 단어를 아동들에게 "아주 많은 나무가 함께 있는 것"이라고 설명해 줄 수 있다. 이와 같은 정의는 개념 이미지의 형성을 돕는다. 그러나 이미지가 형성되는 순간 정의는 별 도움이 안 된다. 고려중인 개념에 관한 내용을 다룰 때, 정의는 사용되지 않거나 심지어 잊혀 지기조차 한다. 따라서 개념 형성에서 정의의 역할은 비계에 비유될 수 있다. 건물이 완성되는 순간 비계는 제거된다. (류희찬, 2003)

나. 개념 이미지와 개념 정의

개념 정의는 크게 학문적, 사회적 의미의 말로 진술되어 공식적으로 사용되는 공적 차원의 개념 정의(formal concept definition)와 개인적 차원에서 재해석되고 수용된 사적

차원에서의 정의(private concept definition)로 나눌 수 있다. 공적 차원의 정의는 간단히 개념 정의로 말할 수 있으며 여러 사람들이 의사소통할 때 모두 인정하여 받아들일 수 있는 것이며, 그것을 바탕으로 연역적인 결과를 도출해 낼 수 있고, 정해진 어떤 것을 지명할 수도 있다. 그에 반하여 사적 차원의 정의는 주어진 개념의 정의와 연관되어 개인의 인지구조 내에서 형성되는 심상(mental picture)들로 지극히 개인적이며 고정되어 정해진 것이 아니라 변화, 발전해가는 어떤 것이라고 볼 수 있다. 학생들은 이 개인적인 심상을 문제를 해결하고, 예와 반례를 구분하는데 사용하고, 이것으로 학생들 스스로가 개념을 소유하고 있는가의 여부를 판단하는 기준으로 삼는다(김미령,2004). 개념 학습은 이렇게 교과서나 교사의 설명을 통해 제시된 개념의 공적 차원인 개념 정의를 통해 이루어지고, 이렇게 형성된 개념 정의 이미지는 개인적인 재조직을 통해 '개념 이미지'가 형성된다. 이렇게 형성된 이미지는 학생들이 수학 활동을 하는데 문제 해결이나 의사소통의 근거가 된다.



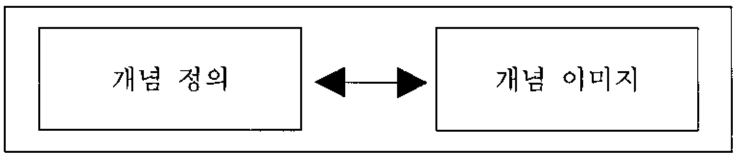
[그림 Ⅱ-1] 개념 정의와 개념 이미지

전문적 상황에서는 정의가 아주 중요한 역할을 한다. 정의는 개념 이미지를 형성하는 것을 돕는 것은 물론이고 인지적 과제를 해결하는 데 결정적인 역할을 하기도 한다. 정의는 개념 이미지로 인한 많은 함정을 피해 갈 수 있게 하는 잠재력을 지닌다.

따라서 전문적인 상황에서는 일상생활과는 전반적으로 다른 사고 습관이 학생들에게 필요하다. 적어도 학습 과정의 초반에서는 일상생활에서의 사고 습관이 전문적인 상황에서의 사고 습관보다 우세하리라고 예측할 수 있다. Vinner는 함수, 접선, 극한 개념을 소재로 한 설문조사를 통해 개념 정의를 필요로 하는 전문적 상황에서 대부분 학생들이 정의를 사용하지 않고 개념 이미지에 의존하여 인지적인 과제를 수행함을 밝히고 있다.

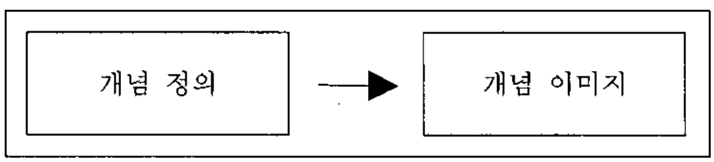
Vinner는 인지 구조 내에 두 종류의 서로 다른 세포(이것은 생물학적 세포를 의미하지 않는다)가 존재한다고 가정하였다. 하나는 개념 정의를 위한 것이고 나머지는 개념

이미지를 위한 것이다. 하나 또는 두 세포 모두가 비어 있을 수도 있다(개념 명칭에 어떤 의미가 결합되어 있지 않으면 개념 이미지 세포는 비어 있는 것으로 간주하며 이것은 의미 없는 방법으로 개념 정의를 기억하는 상황에서 주로 일어날 수 있다). 비록 독립적으로 형성될지라도 두 세포 사이에 상호작용은 있을 수 있다.(류희찬, 2003)



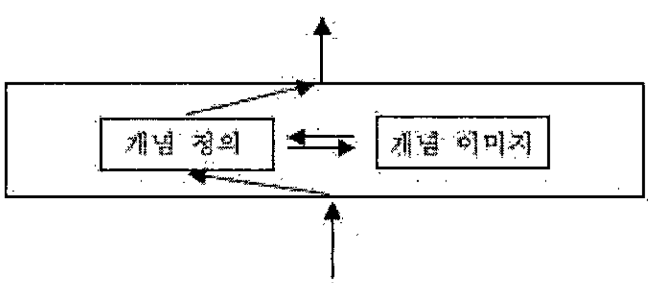
[그림 Ⅱ-2] 개념 이미지와 개념 정의의 상호 작용

개념 이미지는 개념 정의의 모든 측면을 반드시 반영하지는 않는다. 그러나 많은 교사들은 개념 정의가 학생들에게 바로 개념 이미지로 자리 잡을 것으로 여기고 있다. 즉, [그림 Ⅱ-3]처럼 개념 이미지가 개념 정의에 의해 형성되고 통제될 것이라고 생각한다.

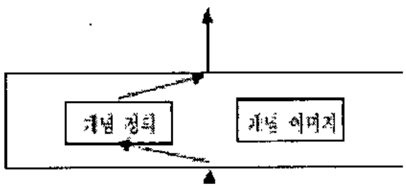


[그림 Ⅱ-3] 형식적 개념 이미지의 형성

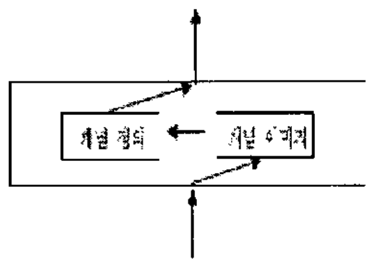
개념 형성 과정뿐만 아니라 문제 해결이나 과제 수행 과정에서도 교사들은 학생들의 인지적 과정이 다음과 같은 세 가지로 일어날 것이라 생각한다.



[그림 Ⅱ-4] 정의와 이미지 사이의 상호 작용

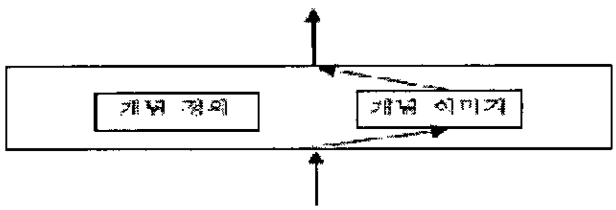


[그림 Ⅱ-5] 순수한 형식적 추론



[그림 Ⅱ-6] 직관적 사고를 따르는 연역

이러한 모든 과정은 전문적인 상황에서 문제가 제기 되었을 때, 개념 정의와 개념 이미지의 연합 체계가 어떻게 반응하더라도 개념 정의를 고려하기 전에는 답을 형식화하기 어렵다고 보는 점이다. 그러나 이러한 교사들의 이상적인 반응을 학생들이 해주는 것은 어렵다. 오히려 학생들에게 일어나는 수학적인 과정은 직관적 반응이다.



[그림 Ⅱ-7] 직관적 반응

여기서 개념 정의 세포는, 비어 있지는 않더라도 문제 해결 과정 동안 작동하지 않는다. 일상생활에서의 사고 습관이 강하게 남아 있어서 형식적 정의를 고려할 필요가 없다. 대부분의 경우 개념 이미지 세포만 적용해도 성공할 수 있다. 그렇기 때문에 사람들은 개념 정의 세포를 적용하려 들지 않는다. 불완전한 개념 이미지로는 틀리기 쉬운 비정형적인 문제의 경우만 개념 정의를 적용한다. 그런 문제들은 흔하지 않으며 그런 문제가 주어지면 학생들은 부당한 문제라고 생각한다. 따라서 원리상, 전문적인 상황을 해결하는 데 부적절한 일반적인 사고 습관을 변화시키기는 대단히 어렵다. 본 연구에서는 학생들이 수학적인 과정에서 떠올리는 개념 이미지를 분석하여 개념 정의와의 관계와 앞으로의 초등 수학 교육의 방향에 대한 시사점을 도출해보고자 한다.

2. 분수와 나눗셈의 의미 분석

가. 분수의 의미별 분석

분수 개념은 여러 가지 의미를 지니고 있다. 많은 수학자들은 분수의 의미를 여러 가지로 제시하였는데, 그 중 본 연구에서는 전체-부분, 몫, 비, 연산자, 측도 개념으로 의미를 나누어 살펴보고자 한다.

(1) 전체-부분의 의미

전체-부분의 의미는 분수 개념에서 가장 기초적이고 중용한 개념이며, 분수개념을 도입할 때 가장 자연스러운 방법이다. 전체에 대한 부분을 분수 기호로 나타내는 능력은 연속량이나 이산량을 같은 크기를 갖는 부분이나 집합으로 분할하는 능력과 관련되고 이것은 나중에 분수를 읽는데 중요한 역할을 한다.

학생들이 성공적인 분할을 하기 위해서 필요한 인지구조와 관련하여 Piaget, Inhelder, Szeminska(1960)는 아동들이 분수를 이해하려던 다음과 같은 7가지의 특성을 인식할 수 있어야 한다고 주장하였다.

① 전체는 분할될 수 있다.

② 분수는 부분의 수를 의미한다.

③ 분할은 끝까지 남김없이 해야 한다.

④ 부분의 수와 분할 회수 간에는 일정한 관계가 있다.

⑤ 분수는 부분인 동시에 분할될 수 있는 전체이다.

⑥ 전체는 분할해도 보존된다.

⑦ 모든 부분은 크기가 같다

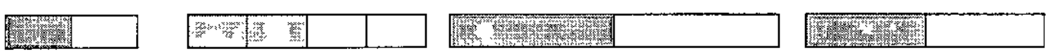
많은 학생들은 분수를 부분-전체의 표상이나 비교할 수 있는 양으로 이해하지 못하고, 분수가 칠해진 부분에 이름을 붙인 것이라고만 생각한다. Figueras, Filloy와 Valdemoros(1987)등은 11-13세 아동들에게 그림을 제시하고 분수를 쓰거나 주어진 분수에 맞게 주어진 그림을 완성하는 문제를 제시하고 그들의 반응을 분석하였는데, 여기에서 가장 많이 나타나는 전략은 부분의 개수 즉 분자에 주의를 집중함으로써 분모를 무시하거나 임의로 바꾸고 분자와 분모를 별개로 다루는 것이었다. 이들은 또 분할에서 어려움을 느끼고 부분의 크기가 다르다는 것을 인식하지 못하였으며 경우에 따라서는 분모에 집중하기도 하였다.

(2) 몫의 의미

유리수를 나눗셈의 결과로 해석하는 것이다. 정수에서의 나눗셈은 피제수가 제수보다 작거나 둘 사이의 공배수가 없을 때는 나머지 없이 그 결과를 나타낼 수 없다. 이런 경우에 그 결과를 몫으로 나타낼 수 있도록 확장시킨 것이 유리수의 몫의 의미이다. 즉, 유리수 $\frac{a}{b}$는 a÷b의 의미로 쓰인다. 나눗셈에는 등분제와 포함제가 있는데, 포함제 상황에서의 분수는 측정의 의미를 지니고 있다. 이에 반해, 등분제의 상황에서는 분수는 몫의 의미를 지니고 있다.

(3) 비의 의미

분수는 처음부터 크기를 측정하는 과정과 관련되어 있다. (Davydov et al., 1991). 측정과정에서의 분수는 단위(기준)에 대한 부분의 상대적인 크기를 나타내며 이것이 비를 의미한다. 비는 수라고 하기 보다는 비교 지표(comparative index)라고 하는 것이 더 정확하다. 등분할 상태를 나타낸 분수 $\frac{1}{2}$과$\frac{2}{4}$는 그 뜻이 다르지만 두 양의 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미에서는 같은 수를 나타낸다. 또, 서로 다른 크기에서도 전체에 대한 부분의 상대적인 크기가 $\frac{1}{2}$과 같다고 생각할 수 있을 때 비의 개념을 이해한다고 볼 수 있다. 따라서 분수의 본질적인 개념을 이해하기 위해서는 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미를 이해하여야 한다.



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

[그림 Ⅱ-10] 상대적인 크기 비교

(4) 측도의 의미

분수의 역사를 살펴보면, 분수는 배분 상황과 측정 상황에서 도입되었다. 단위로 주어진 양을 측정하였을 때, 단위로 측정하고 남은 부분을 나타내기 위해서 새로운 단위를 도입하여 원래의 단위와 나머지를 새로운 단위로 나타내면서 분수가 발생되었다. 어떤 막대의 길이를 재기 위해서는 적절한 단위가 필요하고 그 단위를 반복적으로 사용하여 측정 결과를 단위의 자연수 배로 나타낼 수 있을 때 그 단위를 반복적인 측도라고 한다.

(5) 연산자 의미

연산자의 의미로서 분수는 유한 집합에서 유한 집합으로의 사상이나 유클리드 평면에서 유클리드 평면으로의 사상이라고 할 수 있다. 도형을 $\frac{p}{q}$만큼 축소, 확대시키거나, 한 집합을 그 집합의 원소의 개수의 $\frac{p}{q}$배한 다른 집합으로 줄이거나 늘이는 함수로서 $\frac{p}{q}$를 생각할 수 있다.

나. 나눗셈의 의미 분석

NCTM standards(1989:김수미, 2004에서 재인용)에서는 수학의 내용과 강조점에 대한 변화를 요약하면서, 연산 영역에서는 특히 연산의 의미와 연산 감각 등을 강조하는 반면, 복잡한 지필 계산이나 이해에 기초하지 않은 절차의 암기 등을 지양하고 있다. 의미를 모르면서 절차를 반복하는 것은 이해라고 할 수 없다는 것이다. 연산의 의미를 이해하지 못한 아동은 자신이 암기한 절차에 따라 기계적으로 계산하게 된다. 이것은 단지 알고리즘에 따라 단계적으로 절차를 수행한 것일 뿐 연산을 했다고 보기 어렵다. 따라서 효과적인 나눗셈 연산이 되기 위해서는 나눗셈의 의미에 대한 이해가 필수적이다.

본 논문에서는 구광조 외 5인(1995)이 제시한 나눗셈의 의미 및 동수누감으로의 나눗셈(배종수,1999)의 경우를 포함해 다섯 가지로 나누어서 나눗셈의 의미를 살펴보고자 한다.

(1) 곱셈의 역연산

(2) 등분제

(3) 포함제

(4) 나머지가 있는 나눗셈

(5) 동수누감으로서의 나눗셈

3. 수학적인 언어표현

수학적 개념은 실생활, 물체, 조작 자료, 그림, 말, 기호 등 다양하게 표현될 수 있다. 인간의 사고 활동은 개념 형성에 기초하기 때문에 어떻게 형성되는가 하는 논의와 이때 언어가 어떤 작용을 할 수 있는가 하는 논의는 매우 중요하다.

수학적 대상은 일부는 구체적이고 대부분은 추상적인 언어적 대상임이 수학적 개념을 이해하는 데 어려운 주요 요인이 되므로 수학적 개념을 학습시키는데 있어서는 용어의 사용에 신중을 기하여야 할 것이다. 용어의 특정이 구체적 참조물이나 예를 가지고 있고 그에서 추상된 것이라면 정의와 함께 구체적 참조물이나 예를 통한 이미지 형성이 큰 비중을 차지하게 될 것이며, 수학 내적으로 정의된 용어라면 구체적 실례보다는 언어적 정의와 그 추상성에 기초한 개념 구성에 비중을 두어야 할 것이다.

분수 학습에 있어서도 학생들이 분수를 어려워하는 원인 중 하나가 분수 언어 사용이라고 할 수 있다. 예를 들어 분순의 여러 가지 의미 중 비의 의미에서 학생들은 종종 언어표현에서 어려움을 겪어 답을 하지 못한다. '~은 ~에 대해'라는 표현에서 기준량을 무엇으로 봐야 할 지 알 지 못하여 문제를 해결하지 못하는 경우가 많다. 또한 복숭아 1팩에는 다음과 같이 복숭아가 3개 들어가 있다. 그렇다면 복숭아 1개를 팩으로 담는다면 몇 팩이라 할 수 있을까? 라는 문제 상황에서 출제자는 분명 1/3팩이라는 답을 정답으로 요구할지도 모른다. 하지만 이것은, 1팩이라고 할 수 도 있다. 분영 복숭아 1개도 팩으로 담는다면, 복숭아 1개도 1팩으로 담을 수 있기 때문이다.

NCTM(1989) Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics에 의하면, 학생들이 다양한 유의미상황-구체물, 그림, 기호표상에서 분수를 표상하고 이들을 융통성 있게 바꿀 수 있어야 한다고 말한다. 수업에서 다양한 표현 양식을 사용하고 이런 양식들을 자주 서로 바꾸어 보게 하는 것은, 학생들의 개념 이해를 돕고 더 복잡한 분수 개념을 구성하게 한다. 유리수 프로젝트(1983)는 구체와 추상을 연결할 수 있는 것으로 "말"의 역할을 강조한다. 입으로 실현하는 「말」과 그 「말」을 글로 나타내어 보는 것은 구체물과 추상적인 사고를 연결해 주는 교량 역할을 한다. 예를 들어, 사과 둘 중에 하나, 또는 원을 둘로 나누고 칠은 한 것을 "이분의 일"이라고 입으로 말하고 "이분의 일"이라고 써 보고, 이를 기호로 1/2로 나타내며, 마지막으로 1/2에 대한 추상적인 사고를 이끌어 내는 것이다.

기호, 그림, 말뿐만 아니라 조작물(원형이나 직사각형 조각, 칼라, 칩, 종이접기, 수직선, 퀴즈네어 막대, 도미노 등)을 사용하는 것은 분수 개념과 연산을 이해시키는데 매우 중요하다.

또한 수학적 기호는 수학적인 정신적인 활동을 이해하는데 영향을 미친다. 학생들이 개념의의미를 충분히 이해하면 이를 효과적으로 나타내가 위해서 기호를 사용하게 된다. 기호는 가장 추상적인 표현 체계로써 사고의 과정이나 결과를 반성하고 사고를 능률적으로 할 수 있게 하는 원동력이 되는 반면, 기계적인 처리를 하기 쉬운 특징이 있다. 그

러므로 기호는 다른 표상의 번역과 변형이 충분히 이루어진 후에 도입되어야 하며, 필요한 경우 다른 표현양식과 함께 다루어져야 한다. 성급히 기호를 제시하거나 기호만 가지고 학습하면 수학적 아이디어나 의미는 도외시되고 피상적으로 기호를 다루게 되며 기호 절차를 단순히 암기하게 하는 결과를 초래한다. 기호를 사용하기 전에 구체물을 다루어 보고 말이나 그림으로 표현하며 이를 글로 적어 보는 활동이 충분히 이루어져야 한다. 수학적인 아이디어를 이해하고 기호의 의미를 알도록 촉진시키는데 구체물, 영상적 양식, 언어는 중요한 역할을 한다.

Ⅲ. 연구의 실제

1. 연구 방법 및 절차

가. 연구 대상 : 제주특별자치도 제주시 일도2동 소재 I초등학교 6학년 3개 반 100명
나. 연구 기간 : 2010년 4월~2011년 2월
다. 연구 절차
(1) 제7차 교육과정 및 개정 교육과정 초등학교 수학 교과서·지도서 분석
(2) 개념 이미지 분석 질문지 제작
(3) 분수와 나눗셈 개념 이미지 질문지 투입
(4) 분수와 나눗셈에 대한 학생들의 개념 이미지 분석

2. 검사 도구

본 연구를 수행하기 위한 표준화된 검사 도구가 없기 때문에 본 연구자가 문항을 개발하였다.

(1) 1차 질문지 제작

처음에는 시각적 표상과 언어적 표현을 함께 알아보기 위해서 하나의 개념을 주고 그것을 그림으로 표현해보고, 문장제 또는 말로 설명해보도록 2가지 형태로 문항을 구성하였다. 그리고 다양한 개념 이미지를 알아보기 위해서 한 개념에 떠오르는 이미지들을 5가지 이상 써보도록 제시하였다.

(2) 2차 질문지 제작

1차 질문지의 문제점을 보완하여 시각적 표상과 언어적 표현을 학생들이 스스로 판단하게끔 '그림이나 글로' 나타내도록 선택권을 주었다. 그리고 질문할 수 있는 개념을 많이 제시하여 단계적으로 학생들이 개념 이미지를 생성할 수 있도록 질문을 구성하였다.

3. 검사 실시

(1) 1차 질문지 검사

1차 검사는 2010년 9월 7일(화) 아침 활동 시간을 이용하여 15분간 실시하였다. 1차 검사 결과 드러난 문제점으로는 개념 이미지가 학생들에게 매우 생소해서 학생들이 쉽게 표상하지 못했으며 문제의 요구 사항이 많아 어려움을 겪는 것으로 드러났다.

(2) 2차 질문지 검사

2차 검사는 2010년 11월 11일(목) 아침 활동 시간에 이루어졌다. 학생들은 1차 질문지에서 개념을 한 번 표상해본 경험이 있어서인지 전보다 수월하게 개념을 표상해내고 있었으며 1차 질문지보다 쉽고 재미있게 개념 이미지를 표상하는 것을 볼 수 있었다.

4. 분석 기준 수립

6학년 3개 반 100명을 모두 연구 대상으로 포함시키고, 각 문항마다 무응답과 전혀 다른 개념을 설명한 학생의 수를 제외하고자 하였으나, 문항마다의 무응답의 비율이 다르기 때문에, 무응답의 비율도 나름대로 의미가 있다는 판단 아래 무응답도 하나의 기준으로 마련하였다. 우선 이미지 유형에 따라, 그림, 말, 그림과 말을 동시에 사용하는 경우로 구분하였으며, 그 안에서 세부적인 분석 기준을 마련하여 비율을 분석하였다.

5. 학생들의 개념 이미지 분석

가. 분수의 개념 이미지 분석 결과

(1) 분수의 여러 의미

<표Ⅲ-1> 분수 개념 이미지 유형 분석

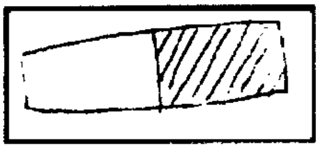
분수의 개념 (문항1,2,3,4번)	$\frac{1}{2}$		12의 $\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$1\frac{2}{3}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	87	87	77	77	80	80	83	83	327	81.7
그림과 언어	6	6	14	14	7	7	2	2	29	7.3
언어	7	7	7	7	11	11	15	15	40	10
무응답	0	0	2	2	2	2	0	0	4	1
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

(가) 문항 1번 $\frac{1}{2}$의 개념 이미지 분석

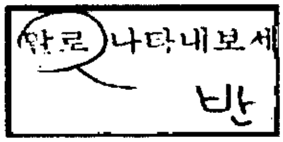
초등학교 2학년 수학 교과서에서 $\frac{1}{2}$의 개념 정의는 '전체를 똑같이 2로 나눈 것 중에 1'이다. 교과서에서는 직사각형을 점선으로 반으로 나눈 것 중 한 쪽에만 색칠 된 것으로 표상되어져 있다.

$\frac{1}{2}$에 대한 개념 이미지는 그림으로 나타내는 것이 87%로 가장 많았고, 말로 7%, 그림과 말로 동시에 표현한 응답이 6%로 나타났다. 그림으로 나타낼 때에는 원으로 나타낸 경우가 45.7%, 직사각형을 모델로 사용하는 경우가 34.4%로 대부분을 차지하고, 그 외에도 사람 모양이나 빵, 비커, 사과와 같은 구체물을 사용하는 경우도 있었다. $\frac{1}{2}$의 개념이미지를 말로 나타낸 학생은 1명이었으며 "반"으로 표현하였다. 학생 응답의 전체적인 특징은 $\frac{1}{2}$을 나타낼 때 전체에서 반을 색칠하여 이미지를 표상하는 경우가 많다는 것이며, 교과서 안에 개념 정의 표상(반으로 나눈 것 중 한 쪽에만 색칠 된 것)이 학생들에게 많은 영향을 끼치고 있다는 것을 알 수 있다. 분수의 도입에서 처음으로 나오는 개념이며 반을 의미하는 $\frac{1}{2}$은 97.2%의 올바른 개념 이미지 표상을 보이며 개념 이미지 형성에 큰 어려움을 가지고 있지 않음을 알 수 있었다.

그러나 분수의 도입에서 이루어지는 "똑같이 나누기"(등분할)의 개념에서 오류를 범하는 학생이 보이기도 하였다.



[그림Ⅲ-4]그림 표상

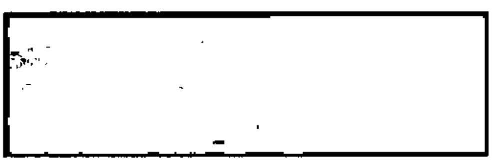


[그림Ⅲ-5]말 표상

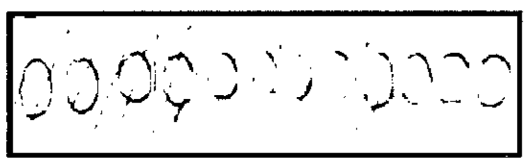
[그림Ⅲ-6]그림과 말

(나) 문항 2번 12의 $\frac{3}{4}$의 개념 이미지 분석

이 문항은 초등학교 3학년 수학 교육과정에 나오는 개념인 전체에 대한 부분으로서의 분수를 알아보고자 하는 것이다. 수학을 지도하면서 학생들이 이해하기 어려운 부분 중 하나가 바로 이 '분수만큼'의 개념인데 이 개념 이미지를 분석해 보면서 학생들이 느끼는 부분으로써의 분수는 어떤 이미지를 가지고 있는지 알아보고자 한다. 12의 $\frac{3}{4}$에 대한 개념 이미지를 그림으로 표현한 경우는 77%, 그림과 말로 표현한 경우가 7%이고, 말로 표현한 14% 응답하지 않은 학생은 2%였다. 그림으로 표현한 경우는 직사각형으로 나타낸 학생이 51.4%, 원(낱개) 42.9%, 그 밖에 수직선이나 사람으로 나타낸 경우가 각각 1명 씩(5.7%)으로 나타났다. 그림과 말로 표현한 경우는 그림을 그려놓고 말로 보충 설명하는 것으로 나타났다. 이미지 유형에는 선으로 나눠 색칠하는 것이 65.7%로 가장 많았고, 묶음 표현이 31.4%, 수직선으로 나누는 것이 2.9%로 나타났다. 학생들은 전체에 대한 부분으로서의 분수를 이산량보다는 연속량으로 나타내어 선으로 나누어 색칠하는 것에 더 익숙한 듯 보였으며, 심지어 이산량임에도 불구하고 묶음으로 표현하지 않고 공간을 나눔의 개념으로 이미지를 표현하는 것으로 보아 분수에 대한 개념이 연속량의 의미 선에서 머무는 학생이 있음을 알 수 있었다.



[그림Ⅲ-7]직사각형 그림



[그림Ⅲ-8]원 낱개 그림

(다) 문항 3번 $\frac{3}{2}$의 개념 이미지 분석

가분수는 초등학교 4학년에 처음 개념이 등장한다. 가분수의 개념 정의는 '분자가 분모

와 같거나 분모보다 큰 분수'를 말한다. 가분수 $\frac{3}{2}$에 대한 개념 이미지를 분석해본 결과 그림으로 표상하는 경우가 80%, 말로 표상하는 경우 11%, 그림과 말로 동시에 나타내는 경우 7% 무응답 2%로 나타났다. $\frac{3}{2}$의 개념 이미지를 그림으로 표상하는 경우에는 원을 그려 표현하는 학생이 48.6%, 직사각형으로 표현하는 학생은 34.3%로 나타났으며 그 외에도 비커, 사과, 과자 등 구체물(17.1%)로 나타내기도 하였다. 그림과 말로 표현되는 경우에는 $\frac{3}{2}$과 $1\frac{1}{2}$이 같다는 것을 설명하기 위해 동시에 표현한 학생이 3명(8.6%), 분수의 소수(1.5) 표현이 1명(2.8%), $\frac{1}{2}$이 3개를 나타낸 것이라는 설명이 1명(2.8%)으로 나타났다. 교육과정 상 가분수와 연이어 대분수를 공부하고 가분수를 대분수로 바꾸는 방법을 학습하게 되어, 그 결과 영향을 받아 이 문항의 특징은 $\frac{3}{2}$ 개념을 그대로 이미지화하는 것이 아니라 $1\frac{1}{2}$로 표상하는 학생들이 28.5%나 있다는 점이다. 뿐만 아니라, $\frac{3}{2}$과 동일한 양의 개념인 소수 1.5로 나타내는 경우도 있어 가분수가 학생들의 개념 이미지로 자리 잡을 때 '양의 개념'에 치중한 나머지 같은 양 의미의 다른 표현들로 변화된다는 것을 알 수 있다. 즉, 학생들은 분수의 여러 가지 기능을 알고 있음에도 불구하고 '양의 개념'으로 일반화 시키는 경향이 있음을 알 수 있었다. 분수의 다른 기능으로 비의 개념을 나타내는 것이 있는데, 이 문항에서 2명(5.7%) 이 $\frac{3}{2}$의 개념 이미지를 비의 개념으로 이미지화 하였다.

(라) 문항 4번 $1\frac{2}{3}$의 개념 이미지 분석

대분수는 가분수와 함께 4학년 교육과정에 연이어 등장하는 개념이다. 대분수의 개념 정의는 '자연수와 진분수로 이루어진 분수'이다. 이 문항에서는 그림으로 개념 이미지를 표상한 경우가 대부분이었으며(80%), 그림과 언어로 동시에 표현한 학생은 7%, 언어로 표현한 학생은 15%로 나타났다. 그림으로 나타낸 경우는 원 51.4%, 직사각형 31.4%로 나타났으며, 그 밖에 사람, 음료수 통, 숫자 1모양 등으로 표현하기도 하였다(17.2%). 흥미로운 점은 $1\frac{2}{3}$를 개념 이미지화 하는 데 있어 이번에는 $\frac{5}{3}$의 개념이미지로 나타내는 학생이 6명(17.1%)으로, 바로 전 문항인 3번 문항 가분수의 개념을 설명할 때 대분

수의 개념이미지로 나타낸 것에 비추어 생각해볼 때 가분수와 대분수를 동일시하는 학생들이 있는 것으로 보인다. 그리고 3,4번 문항의 응답자를 확인해본 결과 대분수를 가분수로 개념 이미지화한 학생과 가분수를 대분수로 개념 이미지화 한 학생이 단 1명밖에 겹치지 않는 것으로 보아 학생들이 자신이 개념이미지화하기 쉬운 분수 종류(대분수 혹은 가분수)로 개념 이미지를 표상하고 있다는 것을 알 수 있다.

(2) 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈

<표Ⅲ-2>동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

분수의 덧셈과 뺄셈 -동분모(문항 5,8번)	$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$		$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	73	73	69	69	142	71.0
그림과 언어	7	7	8	8	15	7.5
언어	18	18	21	21	39	19.5
무응답	2	2	2	2	4	2.0
합계	100	100	100	100	200	100

(가) 문항 5번. $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$의 개념 이미지 분석

동분모의 덧셈에 관한 개념은 초등학교 4학년 2학기에 등장한다. 교과서 상에는 원 모델을 등분하여 색칠하는 활동을 통해 동분모 덧셈 방식을 유추해내고 있다. 학생들은 활동을 통해서 분모가 같을 때에는 분모는 같게 두고 분자를 더하는 것이 방법이라는 것을 알아낼 수 있다. 동분모 분수의 덧셈인 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$의 개념 이미지를 분석한 결과 그림으로 표상한 경우 73%, 말로는 18%, 그림과 말로 동시에 표현한 경우 7%를 보였다. 그림으로 나타낸 학생인 경우 직사각형(전체 1과 부분)으로 나타낸 학생이 45.7%이며, 원으로 표상한 학생이 37.1%이다. 직사각형으로 표현한 학생은 모두 직사각형을 등분하여 전체로서의 부분으로 나타내었으며, 원으로 표현한 경우에도 원 낱개로 표현한 경우 30%, 전체와 부분으로 하나의 원을 그려 나타낸 경우가 70%로, 교과서에 제시된 대로 전체(1)의 부분으로서의 동분모 분수 계산이 이루어지는 것이 많음을 알 수 있었다. 수직선으로 표현한 학생은 1명(2.8%) 있었으며, 그 외에도 물, 구역 모양으로 모델을 정형화 시키지 않은 학생도 있었다(5.7%). 말로 표현한 경우는 동분

모 분수 덧셈 상황 또는 문장제, 혹은 동분모 분수의 덧셈에 대한 공식 설명으로 이루어졌는데, 상황이나 문장제를 만들 시에는 계란이나, 물 등 실생활에 사용되는 구체물을 사용하고 있었다. 그림과 말을 동시에 쓰는 경우는 그림에 대한 부연 설명을 하기 위함은 66.7%, 그림의 내용과는 별개로 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$의 계산에 대한 공식 설명은 33.3%로 나타났다.

(나) 문항 8번 $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$의 개념 이미지 분석

동분모의 뺄셈에 관한 개념도 4학년 2학기 수학 교육과정에서 동분모의 덧셈 다음으로 등장한다. 동분모의 덧셈과 뺄셈은 문항이 조금 떨어져 있음에도 불구하고 교육과정상 연달아 배우게 되는 개념이라 그 개념 이미지 표상에서도 그림, 말로 표현하는데 비슷한 경향성을 보였다. 그림으로 표상한 경우 69%, 말로는 21%, 그림과 말로 동시에 표현한 경우 8%를 보인 것이다. 그림으로는 원 45.2%, 직사각형 41.9%, 그 외 사람, 사과, 총알, 물통으로 표현하였다(12.9%). 원이나 직사각형으로 나타낼 때에는 원에서 2명(5.7%), 직사각형에서 1명(2.8%)를 제외하고는 모두 전체(1)에 대한 부분으로 모델을 사용하였다. 원 낱개로 표현한 학생 2명은 모두 오개념을 나타내었는데 이는 분자만으로 낱개 이미지화 한 결과로 볼 수 있다. 직사각형 낱개로 이용한 경우는 '비의 개념'으로 분수의 뺄셈을 계산하고 있었다. 말로써 개념이미지를 표상하는 경우에는 문장제로 표현한 경우 50%, 동분모 분수의 뺄셈의 방법을 설명한 경우 50%로 나타났다. 그림과 말로 표현한 경우는 대부분 그림을 보충 설명하는 목적으로 말을 사용하고 있었다.

(3) 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈

<표Ⅲ-3>이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

분수의 덧셈과 뺄셈 -이분모 (문항 6,7,9,10)	$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$		$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$		$1\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	64	64	68	68	61	61	54	54	247	61.7
그림과 언어	10	10	8	8	8	8	6	6	32	8.0
언어	23	23	22	22	28	28	30	30	103	25.8
무응답	3	3	2	2	3	3	10	10	18	4.5
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

(가) 문항 6번 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$의 개념 이미지 분석

이분모의 덧셈은 초등학교 5학년 교육과정에서 등장한다. 이 개념을 도입하기 위해서 바로 전 단원에서 '약수와 배수'를 공부하게 되는데 이는 이분모 분수의 덧셈에 쓰이는 '통분'의 개념을 익히도록 하는 데 있다. 이러한 교육과정의 흐름상 학생들의 이분모 분수의 덧셈에 대한 개념이미지는 형식적으로 '통분'의 개념을 많이 사용하게 된다. 6번 문항에서는 그림으로 64%, 말로는 23%, 그림과 말로 표현하는 경우가 10%가 된다. 그림으로 표현하는 경우는 직사각형으로는 56.7%, 원으론 30%, 그 외 수직선, 구역모양, 물통으로 나타낸 것이 13.3%이다. 그림으로 표현하는 경우는 오개념이미지를 제외하고는 모두 전체 1에서 부분을 나타내는 데 직사각형과 원이 사용되어지는 것을 볼 수 있었다. 말로 표현한 경우는 분수의 통분을 통한 설명 방법이 60%, 문장제나 상황 만들기 40%로 나타났다. 이 문항에서의 특징은 그림과 말을 동시에 표현하거나 말로 표현하는 응답이 이전 문항보다 현저히 늘어났다는 것을 알 수 있으며, 말로 표현하는 경우 '통분'을 활용하여 설명하는 방식이라는 점이다.

(나) 문항 7번 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$의 개념 이미지 분석

이번 문항도 문항 6번과 마찬가지로 이분모의 덧셈에 대한 개념이미지를 묻는 것이지만 그 답으로 가분수(혹은 대분수)가 나온다는 점에서 다르다. 1보다 작은 두 분수를 더했을 때 1보다 큰 분수가 나오는 상황에서 학생들이 어떤 개념 이미지를 보일지에 초점을 맞췄다. 이 문항에서는 그림 표상이 68%, 말 표상 22%, 그림과 말을 동시에 표상하는 경우 28%로 6번 문항과 거의 비슷한 표상 방법을 사용한 것으로 드러났다. 그림으로 나타내는 경우 직사각형으로는 57.7%, 원으로 42.3%, 원과 직사각형, 혹은 수직선과 원과 같이 두 가지를 동시에 사용하는 경우가 11.5%, 물통 모양은 3.8%로 나타났다. 말로써 표현한 경우 80%는 통분을 이용한 설명, 20%만이 구체물(물)을 이용한 문장제로 나타내었다. 그림과 말을 동시에 사용한 경우는 대부분 그림을 보충 설명하기 위한 말의 사용(87.5%)이었고, 12.5%가 그림과 별개로 통분을 통한 계산식의 설명으로 그림과 말을 함께 사용하였다.

(다) 문항 9번 $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$의 개념 이미지 분석

이 문항은 이분모 분수의 뺄셈에 관한 개념 이미지를 알아보고자 하는 것이다. 이분모

분수의 뺄셈은 이분모 분수의 덧셈 다음에 학습하는 개념으로 마찬가지로 '통분'의 개념에 기초한다. 그림으로 나타내는 경우 61%, 말로 28%, 그림과 말로는 8%, 응답하지 못한 학생이 3%가 된다. 그림으로 나타내는 비율이 줄어든 것을 볼 수 있는데 이는 학생들이 이분모 분수의 연산에서 그림으로는 한계가 있다고 느끼는 학생들이 있다는 것을 의미한다. 그림으로 표상하는 경우 65.4%가 직사각형을 이용하였고, 그 중에서도 2명(7.8%)의 학생은 일렬 직사각형 등분이 아닌 3×5 직사각형을 이용하여 합리적으로 개념을 이미지화 할 수 있었다., 30.8%가 원을 이용하였는데, 그 중에서 23%는 전체의 부분으로서의 원을, 6.8%는 원의 낱개를 이용하여 이미지화하였으며 수직선으로 나타낸 학생은 1명(3.8%)이었다. 말로 나타낸 학생들의 경우 통분으로 해결하는 방법 설명이 37.5%, 문장제를 만드는 경우도 37.5%로 같았고, 상황을 제시하는 경우가 25%였다. 그림과 말로 동시에 표현하는 경우는 그림을 그리고 통분의 원리를 설명한 경우가 44.4%, 그림 내용을 보충 설명한 경우가 55.6%이다.

(라) 문항 10번 $1\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$의 개념 이미지 분석

문항 10번도 문항 9번과 마찬가지로 이분모 분수의 뺄셈에 관한 개념 이미지를 분석하기 위한 문항이다. 이번에는 대분수와 진분수의 연산은 어떤 개념 이미지로 접근하는지 알아보도록 한다. 문항 9번과 성격이 같아서인지 그림으로 나타낸 경우54%, 말로 나타낸 경우 28%로 같았으나 그림과 말을 동시에 이용한 경우 6%, 무응답의 경우가 3%였다. 그림에는 52.2%가 직사각형을 이용하여 개념 이미지를 나타내고 있었으며, 34.8%는 원으로, 4..3%가 수직선으로, 4.3%는 직사각형과 원을 모두 사용하여 $1\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$의 개념 이미지를 나타내고 있었다. 말로 나타낸 개념이미지는 문제 요소를 이용하여 뺄셈 의미(제거, 비교)를 설명하는 경우가 50%로 나타났는데 그 중 제거의 의미가 40%, 비교의 의미가 10%이다. 또, 통분한 후 풀이 방법 설명이 37.5%, 문장제로 제시한 것이 12.5%로 나타났다. 그림과 말을 동시에 표현하는 경우는 모두 그림을 보충 설명하기 위함이었다. 이 문항의 전체적인 특징은 대분수를 가분수로 고치고 통분을 하는 개념 이미지가 대부분이었다는 점이다. 그리고 이 문항은 $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$가 가능하기 때문에 굳이 대분수를 가분수로 고칠 필요가 없음에도 불구하고 문제 풀이 과정이 드러난 응답에서는 1명을 제외하고 모두가 대분수를 가분수로 고치는 경향을 보였다.

(4) 분수의 곱셈 개념 이미지 분석

<표Ⅲ-4>분수의 곱셈 개념 이미지 유형 분석

분수의 곱셈 (문항 11, 12번)	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	52	52	52	52	104	52.0
그림과 언어	8	8	6	6	14	7.0
언어	27	27	27	27	54	27.0
무응답	13	13	15	15	28	14.0
합계	100	100	100	100	200	100

(가) 문항 11번 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$의 개념이미지

분수의 곱셈은 5학년 수학 교육과정에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 배우고 난 다음 단원에서 도입된다. 교과서 개념 정의 방법은 우선 직사각형 모델로 제시되어 등분을 하면서 답을 찾아나가는 방법을 제시하고, 다음으로 넓이의 개념을 이용하여 겹쳐지는 부분으로 답을 찾도록 한다. 그러고 나서 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱해준다는 분수의 곱셈 방법을 형식화한다. $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$의 개념이미지를 분석한 결과 그림으로 표상한 경우 52%, 말로는 27%, 그림과 말을 동시에 이용한 경우 8%로 나타났으며, 무응답이 13%로 여전히 높게 나타나 학생들이 분수의 곱셈에 관한 개념 이미지를 표상하는 것을 어려워하고 있음을 알 수 있었다. 그림으로 나타낸 경우 그 모델이 직사각형 41.6%, 원 50%, 삼각형 4.2%, 수직선 4.2%로 나타났다. 교과서 개념 도입 시 직사각형만으로 설명하지만 실제로 개념 이미지화했을 때는 여러 다른 모델로도 표현되어지는 것을 볼 수 있다. 말로 표상한 경우 50%가 분수의 곱셈 개념 정의 방법을 그대로 풀어 쓴 것으로 나타났는데 그 중에서 '약분'의 개념을 더한 설명은 75%로 분수의 곱셈 시 기약분수로 약분을 하는 알고리즘을 소유하고 있음을 나타내었다. 나머지 50%는 곱셈 의미 설명을 표현하였으며 포괄적인 의미이다 보니 '약분'의 개념을 덧붙인 학생은 1명에 불과했다. 그림과 말을 동시에 사용하는 경우는 '$\frac{1}{2}$이 $\frac{2}{3}$만큼 있는 것' 이라는 분수의 곱셈 의미를 보충 설명하는 식이었다.

분수의 곱셈의 바른 개념 이미지에는 직사각형이나 원을 반으로 나눈 뒤($\frac{1}{2}$) 반 부분

을 또 $\frac{2}{3}$로 나누어 2칸에 색칠하는 식으로 '$\frac{1}{2}$이 $\frac{2}{3}$만큼 있는 것'을 표현한 그림 개념 이미지가 46.2%, 분수의 곱셈 풀이 방법 설명이 38.7%, 단순 곱셈 의미 설명 15.4%로 분석되어진다.

나) 문항 12번 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$의 개념이미지

이 문항도 문항 11번과 마찬가지로 분수의 곱셈에 대한 개념 이미지를 분석하기 위한 문항이다. 대분수가 아닌 가분수를 학생들에게 문제로 제시함으로써 교과서에는 따로 개념 정의되지 않는 (진분수)×(가분수)의 개념 이미지를 분석해보고자 함이다. 이 문항의 개념 이미지는 그림으로 52%, 말로 27%, 그림과 말을 동시에 6%, 무응답이 15%로 나타났다. 그림으로는 원으로 표현한 경우 47.8%, 직사각형은 43.5%, 원과 직사각형 혼합 사용 4.3%, 수직선 표현 4.3%로 나타났다. 말로써 나타내는 경우 풀이 방법을 설명 50%, 곱셈 의미를 설명 50%로 나타났으며 약분의 개념이 포함되는 응답은 25%에 불과했다. 그림과 말로 동시에 나타내는 경우는 그림에 대한 보충 설명으로 말이 사용되게 된다.

오개념 이미지는 분수만 개념 이미지로 나타낸 경우와, 곱셈과 덧셈의 혼동이 있었다. 재미있는 사실은 이 오개념들 중에서 16.7%가 분수의 곱셈에서는 바꿀 필요가 없는 가분수 $\frac{4}{3}$을 $1\frac{1}{3}$로 바꾸어 개념 이미지화하는 양상을 보인다는 점이다.

나. 나눗셈의 개념 이미지 분석 결과

(1) 자연수끼리의 나눗셈 개념 이미지 분석

<표Ⅲ-5>자연수끼리의 나눗셈의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

자연수끼리의 나눗셈 (문항1,2,3,4,5번)	8÷2		3÷2		2÷2		1÷2		2÷4		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
포함	58	69	52	70.3	59	73.7	7	10.3	37	69.8	213	59.3
등분	26	31	22	29.7	21	26.3	61	89.7	16	30.2	146	40.7
합계	84	100	74	100	80	100	68	100	53	100	359	100

<표Ⅲ-6>자연수끼리의 나눗셈의 표상 방법 유형 분석

자연수끼리의 나눗셈 (문항1,2,3,4,5번)	8÷2		3÷2		2÷2		1÷2		2÷4		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	79	79	82	82	81	81	70	70	75	75	387	77.4
그림과 언어	10	10	7	7	8	8	5	5	5	5	35	7.0
언어	11	11	11	11	11	11	19	19	15	15	67	13.4
무응답	0	0	0	0	0	0	6	6	5	5	11	2.2
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	500	100

(가) 문항 1번 8÷2의 개념 이미지 분석

8÷2 에 대한 개념 이미지는 69%의 학생이 포함제 형식으로, 31%의 학생이 등분제 형식으로 나눗셈을 개념이미지화 한다는 것을 알 수 있었다. 표상 방법에는 그림으로 나타내는 것이 79%로 가장 많았고, 말로 11%, 그림과 말로 동시에 표현한 응답이 10%로 나타났다. 그림으로 나타낼 때에는 원으로 나타낸 경우가 67.4%로 가장 많았고, 직사각형을 모델로 사용하는 경우가 23.6%, 수직선 2.3%, 그 외에 사람 모양이나 빵, 비커, 사과와 같은 구체물을 사용하는 경우가 6.7%였다. 8÷2에 대한 개념 이미지를 말로 나타낸 학생 중에는 54.5%가 단순히 문제와 답을 계산해서 적는 경우로 반 정도였고, 상황 제시 36.4%, 설명은 9.1%가 응답했다. 대부분의 학생이 8÷2에 대한 정확한 개념 이미지를 가지고 있었으며 포함제로서의 나눗셈에 더욱 익숙한 것으로 보인다.

(나) 문항 2번 3÷2의 개념 이미지 분석

나누어떨어지지 않는 나눗셈에 대한 개념 정의 역시 초등학교 3학년 교육과정에 등장한다. 3학년 2학기에 (두 자리 수)÷(한자리수)의 나눗셈을 배우면서 '나머지'라는 용어가 도입된다. 전체의 41% 학생들이 '나머지'를 하나 남겨두고 2개만 묶는 것으로 나타났으며, 본 연구 대상은 초등학교 6학년 학생들이기 때문에 '나머지' 개념뿐만 아니라 5·6학년 교육과정에 등장하는 (자연수)÷(자연수)를 분수와 소수로 나타내는 개념 이미지는 37%로 나타났다. 이 문항에서는 70.3%가 포함, 29.7%가 등분의 관점으로 개념 이미지를 형성하였다. 표상 방법에 있어 그림으로 표현한 경우는 82%, 그림과 언어로 표현한 경우가 7%이고, 언어로 표현한 학생은 11%로 나타났다. 그림으로 표현한 경우는 원으

로 나타낸 학생이 64%, 직사각형 22.5%, 수직선으로 나타내는 경우가 7.9%, 그 밖에 사과나 사탕 등 구체물을 표현하는 경우가 5.6%로 나타났다. 개념 이미지를 언어로 표현한 학생 중에는 설명이 45.4%, 상황 제시가 27.3%, 문제와 답을 그대로 적는 경우가 27.3%로 나타나 풀이 방법이나, 나누어떨어지지 않는 나눗셈에 대한 설명으로 개념 이미지를 형성하는 경우가 많음을 알 수 있었다. 설명하는 데에서 발견된 학생들의 오개념에는 '나누어떨어지지 않는다'라는 표현을 '나눠지지 않는다'라고 표현하기도 하였다.

(다) 문항 3번 2÷2의 개념 이미지 분석

2÷2에 대한 개념 이미지를 분석해본 결과 포함제로 나타내는 경우가 73.75%, 등분제로 나타내는 경우가 26.25%로 나타났다. 표상 방법에 있어서는 그림으로 표상하는 경우가 81%, 그림과 언어로 표상하는 경우 7%, 언어로만 나타내는 경우가 11%로 나타났다. 2÷2의 개념 이미지를 그림으로 표상하는 경우에는 원을 그려 표현하는 학생이 67.4%, 직사각형으로 표현하는 학생은 22.5%로 나타났으며 수직선으로 그려 나타낸 경우는 3.4%였고,. 그 외에도 사과, 사탕 등 구체물(6.2%)로도 표현되었다. 원으로 나타내는 경우에는 원 낱개(2)로 표현되었고, 직사각형은 직사각막대(2등분)를 그렸다. 언어로 표현한 경우에는 개념 이미지를 설명한 경우 27.2%, 실제 상황을 제시한 경우 36.4%, 문제와 답만 적은 경우도 36.4%였다.

(라) 문항 4번 1÷2의 개념 이미지 분석

피제수가 제수보다 작은 나눗셈은 초등학교 5학년 교육과정에서 등장한다. 물론 4학년 때 분수를 도입하면서 '전체 1을 2로 똑같이 나눈 것 중에 하나를 $\frac{1}{2}$' 임을 이해한다면 1÷2가 $\frac{1}{2}$와 같다는 것을 알 수 있겠지만 실제적으로 교육과정에서 다루는 시기는 초등학교 5학년 수학 교육과정에서이다. 이 문항에서 포함제는 10.3%, 등분제는 89.7%로 나타나는데, 여기서 흥미로운 점은 피제수가 제수보다 작아지자 이제까지 우세하게 나타났던 포함제 개념 이미지가 확연히 줄어들고 등분제의 개념 이미지가 비율 상 높게 나타난다는 점이다. 특히 '나누기 2'의 개념은 반으로 나눈다는 점에서 등분하기 쉽다는 장점이 있어 더욱 우세하게 드러날 것이라는 예상을 할 수 있지만, 이전에도 계속 2로 나누는 문항이었다는 점에서 피제수가 제수보다 작은 나눗셈에서는 학생들이 포함제로 개념을 이미지화하는 것을 어려워 한다는 결론을 내릴 수 있다. 이것에 대해서는 다음

문항인 5번 문항과 연계하여 좀 더 분석해보도록 하겠다. 표상 방법에는 그림 70%, 그림과 언어 5%, 언어 19%, 답변을 하지 않은 학생이 6%로 나타났다. 이 문항에서 처음으로 무응답 학생이 나타났다는 점에서도 피제수가 작은 나눗셈을 학생들이 이미지화하는 것을 어려워한다는 점이 드러난다. 그림으로 나타낸 경우는 원 58.7%, 직사각형 28%로 나타났으며, 수직선 8%, 그 외에도 사탕, 빵 등으로 표현하기도 하였다(5.3%). 언어로 표현한 경우 36.8%가 상황 제시 형태로, 26.3%가 설명, 31.6%가 문제와 답을 적기만 하였으며 기타로 1이라고 표현한 경우가 1명(5.3%)이었다. 말로 설명하는 경우 "나눌 수 없기 때문에", "나누지 못하기 때문에" 분수, 혹은 소수로 만들어야 한다는 생각도 담겨 있어 피제수가 제수보다 작은 나눗셈에 대한 학생들의 개념이미지가 완벽하지 않음을 알 수 있었다.

(마) 문항 5번 2÷4의 개념 이미지 분석

이 문항은 문항 4번의 연장선상으로 피제수가 제수보다 작은 경우이다. 4번 문제와는 다르게 이번에는 4로 나누는 상황을 제시하여 개념 이미지를 분석해보았다. 이 문항에서 포함제는 69.8%, 등분제는 30.2%로 나타나는데, 이것은 4번 문항에서 나타나는 결과와 판이하게 다르다. 즉, 피제수가 제수보다 작기 때문에 등분제 개념 이미지가 우세한 것이 아니라는 것이다. 그렇다면 이 문항과 함께 살펴본 결과 4번 문항의 등분제 개념 이미지가 우세한 까닭을 생각해볼만 하다. 그리하여 내린 결론은 피제수가 1일 때 학생들은 포함제보다 등분제를 먼저 생각한다는 것으로 분석해볼 수 있다. 표상 방법에는 그림 60%, 사각형 23.7%, 수직선 7.5%, 그 외 사과로 나타낸 것이 8.8%였다. 언어로 표현한 경우 30.7%가 설명으로, 23.1%가 상황, 46.2%가 문제와 답을 나타냈다.

(2) (분수)÷(자연수)의 개념 이미지 분석

<표Ⅲ-7>(분수)÷(자연수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

분수와 자연수의 나눗셈-(분수)÷(자연수) (문항 6,7,8,9번)	$\frac{1}{2}\div 2$		$\frac{1}{4}\div 2$		$\frac{1}{4}\div 4$		$\frac{3}{4}\div 2$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
포함	3	6.4	2	5	2	5.6	2	4.9	9	5.5
등분	44	93.6	38	95	34	94.4	39	95.1	155	94.5
합계	47	100	40	100	36	100	41	100	164	100

<표Ⅲ-8>(분수)÷(자연수)의 표상 방법 유형 분석

분수와 자연수의 나눗셈-(분수)÷(자연수) (문항 6,7,8,9번)	$\frac{1}{2}\div2$		$\frac{1}{4}\div2$		$\frac{1}{4}\div4$		$\frac{3}{4}\div2$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	65	65	69	69	66	66	63	63	263	65.7
그림과 언어	6	6	3	3	2	2	6	6	17	4.3
언어	19	19	22	22	25	25	20	20	86	21.5
무응답	10	10	6	6	7	7	11	11	34	8.5
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

분수와 자연수의 나눗셈인 (분수)÷(자연수)에 관한 개념 정의는 초등학교 5학년 2학기에 등장한다. 우선 '나눗셈을 곱셈으로 나타내는 활동을 통해 제수인 자연수를 역수 취해서 곱셈으로 나타낼 수 있다는 것을 이해한 후 다음 활동으로 (분수)÷(자연수)를 배우게 된다. 결국 (분수)÷(자연수)의 개념 정의는 (분수)$\times\frac{1}{(\text{자연수})}$와 같음으로 교과서 상에는 제시되어 있다. 6,7,8,9번 문항의 개념 이미지를 분석해봄으로써 학생들이 가지고 있는 개념 이미지는 어떤 종류인지 알아보도록 하겠다.

(가) 문항 6번의 $\frac{1}{2}\div2$의 개념 이미지 분석

이 문항에서 포함제는 6.4%, 등분제는 93.6%로 나타났다. 이것 또한 피제수가 제수보다 작은 경우에다가 피제수가 <분수>로 특수한 경우이기 때문에 이러한 경우 개념 이미지가 대부분 등분제로 나타난다는 특징은 주목할 만 하다. 표상 방법으로 그림 65%, 그림과 언어로는 6%, 언어 19%, 응답하지 않은 학생이 10%로 나타났다. 그림으로 나타낸 학생인 경우 원으로 표상한 학생이 57.7%, 직사각형으로 나타낸 학생이 33.9%이며, 수직선으로 나타낸 경우가 5.6%, 그 외에 사탕, 물통 등으로 나타낸 경우가 2.8%이다. 직사각형으로 표현한 학생은 2×2 직사각형이나 직사각막대로, 원으로 표현한 경우에는 원을 등분한 것이나 부분인 반원으로 표현하였다. 언어로 표현한 경우에는 상황을 제시한 경우가 25%, 설명 18.7%, 문제와 답을 적은 경우 43.8%, 역수로 표시해서 곱셈을 나타낸 경우가 12.5%로 나타났다. 여기서 알 수 있는 점은 교과서에 제시된 대로 학생들이 역수의 곱으로 나타내는 개념 이미지는 그다지 많지 않다는 점이다.

개념 이미지 중에서는 나눗셈을 곱셈으로 착각하거나, 등분을 제대로 하지 않는 등 오개념을 형성하는 경우도 있었다.

(나) 문항 7번 $\frac{1}{4}\div2$의 개념 이미지 분석

이 문항도 6번 문항과 마찬가지로 포함제 5%, 등분제 95%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 69%, 그림과 언어로 동시에 3%, 언어 22%, 무응답 6%로 나타났다. 그림으로는 원 54.2%, 직사각형 29.2%, 수직선 8.3%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용하는 경우도 있었다(8.3%). 원을 사용한 경우의 35.9%는 4등분 중 한 조각의 1/4원을 이용해 그것을 전체로 반을 나누며 표현하거나 원 전체에서 1/4부분을 색칠하고 그것을 반으로 나누는 식으로 표상하였다. 직사각형의 경우는 대부분 직사각막대로 나타내는 것을 편하게 생각하고 있었다(90.5%). 언어로 표상한 경우 설명 28.6%, 상황 제시 28.6%, 문제와 답 21.4%, 역수곱 21.4%로 나타났다. 그리고 몇몇 학생들은 역수의 곱을 하지 않고 그대로 2를 곱해버리는 실수를 범하기도 했다.

(다) 문항 8번 $\frac{1}{4}\div4$의 개념 이미지 분석

피제수가 분수인 이 문항도 포함제 5.6%, 등분제 94.4%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 66%, 그림과 언어로 동시에 2%, 언어 25%, 무응답 7%로 나타났다. 그림에 사용된 모델로는 원 52.9%, 직사각형 33.9%, 수직선 8.8%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용 4.4%가 있다.. 원을 사용한 경우의 4등분 중 한 조각의 1/4원을 이용하는 경우, 원 하나로 표상하였고, 직사각형의 경우는 대부분 직사각막대로 나타내는 것에 2×2 직시각형으로 나타내기도 하였다. 언어로 표상한 경우 설명 35.7%, 상황 제시 28.6%, 문제와 답 21.4%, 역수곱 14.3%로 나타났다. $\frac{1}{4}$나누기를 곱셈으로 계산하는 등 계산 실수를 범하는 학생도 여럿 있었다.

(라) 문항 9번 $\frac{3}{4}\div2$의 개념 이미지 분석

이 문항에서도 (분수)÷(자연수)에 해당하는 모든 문항에서와 마찬가지로 포함제 4.9%, 등분제 95.1%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 63%, 그림과 언어로 동시에 6%, 언어 20%, 무응답 11%로 나타났다. 그림으로는 원

55.1%, 직사각형 30.5%, 수직선 7.2%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용하는 경우도 7.2%이다. 원을 사용한 경우의 34.2%는 4등분 중 세 조각의 3/4원을 이용해 그것을 전체로 반을 나누며 표현하거나 원 전체에서 1/4부분을 색칠하고 그것을 반으로 나누는 식으로 표상하였다. 직사각형의 경우는 직사각막대는 물론이고, 2×4직사각형과 2×2직사각형을 사용하기도 한다. 언어로 표상한 경우 설명 25%, 상황 제시 15%, 문제와 답 40%, 역수곱 20%로 나타났다.

(3) 진분수끼리의 나눗셈 개념 이미지 분석

<표Ⅲ-9> (진분수)÷(진분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

분수끼리의 나눗셈 (문항10.11,13번)	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$		$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
포함	8	100	17	94.4	12	100	37	97.4
등분	0	0	ㄴ	5.6	0	0	1	2.6
합계	8	100	18	100	12	100	38	100

<표Ⅲ-10> (진분수)÷(진분수)의 표상 방법 유형 분석

분수끼리의 나눗셈 (문항10.11,13번)	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$		$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	57	57	64	64	58	58	179	59.6
그림과 언어	2	2	1	1	2	2	5	1.7
언어	27	27	23	23	28	28	78	26.0
무응답	14	14	12	12	12	12	38	12.7
합계	100	100	100	100	100	100	300	100

분수끼리의 나눗셈인 (진분수)÷(진분수)는 초등학교 6학년 2학기에 도입되는 개념이다. 우선 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 색막대를 자르는 활동을 통해 몇 개가 들어있는지 알아보는 활동을 한 후에, 그 다음 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 도입한다. 통분을 해서 분모가 같게 만든 후에 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 하는 방법을 사용한다. 이러한 방법으로 활동을 한 후에는 통분을 하여 푸는 방법을 공식화하여

변형하면 역수의 곱으로 나눗셈이 이루어진다는 원리를 알아내는 것이다. 차례가 그러한데 질문지에 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$를 먼저 놓은 이유는 그 전 문제인 문항 9번을 보면 그 까닭을 알 수 있다. 학생들이 가장 많이 하는 실수 중 하나가 $\frac{1}{2}$을 곱하는 것과 $\frac{1}{2}$을 나누는 것 모두 2로 나누는 개념으로 혼동하고 있다. 그리하여 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$를 $\frac{3}{4} \div 2$ 바로 다음에 놓아서 혼동되지 않도록 하였다.

(가) 문항 10번 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 개념 이미지 분석

분수끼리의 나눗셈에서는 100% 포함제 개념 이미지가 사용된다. 제수가 분수가 되면 등분제를 사용하기 어렵기 때문에 학생들은 포함제를 사용하고 있었다. 표상 방법에는 57%가 그림, 2%가 그림과 언어를 동시에, 27%가 언어만을 사용하였고 응답하지 않은 학생이 14%나 되었다. 그림을 사용한 경우 원이 57.6%, 사각형이 37.3%, 수직선이 5.1%로 나타났다. 언어를 사용한 경우 설명 52.6%, 상황 제시 5.3%, 문제와 답을 표현 42.1%로 실제 문제 상황을 만들어 제시하는 경우가 현저히 줄어들었다. 이는 진분수끼리의 나눗셈 상황이 현실 생활에 자주 쓰이지 않으며 교과서 상에서도 색막대와 같은 모델만 사용하기 때문으로 보인다. 100명의 응답 중 개념 정의 중 하나인 역수곱의 원리를 이용한 응답은 13%, 통분을 사용한 응답은 2%였고, 일부러 9번 문항 바로 다음 문항으로 놓았음에도 불구하고 2로 나누는 것이라는 오개념이 존재하고 있었다(9%).

(나)문항 11번 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$의 개념 이미지 분석

이 문항은 동분모 진분수끼리의 나눗셈이어서 포함제로 나타내기 수월한 것으로 드러났다. 94.4%가 포함제를, 5.6%가 등분제로 나타냈다. 표상 방법에는 그림 64%, 그림과 언어 1%, 언어 23%, 무응답 12%로 나타났다. 그림에 사용된 모델로는 50.8%가 원, 40%가 사각형, 7.7%가 수직선이었다. 분수의 표상이기 때문에 원을 사용하는 경우 낱개보다는 원 하나를 나누는 것으로 사용하였고, 직사각형도 직사각막대를 주로 사용하였다. 언어의 경우 설명 30%, 상황 제시 10%, 문제와 답 30%, 역수의 곱을 설명하는 경우가 30%로 나타났다. 역수의 곱을 나타내는 개념 이미지는 그림과 언어 모두 포함해서 전체의 17%, 통분 개념 이미지는 2%로 나타나 다양한 개념 이미지를 구성해나가는 것으로 나타났다.

(다) 문항 13번 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$의 개념 이미지 분석

100%의 포함제로 개념이미지가 분석된 이 문항은 표상 방법이 그림 58%, 그림과 언어 2%, 언어 28%로 표현되어 있고, 무응답은 12%가 된다. 그림에서는 45%의 원, 40%의 사각형, 8.3%의 수직선과 그 외의 모델로 6.7%가 나타났다. 언어 표현에서는 설명 41.2%, 상황 제시로 17.6%, 문제와 답으로 41.2%가 있다. 전체에서 역수곱 원리가 사용되는 개념이미지는 14%, 분수의 통분은 4%로 나타났다.

(4) (자연수)÷(분수)의 개념 이미지 분석

<표Ⅲ-9> (자연수)÷(분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

자연수와 분수의 나눗셈-(자연수)÷(분수) (문항 12번)	$3 \div \frac{1}{2}$		합계	백분율
	응답수	백분율		
포함	14	100	14	100
등분	0	0	0	0
합계	14	100	14	100

<표Ⅲ-10> (자연수)÷(분수)의 표상 방법 유형 분석

자연수와 분수의 나눗셈-(자연수)÷(분수) (문항 12번)	$3 \div \frac{1}{2}$		합계	백분율
	응답수	백분율		
그림	63	63	63	63
언어	3	3	3	3
그림과 언어	22	22	22	22
무응답	12	12	12	12
합계	100	100	100	100

(가) 문항 12번 $3 \div \frac{1}{2}$의 개념이미지

이 문항은 100% 포함제 개념 이미지를 나타내었다. 그림이 63%, 그림과 언어 3%, 언어 22%, 무응답 12%로 이루어졌다. 그림에 사용된 모델로는 51.5%로 원이, 36.4%로 직사각형, 7.6%로 수직선, 그 외 배 그림과 같은 구체물 4.5%로 나타났다. 언어로 표현

할 때는 설명이 42.1%, 상황 제시가 10.5%, 문제와 답을 표현하는 것이 15.8%, 기타 역수의 곱이나 통분으로 나타내는 경우 31.6%가 있다. 전체에서 역수곱으로 표현한 경우는 23%이며 생각보다 오개념도 많이 생성되는 문항이었다(34%).

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 분수와 나눗셈에 대한 초등학교 학생들의 개념 이미지를 분석하였고, 연구결과 교과서 안의 개념 정의를 학생들 스스로 개념 이미지화하여 다양한 유형으로 만들어나가고 있다는 것을 알 수 있었다.

분수의 개념 이미지는 대체로 전체와 부분의 의미로 직사각형이나 원을 등분하여 색칠함으로써 표현하는 경우가 대다수였다. 그 외에도 비의 개념이나 몫의 의미로서의 분수의 개념을 표상하기도 하였다.

나눗셈의 개념 이미지는 등분제보다는 포함제로 나타내는 경우가 비율 상 많았다. 특히나 분수가 제수로 쓰이는 상황에서는 100%로 포함제만으로 개념 이미지를 형성하였다. 분수가 실제적인 개념보다는 추상적 개념에 가깝기 때문에 등분을 하는 것이 어려워 포함제로 표상할 수 밖에 없는 것으로 보인다. 특히나 분수의 개념 자체가 전체와 부분의 관계로 추상적이기 때문에 분수의 나눗셈 상황을 이미지화시키는 것에서는 많은 학생들이 오개념을 지니고 있는 것으로 나타났다.

분수와 나눗셈에 대한 개념 이미지를 표상한 결과를 종합해보면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 교과서에 제시된 개념 정의를 변형시키거나 자신의 것으로 재해석하여 다양한 개념 이미지를 만들어내고 있음을 알 수 있었다. 학생들의 개념 이미지는 일률적이지 않았고 나름의 원리와 규칙을 가지고 존재하고 있었다. 그러나 절차적인 지식 위주의 현재의 교육 여건 상 의미 있는 개념 이미지를 만들어나가는 것을 어려워하고 있는 것으로 나타났다. 그래서 과정보다는 결과 위주의 표상을 나타내는 경우가 많았으며 정확하지 않은 개념이나 오개념을 지니고 있는 경우도 흔하게 드러났다.

둘째, 학생들은 대체로 그림으로 개념 이미지를 표상하나, 그림만으로 설명이 안 될 때는 그림과 말을 동시에 사용하였다. 그리고 개념이 어려워질수록 말로 표현하는 경우가 점점 늘어나고 있는 것으로 나타났다. 그림으로 나타내는 경우, 학생들이 사용하는 모델들은 정형화된 직사각형, 원 모델이 대다수였으며 그 외에도 실생활에 사용되는 구

체물(사과, 사탕 등)로 나타내기도 하였다. 말로 표상할 때에는 푸는 방법의 설명이나 답을 구하는 공식 등의 절차적 지식이 주를 이루었다.

셋째, 교육과정 상 뒤로 갈수록 개념의 확장이 이루어져 학생들이 개념 이미지를 나타내는데 어려워했다. 그래서 무응답이나 오개념의 비율이 늘어났고, 그림과 말 중에 말로 표현하여 절차적인 지식 위주의 설명만 하는 경우가 많았다.

그러나 이 연구는 제한된 지역에서 100명의 연구 대상만으로 개념 이미지를 조사하였기 때문에 이러한 개념 이미지들을 일반화하기에는 무리가 있다. 게다가 학생들이 머릿속의 개념 이미지가 질문지에 충분히 표상되었다고 보기도 어렵다. 그러므로 앞으로 학생들의 개념 이미지를 질문지의 형식을 학생들의 머릿속 개념 이미지를 충분하게 표상할 수 있도록 개발한다든지, 질문지뿐만 아니라 면담이나 관찰을 통한 개념 이미지 분석이 이루어져도 좋을 것 같다.

분수와 나눗셈 개념은 초등학교 학생들의 인식 수준에서는 형상화하기 어려운 개념이다. 이러한 개념 이미지를 연구해봄으로써 학생들이 분수와 나눗셈에 대해 구성하는 다양한 개념 이미지 양상을 알 수 있어서 앞으로 수학 교육에서의 개념 학습의 방향에 대해 생각해 볼 수 있었다. 학생들의 다양한 개념 이미지에 맞게 여러 가지 방법으로 개념을 설명하고 예를 들어주며 절차적인 공식이나 지식보다는 과정 중심의 학습으로 구성해나가고 아울러 학생들의 인지적 과정에 걸맞은 교수·학습 방법을 개발해나갈 수 있도록 해야 할 것이다.

참고문헌

교육과학기술부. (2002). 교사용지도서. 대한교과서 주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 3-가. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 3-나. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 4-가. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 4-나. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 5-가. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 5-나. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 6-가. 대한교과서주식회사.

교육과학기술부. (2003). 수학 6-나. 대한교과서주식회사.

류희찬, 조완영, 김인수(공역). (2003). 고등 수학적 사고. 경문사.

배종수. (2002). 수학교육에서의 개념 형성. 대한수학회소식.

김미령. (2004). 초등수학에서 학생이 갖고 있는 개념 이미지 유형 분석. 석사학위논문. 서울교육대학교 수학교육과.

최창우. (2002). 초등수학 학습에 있어서 표상에 관한 고찰. 한국수학교육학회 학술지. 대구교육대학교.

한길준, 우호식. (2001). 고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제 40권 제 2호. 241-252

엄재엽, (2009). 초등학생의 분수 계산에서 나타나는 오류의 유형 분석. 석사학위논문. 대구교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공

김민정, (2004). 자연수 나눗셈 오류 유형 진단 및 교정. 석사학위논문. 경인교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공

최영주, (2005). 초등학교 학생들의 분수 오개념 분석 및 분수 개념 형성. 석사학위논문. 전주교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공

Skemp. R. R. (1987). The psychology of learning mathematics, Lawrence Erlbaum Associates. Inc. NewJersey.

Tall. D. (1991). Advanced mathematical thinking. Kluwer Academic Publishers.

Vinner. S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(Ed). Advanced mathematical Thinking(pp. 65-81). Boston

: Kluwer Academic Publishers.
Vinner. S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function Intuitional Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

〈abstract〉

Analyzing 'Concept Image' about fractions and divisions in Elementary school mathematics

Shin, Seong hee(Jeju Teaheung Elementary School)
Choi, Keunbae(Jeju National University)

Students tend to construct their images and experiences through different activities in order to grasp concepts of what they are learning. This constructed image is called 'Concept Image' - nonverbal thing that students individually form by combining their previous experiences with specific names of each concept. Students may be able to solve the math problems on the basis of their concept images which have already been constructed. Moreover, they can use that images to grasp other concepts.

In order to get students not to generate wrong concept in learning mathematics, concept image might be indispensable. Therefore, it is necessary to analyze different types of concept images that student have already constructed practically , and understand the primary mechanism for students' concept learning process in mathematics.

This study analyzes concept image about fractions and divisions by creating two stages of questionnaires and making students fill out them. As a result of the study, I found out three outcomes.

First, students usually represented concept images by drawing, or they used both drawing and speaking when they felt drawing is not enough.

Second, students often used specific models in the real life as well as formulaic shapes such as rectangle or circle.

Finally, as students move on the advanced level in school curriculum, the concepts they have to learn expand more and more. Therefore, students tend to have difficulty in presenting only by drawings and generate wrong concepts.

I hope that the analyzing various concept images could help students understand the concepts of mathematics.

<Key words> Concept Image, fractions, divisions