구면상에 유도되는 성질에 관한 연구

현 종 익*

Induced properties on sphere

Jong-Ik Hyun

〈목 차〉

Summary

In this paper, we obtained the general theorem and example for the induced properties on sphere.

Ⅰ. 서 론

Riemann은 1854년에 새로운 공리를 설정하고 Non-Euclid 기하학을 구성하는데 성공했다. Riemann은 직선공리 「직선은 무한히 연장할 수 있다」는 가정때문에 평행선은 존재한다고 생각했었다. 그래서 Riemann은 「직선은 끝이없고 유한의 길이를 갖는다」라고 정의하고, Euclid의 평행선 공리 대신에 다음 공리를 가정했다.

Riemann의 평행선 공리 평행선은 존재하지 않는다.

이 공리를 바탕으로 구성된 기하학을 타원기하학이라고 명명했었다.

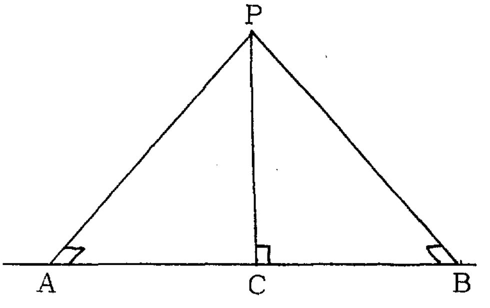
Riemann은 타원기하학의 특성을 구면상에서 구체화했다. 구면상의 대원호를 타원기하학의 직선으로 생각한다. 그런데 직선은 타원기하학에서 일정한 길이를 갖고 닫혀있으므

* 제주교육대학교 수학교육과 부교수

로, 경계상의 점 A는 직경의 반대점 A′와 일치해야 하고, 대원호는 폐곡선이 된다. 그리고 두직선을 나타내는 두 대원호는 한 점에서 만난다.

Riemann 평면에서 두 직선사이의 교각은 이들에 대응하는 두 호사이의 교각으로 정한다. 이것은 두 변과 사이각에 의하여 구면상의 단 하나의 3각형을 정하기 위해서 필요하다.

다음, 타원기하학에서 성립하는 몇가지의 성질을 조사하기 전에 극선의 성질을 알아본다.



(그림 1)

극선의 성질 한직선 ℓ의 극이라 부르는 점 P가 존재하고 다음 성질을 가진다.

(1) ℓ상의 한 점을 A라 하면 $PA \perp \ell$ 이다.

(2) P는 ℓ상의 모든 점으로 부터 등거리 q에 있다. 여기서 이 거리 q를 극선거리라 한다.

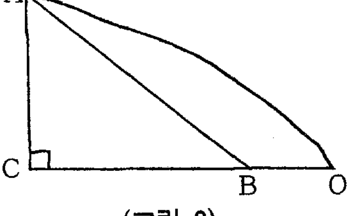
한편, 3각형 ABC에서 $\angle C = \angle R$이라 하자. 이때 $CO = q$인 점 O를 잡으면, O는 직선 AC의 극이다.

따라서, $\angle OAC = \angle C = \angle R$이므로 다음이 성립한다.

(1) $BC < q \longleftrightarrow \angle BAC < \angle R$

(2) $BC = q \longleftrightarrow \angle BAC = \angle R$

(3) $BC > q \longleftrightarrow \angle BAC > \angle R$



(그림 2)

Ⅱ. 구면상의 성질

(정리 1) Saccheri의 사각형에서 남은 꼭지각은 같고 둔각이다.

(증명) 사각형 ABCD를 Saccheri의 사각형이라 하고, ∠A=∠B=∠R, AD=BC라 하면 ∠C=∠D이다.

변 AB, CD의 중점을 각각 M, H라 하고, D, H, C를 M과 연결하면

△DAM≡△CBM,

△HDM≡△HCM

∴HM⊥AB, HM⊥CD

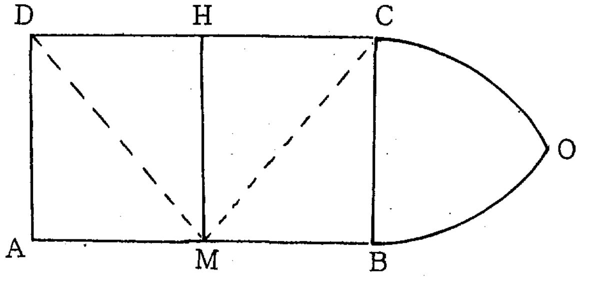
다음, AB와 DC의 교점을 O라 하면,

O는 직선 HM의 극이다.

OB<OM=q이므로

∠OCB < ∠R이다.

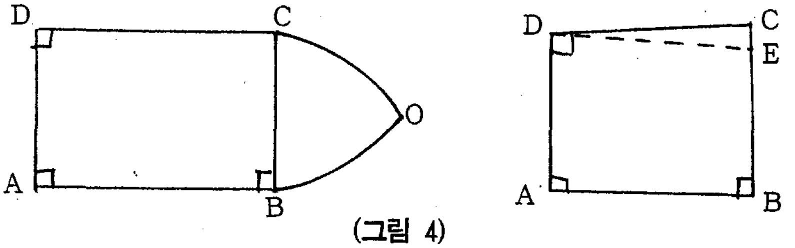
따라서, ∠BCD=∠ADC > ∠R이다.



(그림 3)

(정리 2) Lambert의 사각형에서 남은 한 각은 둔각이고, 둔각을 이루는 두 변은 각각 대변보다 짧다.

(증명) 사각형 ABCD에서 ∠A=∠B=∠D=∠R이라 두면 Lambert의 사각형을 얻는다. AB상에 AO=q 되는 점 O를 잡으면, O는 AD의 극이고, AB 및 DC의 연장상에 있다.



(그림 4)

따라서 $BO < q$이므로 $\angle BCO < \angle R$이고, $\angle BCD > \angle R$이다.

다음, (1) $BC = AD$이라 하면 (정리 1)에 의하여 $\angle C = \angle D$이다.

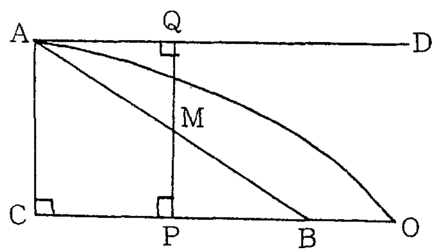
(2) $BC > AD$이라 하면 BC상에 $AD = BE$인 점 E가 존재한다. 이때 사각형 ABCD는 Saccheri의 사각형이므로 $\angle ADE = \angle BED > \angle R$이다.

이것은 $\angle ADE < \angle ADC = \angle R$에 모순이다.

따라서, $BC < AD$가 성립한다.

(정리 3) 삼각형의 내각의 합은 $2\angle R$보다 크다.

(증명) (1) $\triangle ABC$가 직각 삼각형일 때 증명한다.



(그림 5)

$\angle C = \angle R$이라 하면, $\angle A$, $\angle B$중 적어도 하나가 둔각이면 자명이므로, $\angle A$, $\angle B$가 예각인 경우만 밝히면 충분하다.

$\angle A < \angle R$이므로 지금 CB상에 $CO = q$인 점 O를 잡으면 O는 직선 AC의 극이다.

AB의 중점 M으로부터 CB에 수선 MP를 내리고, $AQ = PB$되도록 AD($\angle ABC = \angle BAC$인 선)상에 점 Q를 잡으면 $\triangle MPB \equiv \triangle MQA$ $\therefore$ $\angle AMQ \equiv \angle BMP$

따라서, 세점 P, M, Q는 공선점이다.

다음, 사각형 ACPQ는 Lambert의 사각형이므로 $\angle CAQ > \angle R$이다.

따라서 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle CAQ + \angle C > 2\angle R$이므로 정리는 성립한다.

(2) $\triangle ABC$가 임의의 삼각형이면, 세 각중에서 적어도 두 각은 예각이다.

지금, $\angle B$, $\angle C$가 예각이면 A에서 BC에 수선 AD를 내려서 두 개의 직각삼각형 ABD, ADC를 만들 수 있다. 따라서 $\angle A + \angle B + \angle C > 2\angle R$를 얻는다.

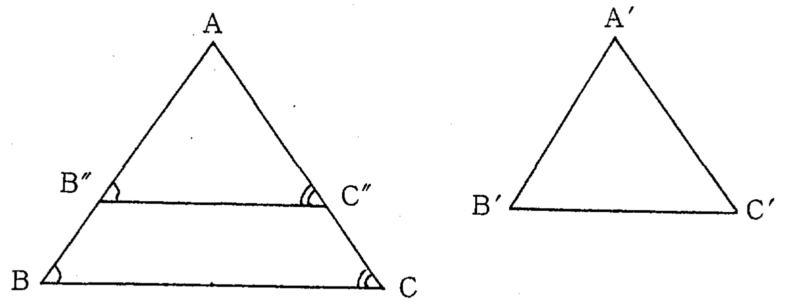
(따름정리 4) 사각형의 내각의 합은 네 직각보다 크다.

(따름정리 5) 직사각형은 존재하지 않는다.

Ⅲ. 구면상의 면적

(정의 1) 구면상의 한 3각형 ABC에 대하여 양의수 $\varepsilon\triangle=(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)$를 과잉수(execess)라 한다.

(정리 6) 두 3각형에서 대응하는 각이 서로 같으면 합동이다.



(그림 6)

$\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 $AB=A'B'$이면 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$이다.

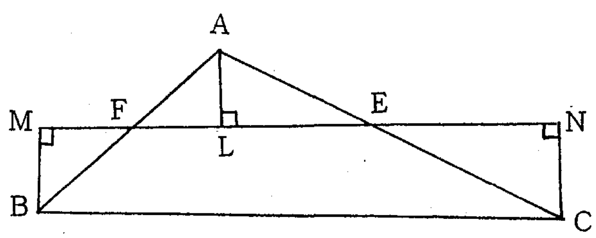
$AB>A'B'$이라 하자. 변 AB상에 $AB''=A'B'$인 점 B''를 잡고, AC상에 $AC''=A'C'$인 점 B''를 잡고, AC상에 $AC''=A'C'$인 점 C''를 잡으면, $\triangle AB''C''\equiv\triangle A'B'C'$이므로 $\angle AB''C''=\angle B''=\angle B$, $\angle AC''B''=\angle C'=\angle C$이다.

따라서 4각형 $BCC''B''$의 내각의 합도 4직각과 같다. 이것은 (따름정리 4)에 모순이다. 같은 방법으로 $AB<A'B'$이라 하면 역시 모순이다.

따라서, $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$이다.

(따름정리 7) 닮은 3각형은 존재하지 않는다.

(정리 8) 두 3각형에서 대응하는 한 쌍의 변이 같고 과잉수가 같으면 면적은 같다.



(그림 7)

$\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서 $BC=B'C'$이고 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$라 하자.

$\triangle ABC$의 변AB, CA의 중점을 각각 F, E라 하고, A, B, C로 부터 직선 FE에 수선을 내려서 그 발을 각각 L, M, N이라 한다. 이 때,

$\triangle ALE \equiv \triangle ENC$, $\triangle AFL \equiv \triangle BFM$

$\therefore$ CN = AL = BM

따라서 사각형 BCNM은 Saccheri의 사각형이다. 여기서

$\angle MBC = \angle BCN = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C)$ 이 성립한다.

$\triangle A'B'C'$에 대해서도 위와 같은 방법으로 Saccheri의 사각형을 만들면, 위에서 얻은 Saccheri의 사변형 BCNM와 상변과 상변각이 같으므로 서로 합동이다.

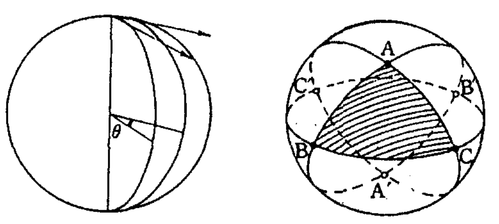
$\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$는 합동인 사변형의 면적과 같으므로, 두 3각형의 면적은 같다.

(정의 2) $\triangle ABC$의 면적을 $\triangle ABC = k^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$와 같이 정의한다. 여기서 k^2은 일정한 실수이다.

(보기 1) 반지름 r인 구면상의 구면 3각형 ABC에서 $\triangle ABC = r^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$가 성립한다.

(풀이) θ인 각으로 만나는 두 대원에 의하여 둘러싸인 궁형(弓形)의 표면적 $S(\theta)$는

$$S(\theta) = (\text{구면의 표면적}) \times \frac{\theta}{2\pi} = 4\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = 2\theta r^2$$



(a) (b)

(그림 8)

따라서, 위의 (그림 8)에서

$2\angle Ar^2 = \triangle ABC + \triangle A'BC$

$2\angle Br^2 = \triangle ABC + \triangle AB'C$

$2\angle Cr^2 = \triangle ABC + \triangle ABC'$

여기서 $A'B'C'$의 대칭점이다.

따라서, $\triangle ABC' = \triangle AB'C'$이므로

$\triangle ABC + \triangle A'BC + \triangle AB'C + \triangle ABC' = 2\pi r^2$ (반구의 표면적)

위의 세 식을 합하여 2로 나누면 $(\angle A + \angle B + \angle C)r^2 = \triangle ABC + \pi r^2$

$\therefore$ $\triangle ABC = r^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$

Ⅳ. Cayley-Klein의 개량

Cayley(1821~1895)에 의하여 도입되고, Klein(1849~1925)이 더욱 발전시킨 Non-Euclid 기하학의 모형을 토대로 하며, 거리와 각의 개념을 도입하여 개량기하학의 견지에서 타원기하학을 재구성한다.

어떤 고유 2차곡선을 불변으로하는 사영변환에 의한 불변의 성질을 다루는 기하학을 우리는 Non-Euclid 기하학이라하고 이 고유 2차곡선을 절대형이라 한다.

타원기하학에 있어서 절대형으로 허인 2차곡선 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$을 취하고 있으나, 타원평면은 실사영 평면의 전체로 잡고, 모든 실점으로 되어 있다. 따라서 임의의 두 직선은 반드시 만나므로 평행선은 존재하지 않는다.

1. 거리의 정의

두 점 A, B를 지나는 직선이 절대형 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$과 만나는 점을 P, Q라 하면, P, Q는 허점이다. 이 때

(4, 1) $$d(AB)=\frac{k}{2i}\,|\log(PQ|AB)|$$

를 A, B 사이의 거리라 한다. 여기서 (PQ|AB)는 4점 P, Q, A, B의 복비를 나타내고, k는 임의의 양의 정수이다.

한편, 두 점 $A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(b_1, b_2, b_3)$의 내적을

(4, 2) $$\langle A, B\rangle=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

와 같이 정의한다.

(정리 9) 두 점 $A=(a_1, a_2, a_3)$, $B=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$$\cos\frac{d(AB)}{k}=\frac{\langle A, B\rangle}{\sqrt{\langle A, A\rangle}\ \sqrt{\langle B, B\rangle}}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

이 성립한다.

(보기 2) 직선의 길이는 $k\pi$이다.

(풀이) 두 점 A, B를 $x_2=0$ 상에 $A=(0, 0, 1)$, $B=(b, 0, 1)$되게 잡으면

$$\cos\frac{d(AB)}{k} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

따라서

$$d(AB)\,k\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = k\tan^{-1}b$$

지금, 점 B를 A로 부터 양쪽으로 멀리 떨어지게 하면 d(AB)는 커진다. 점 B를 양의 방향으로 $b \to \infty$ 즉(1, 0, 0)에 접근시키면 d(AB)는 최대치 $\frac{\pi}{2}$ k를 가진다.

한편, 점 B를 음의 방향으로 $b \to -\infty$ 즉 (1, 0, 0)에 접근시키면 d(AB)는 최대치 $\frac{\pi}{2}$ k를 가진다. 따라서, 직선은 폐곡선이고, 길이는 유한이고 $k\pi$와 같다.

2. 각의 정의

거리와 쌍대적으로 두 직선 u, v가 이루는 각을 다음과 같이 정의한다.

두 직선 u, v의 교점 M으로 부터 절대형 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$에 그은 두 접선 p, q라 할 때

(4, 3) $$\theta(u, v) = \frac{1}{2i}\log(pq\,|\,uv)$$

를 uv사이의 각이라 한다.

두 직선 $u=(u_1, u_2, u_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3)$에 대하여 그 내적을

(4, 4) $$\langle u, v\rangle = u_1, v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

와 같이 정의한다.

(정리 10) 두 직선 $u=(u_1, u_2, u_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3)$에 대하여

$$\cos\theta(u, v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\sqrt{\langle u, u\rangle}\ \sqrt{\langle v, v\rangle}}$$

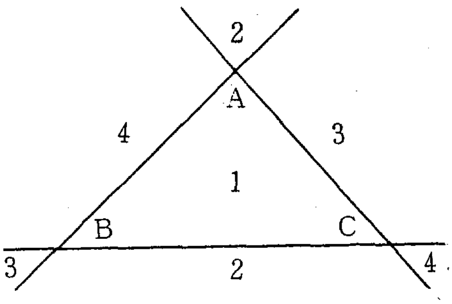
$$= \frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^3}\ \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

이 성립한다.

(정리 11) 구면상 평면의 면적은 $2\pi k^2$이다.

(증명) 구면의 평면상에 있는 $\triangle ABC$에서는 $\angle A+\angle B+\angle C > \pi$이고 $\triangle ABC$의 면적

은 $k^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)$이다.



(그림 9)

(그림 9)에서 1, 2, 3, 4로 된 4개의 삼각형의 면적을 각각 $S_1, S_2 S_3, S_4$라 하면

$$
\begin{aligned}
S_1 &= k^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi) \\
S_2 &= k^2\{\angle A+(\pi-\angle B)+(\pi-\angle C)-\pi\} \\
&= k^2(\angle A-\angle B-\angle C+\pi) \\
S_3 &= k^2\{(\pi-\angle A)+\angle B+(\pi-\angle C)-\pi\} \\
&= k^2(-\angle A+\angle B-\angle C+\pi) \\
S_4 &= k^2\{\pi-\angle A)+(\pi-\angle B)+\angle C-\pi\} \\
&= k^2(-\angle A-\angle B+\angle C+\pi)
\end{aligned}
$$

따라서, $S_1+S_2+S_3+S_4=k^2(2\pi)$

$$=2\pi k^2$$

참 고 문 헌

1. Adler, C.F(1968), *Modern Geometry,* Mcgraw Hill Book Co, New York.
2. Boyer, C.B(1968), *A History of mathmatics,* John-wiley & Sons Inc.
3. Coxter, H.S.M(1947), *Non-Euclidean geometry,* Univ. of Tronto Press, Tronto.
4. Lieber, H.G. and Lieber, L.R(1931), *Non-Euclidean geometry,* Academic press Inc., New York.
5. Seidenberg, A(1962), *Lectures in projective geometry,* priceton, Van Nostrand.
6. Wolfe, H.E(1966), *Introduction to Non-Educlidean geometry,* Holt, Rinhart and Winston, New York.

7. 기우항 · 박진석(1982), 사영기하학, 학문사.
8. 기우항 · 박진석(1984), 기하학개론, 학문사.
9. 박을룡 · 주석순(1984), 사영기하학, 동명사.
10. 백용배 (1989), 현대기하학, 교학연구사.
11. 엄상섭 (1987), 리이만기하학, 교학연구사.
12. 이우영 역 (1988), Euclid 기하학과 비 Euclid기하학 발전과 역사, 경문사.