

平板 Microwave 回路網에 관한 研究

張 宰 成

A Study of Planar Microwave Network

Jang Jae-sung

Summary

The port admittance matrix of a planar network is formulated in terms of certain harmonic functions related to the port voltages and the network geometry, together with the natural modes of the network with all ports shorted. The necessary harmonic functions and eigenfunctions are found using a finite element technique, for which general-purpose computer programs already exist. An advantage of the method is that the admittance matrix appears in partial-fraction form with geometric data separated from frequency, leading to inexpensive computations where recalculation at various frequencies is required.

緒 言

平板 Multiport microwave 回路網은 Stripline 과 比較하여 크기와 形態뿐만 아니라 임피던스와 같은 電氣의 特性들을 보다 自由롭게 設計할 수 있는 長點들이 있다. 그리고 一般的인 N-port 의 어드미턴스行列式들의 部分分數 形態로 表現 可能해졌다.

또한 應用面에서는 이러한 理論의 一般성이 꼭 必要하지는 않지만 가장 理想的 形態를 생각해야만 한다.

Bianco 의 解析은 eigen 函數들을 解析的 方法으로 알수있는 矩型回路들에 制限되었지만, 이러한 方法은 平板回路의 解析에까지 확장할 수 있다.

이런 解析方法은 Fredholm 積分方程式의 項으로서 平板回路의 境界條件을 表現 하고, Collocation 法에 의해 解를 求하면 된다.

그러나 이런 접근方法은 回路의 特性을 나타내는 어드미턴스 行列들이 단지 하나의 周波數에 對해서만 맞고, 다른 周波數에 對해서는 積分方程式으로부터 그 周波數에 해당하는 어드미턴스 行列을 다시 求해야 하는 短點이 있다.

그래서 Bianco 의 方法과 같이 幾何學的으로 多少 制限되더라도 어드미턴스 行列들을 部分分數 形態로 表現하면 다른 周波數들에 反復할 必要가 없다.

1. 多角形 回路의 境界條件

그림 1 과 같은 無限 誘電체를 생각하면 解析的으로 는 誘電체에 의해 分割된 두개의 板으로 解析할 수 있다.

그리고 電界가 두板에 對해 모든곳에서 垂直이 되도

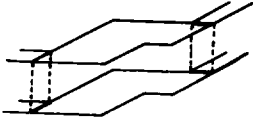


Fig.1. Arbitrary polygonal planar network.

록 板側面 두께는 誘電체 두께보다 무척 큰 것으로 假定한다.

따라서 電界는 다음과 같이 된다.

$$E = I_z E_z \dots\dots\dots (1)$$

여기서 I_z 는 Z 方向의 單位벡터이다. 그리고 板 사이에 채워진 誘電체內에서의 電界는 다음 式을 滿足해야만 한다.

$$(\nabla^2 + \Omega^2) E_z = 0 \dots\dots\dots (2)$$

여기서 Ω 는 normalize 한 周波數로서 다음과 같이 된다.

$$\Omega = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \dots\dots\dots (2)'$$

그리고 誘電체內에서의 磁界는 다음과 같이 求해될 수 있다.

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} (I_z \times \nabla_{xy} E_z) \dots\dots\dots (3)$$

여기서 ∇_{xy} 는 transverse gradient operator를 나타낸다.

그리고 Maxwell 方程式에 의해 윗면에 흐르는 表面 電流密度는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_{xy} E_z \dots\dots\dots (4)$$

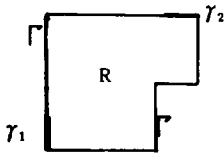


Fig.2. The polygonal network plate.

그림 (2)에서 Γ 領域은 表面 電流密度의 垂直成分은 存在할 수 없으므로 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

그리고 K 번째 port 에 위치한 正多角形의 斷面 Γ_K 에서는 (4) 式에 의해 外部로 向하는 電流 I_K 는 다음과 같이 求해될 수 있다.

$$I_K = \frac{1}{j\omega\mu} \int_{\Gamma_K} \frac{\partial E_z}{\partial n} ds \dots\dots\dots (6)$$

또한 윗板과 아래板에 관계된 點들 사이의 RF 電壓은 다음과 같다.

$$v = h E_z \dots\dots\dots (6)'$$

여기서 h 는 板 사이의 距離이다. 그리고 모든 port 들의 위치간격이 좁고, 순수한 TEM 모드로 급전 되었다고 假定하면 그림 2 에서 윗면에 對한 境界條件은 R 領域에서는 다음과 같이 되고

$$(\nabla^2 + \Omega^2) v = 0 \dots\dots\dots (7)$$

Γ 領域上에서는 다음과 같다.

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

마지막으로 Γ_K 領域上에서는 다음과 같이 된다.

$$v = V_K \dots\dots\dots (9)$$

여기서 $K = 1, 2 \dots\dots\dots N$ 을 나타낸다.

(7)~(9) 式들과 같은 境界條件들을 一般的 形態로서 混合된 스퀴러 境界값 問題이므로 다음과 같은 方法에 의해 解를 求할 수 있다.

2. 境界條件의 解

(7)~(9) 式들은 inhomogeneous 한 境界條件들이지만 R 領域에서는 homogeneous 한 微分方程式들로서 이루어졌다.

따라서 u 를 境界條件을 滿足하는 函數라고 하면 境界條件들은 R 領域에서는 다음과 같이 되고,

$$\nabla^2 u = 0 \dots\dots\dots (10)$$

Γ 領域上에서는 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

마지막으로 γ_K 領域上에서는 다음과 같다.

$$u = V_K \dots\dots\dots (12)$$

이런 境界條件을 풀기위해 다음과 같은 v 函數를 도입하자.

$$v = u + w \dots\dots\dots (13)$$

그리고 (13)式에서 假定한 v 를 境界條件式들인 (10)~(12)式에 代入하면 R 領域에서는 다음과 같이 되고

$$(\nabla^2 + \Omega^2) w = -\Omega^2 u \dots\dots\dots (14)$$

Γ 領域上에서는 다음과 같다.

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

마지막으로 γ_K 領域上에서는 다음과 같이 된다.

$$w = 0 \dots\dots\dots (16)$$

이런 方法에서 (7)~(9)式의 境界값 問題의 解는 (14)~(16)式과 같은 두個의 다른 境界값 問題들의 解로서 簡略해 지고, port 電壓들에 依存함을 볼 수 있다.

그러므로 i 번째 port를 除外한 모든 port 電壓 V_K 를 0이라 假定하고, i 번째 port 電壓 값이 1이라고 假定하자.

$$V_K = 0, \quad K \neq i \\ = 1, \quad K = i \dots\dots\dots (17)$$

그리고 (10)~(12)式에 (17)式을 代入하여 求한 i 번째 解를 ϕ_i 로 나타내면, 어떤 可能한 port 電壓들의 集合 $\{V_K\}$ 에 對해 (10)~(12)式의 解는 다음과 같다.

$$u = \sum_{i=1}^N V_i \phi_i \dots\dots\dots (18)$$

그리고 (14)式이 다음과 같이 된다고 假定하자.

$$(\nabla^2 + \Omega^2) w = 0 \dots\dots\dots (19)$$

그러므로 (19)式은 eigen value 問題이고 境界條件은 (15)~(16)式이 된다. 이러한 境界條件을 滿足하는 eigenfunction들과 eigenvalue들을 ϕ_i, Ω_i 로 나타낸다. 이런 eigenfunction들은 (14)~(16)式의 解를 나타내는 Galerkin의 basis 函數들로서 사용되어질 수 있으므로 w 函數가 다음과 같이 擴張되어 질수 있다.

$$w = \sum_{K=1}^{\infty} w_K \phi_K \dots\dots\dots (20)$$

여기서 w_K 는 係數들이다. (20)式을 (14)式에 代入하면 다음과 같이 求해 진다.

$$\sum_{K=1}^{\infty} w_K (\nabla^2 + \Omega^2) \phi_K = -\Omega^2 \sum_{i=1}^N V_i \phi_i \dots\dots (21)$$

(21)式에서 ϕ_K 는 Helmholtz eigenvalue 問題를 滿足하므로 (21)式은 다음과 같이 된다.

$$\sum_{K=1}^{\infty} w_K (\Omega^2 - \Omega_K^2) \phi_K = -\Omega^2 \sum_{i=1}^N V_i \phi_i \dots\dots (22)$$

그리고 (22)式에 ϕ_m 을 곱하고 R 領域 모두를 積分하고, ϕ_K 는 直交函數로 構成되어 있으므로 $k=m$ 이 되는 項만이 存在한다.

$$w_K = \frac{\Omega^2}{\Omega_K^2 - \Omega^2} \frac{1}{\int_R \phi_K^2 dR} \sum_{i=1}^N V_i \int_R \phi_i \phi_K dR \dots (23)$$

그리고 port 電壓들은 알고있고, 係數 w_K 는 各周波數에 對해 求해 질수 있으므로 解는 다음과 같이 된다.

$$v = \sum_{i=1}^N V_i \left[\phi_i + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\Omega_K^2 - \Omega^2} \frac{\int_R \phi_i \phi_K dR}{\int_R \phi_K^2 dR} \phi_K \right] \dots\dots\dots (24)$$

또한 境界값 問題는 좋은 正確度를 갖는 Bianco에 依해, 定義된 函數 ϕ_i, ϕ_K 를 求할 수 있다.

3. 一般의 N-port의 어드미턴스 行列

RF 電壓의 項들에서 m 번째 port의 電流는 다음과 같다.

$$I_m = \frac{1}{j\omega\mu h} \int_{\gamma_m} \frac{\partial v}{\partial n} dS \dots\dots\dots (25)$$

(25)式을 (24)式에 代入하면 다음과 같이 된다.

$$I_m = -j \frac{\sqrt{\epsilon/\mu}}{h} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega}{\Omega_k^2 - \Omega^2} B_{mi}^{(k)} \right) V_i \dots (26)$$

여기서 $B^{(k)}$ 는 다음과 같은 $N \times N$ 행렬을 나타낸다. 그리고 $\Omega_0 = 0$ 인 $B_{mi}^{(0)}$ 는 다음과 같다.

$$B_{mi}^{(0)} = -\int_{\gamma_m} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS \dots (27)$$

또한 $B_{mi}^{(k)}$ 는 다음과 같다.

$$B_{mi}^{(k)} = \frac{\int_R \psi_i \phi_k dR}{\int_R \phi_k^2 dR} \int_{\gamma_m} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS \dots (28)$$

여기서 $k = 1, 2, \dots, N$ 을 나타낸다. 그러므로 어드미턴스 행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y = j \frac{\sqrt{\epsilon/\mu}}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega}{\Omega_k^2 - \Omega^2} B^{(k)} \dots (29)$$

이러한 표현은 어드미턴스 pole에 관계된 회로 Cavity의 eigen周波數들을 갖는 Foster Canonic form, 即 部分展開의 形態이다. 그리고 行列 $B^{(k)}$ 는 回路가 가지고 있는 port 들 만큼의 行과 列을 갖고, 단순한 數值이므로, 變化를 주는 要素는 回路의 幾何學的 크기와 形態에 依存한다.

그리고 (29) 式의 形態로부터 $B^{(k)}$ 가 對稱인 周波數에서 어드미턴스 行列 Y 는 對稱이 될 수 없고 (27) 式에서 m 과 i 번째에서 對稱의 으로 나타나지 않는다.

그러나 平板回路는 受動, 線型이므로 對稱의 이 되어야만 한다.

그래서 마지막 두개의 方程式의 對稱性을 立證하기 위한 形態로 改造할 必要性이 있다.

函數 ψ_m 은 補間函數이고 函數 ϕ_k 는 各 port 들을 除外하고는 回路境界에서는 垂直方向의 導函數가 모두 0이다.

$$\int_{\gamma_m} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS = \int_{\partial R} \psi_m \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS \dots (30)$$

여기서 ∂R 은 다음과 같다.

$$\partial R = \Gamma U \left(\bigcup_{i=1}^N \gamma_i \right)$$

그리고 多角形 回路에서 이런 閉路積分은 Green 定理에 의해 다음과 같은 形態로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \psi_m \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS &= \int_R \psi_m \nabla^2 \phi_k dR - \int_R \phi_k \nabla^2 \psi_m dR \\ &+ \int_{\partial R} \phi_k \frac{\partial \psi_m}{\partial n} dS \dots (31) \end{aligned}$$

(31) 式에서 ψ_m, ϕ_k 의 垂直導函數는 모든 境界點에서 0 이므로 右邊의 마지막 項은 0 이 되고, 定義에 의해 ψ_m 은 調和函數이므로 右邊의 두번째 項 역시 0 이 된다.

그러므로 R 領域에서 ϕ_k 를 滿足하는 Helmholtz 方程式은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\partial R} \psi_m \frac{\partial \phi_k}{\partial n} dS = -\Omega_k^2 \int_R \psi_m \phi_k dR \dots (32)$$

(32) 式을 (28) 式에 代入하면 다음과 같다.

$$B_{mi}^{(k)} = -\Omega_k^2 \frac{\int_R \psi_i \phi_k dR}{\int_R \phi_k^2 dR} \dots (33)$$

(33) 式은 對稱의 임을 나타낸다.

그리고 行列 $B^{(0)}$ 도 역시 비슷한 方法에 의해 對稱을 立證할 수 있다.

(33) 式에서 ϕ_k 代身에 ψ_i 를 代入하고, Green 定理을 適用하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\gamma_m} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS = \int_R \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_m dR + \int_R \psi_m \nabla^2 \psi_i dR \dots (34)$$

역시 ψ_i 는 調和函數이므로 (34) 式의 右邊의 마지막 項은 0 이 된다.

結果的으로 $B_{mi}^{(0)}$ 는 다음과 같이 된다.

$$B_{mi}^{(0)} = -\int_R \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_m dR \dots (35)$$

4. 有限 要素法의 適用

平板回路의 領域 R 을 分割하는 직삼각형 변들은 하나의 port 에 위치하던가 그 끝點들에서 port 와 닿아 있게 하고 ψ_i, ϕ_k 들은 Konrad와 Silvester가 제시한 方法과 같이 近似化 할 수 있다.

函數들은 補間函數의 係數 ψ_i 와 ϕ_k 의 벡터들에 의해 表現할 수 있고, Silvester 方法에서와 같이 $\tilde{\psi}_i$ 와 $\tilde{\phi}_k$ 는, ψ_i 와 ϕ_k 에 對한 近似化한 多項式의 表現으로서 다음과 같이 된다.

$$\int_R \tilde{\psi}_i \tilde{\phi}_k dR = \psi'_i T \phi_k \dots\dots\dots (36)$$

$$\int_R \nabla \tilde{\psi}_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_m dR = \psi'_i S \psi_m \dots\dots\dots (37)$$

여기서 '는 變換을 나타내며, S는 三角法에 關係된 補間函數들을 Dirichlet 積分 行列이다.

近似化된, 調和函數 $\tilde{\psi}_i$ 와 eigen 函數 $\tilde{\phi}_k$ 는 ψ'_i 와 ϕ_k 의 形態로 만들 수 있다.

그래서 (36), (37), (38), (37)式들로부터 다음과 같이 求할 수 있다.

$$B_{mi}^{(K)} = -\lambda_k^2 \frac{\psi'_m T \phi_k \phi_k T \psi'_i}{\phi_k T \phi_k}, K = 1, 2 \dots N \dots\dots\dots (38)$$

또한 $B_{mi}^{(0)}$ 는 다음과 같다.

$$B_{mi}^{(0)} = -\psi'_i S \psi_m \dots\dots\dots (39)$$

이러한 行列들은 最小化된 函數로서 計算時間을 절약할 수 있다.

그리고 (38)式에서 級數의 項 K에 對해서는 各 周波數의 어드미턴스 行列의 計算은 $\frac{1}{2}KN^2$ 번 動作이 必要하고, 境界값 問題들을 풀기 위한 初期條件과 B^K 의 計算은 $2M^3$ (M은 有限要素 行列式 S와 T의 次數)의 動作이 必要하다.

이러한 計算速度는 回路形態에 依存하지 않는다.

5. 任意의 形態에 適用

이러한 理論을 適用하기 위하여 그림 (3)과 같은 形態를 생각한다.

그림 (3)에서 $L \gg 1$ 이고 誘電체두께는 1보다 작다.

理想的 平行平板 TEM 傳送線의 近似化를 構成하기 위한 어드미턴스 行列式은 다음과 같다.

$$Y = j Y_0 \begin{bmatrix} -\cot \Omega L & \csc \Omega L \\ \csc \Omega L & -\cot \Omega L \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

이러한 問題들에 必要한 函數들은 解析的으로 求할 수 있다.

Port 函數가 $\psi_1 = x/L, \psi_2 = 1 - x/L$ 로 주어졌다면

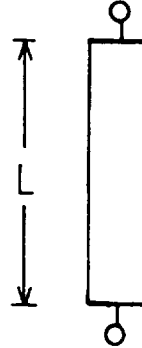


Fig. 3. Rectangular network.

eigen 函數와 eigenvalue 들은 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\phi_k = \sin \frac{K\pi x}{L}, \Omega_k = \frac{K\pi}{L} \dots\dots\dots (41)$$

그리고 行列 $B^{(K)}, B^{(0)}$ 는 다음과 같이 求해 진다.

$$B^{(0)} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

$$B^{(K)} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} 1 & (-1)^K \\ (-1)^K & 1 \end{bmatrix}, K \geq 1 \dots\dots\dots (43)$$

그림 (4)와 같이 $L=9$ 로 하고 6個의 三角 有限要素로 分割하여 計算된 어드미턴스는 그림 (5)와 같다.

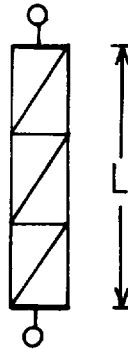


Fig. 4. Divided rectangular network.

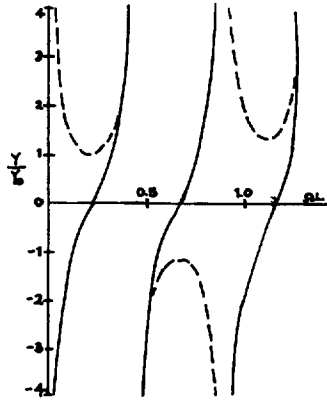


Fig. 5. Normalized admittances for the model problem.

考 察

이러한 계산은 이미 개발된 프로그램에 의해 구할 수 있다. 계산과정에서 S와 T의 행렬은 21차가 되게 2차 다항식을 이용하였고, 기본행렬 $B^{(0)} \sim B^{(15)}$ 를 포함하여 계산되었다.

3번째 pole까지는 (40)식과 일치함을 볼 수 있다. 그러나 3번째 pole 다음 부터는 側面變化에 對한 eigen 函數 ϕ_k 는 (40)식과 일치하지 않는다. 이러한 差異點은 有限要素法으로부터 行列 $B^{(k)}$ 를 解析的으로 求한 것에 起因한다. 그러나 이런 過程에 포함된 數學的 近似化, 即 級數 擴張의 縮小와 補間 多項式들에 依해 모든 函數를 近似化하면 側面에서 일어나는 誤差를 解決할 수 있다.

摘 要

本 論文에서 多角形 平板 回路들에 對해 어드미턴스 行列을 求하는 方法을 提示했다.

이 方法의 長點은 어드미턴스 行列들을 어떤 動作 周波數에 制限을 받지 않는 部分展開 形態로 求할 수 있다는 點이다.

또한 境界값 問題들을 有限要素法에 의해 行列 B를 最小化하므로서 計算時間을 短縮할 수 있다.

또한 各點들에 對한 電界 및 磁界分布도 쉽게 알 수 있으므로 回路를 設計하는 데 많은 도움을 줄 수 있다.

引 用 文 獻

- 1) A. Konrad and P. Silvester, "Scalar finite-element program package for two-dimensional field problems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech. (1971 Symposium Issue), vol. MTT-19, pp. 952-954, Dec. 1971.
- 2) B. Bianco and S. Ridella, "Nonconventional transmission zeros in distributed rectangular structures," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, pp. 297-303, May 1972.
- 3) B.E. Spielman, "Waveguides of arbitrary cross section by solution of a nonlinear integral eigenvalue equations," Ph.D. dissertation, Syracuse Univ., Syracuse, N.Y., 1972.
- 4) M.R. Wohlers, Ed., Lumped and Distributed PaSSIVE Networks. New York: Academic, 1969, ch. IV.
- 5) P.P. Civalleri and S. Ridella, "Impedance and admittance matrices of distributed three-layer N-ports," IEEE Trans. Citrucit Theory, fol. CT-17, pp. 392-398, Aug. 1970.
- 6) P. Silvester, Modern Electromagnetic Fields. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968, pp. 267-268.
- 7) P. Silvester, "High-order finite element waveguid analysis," IEEE Trans. Microwave Theory Tech. (corresp.), vol. MTT-17, p. 651, /éè.
- 8) P. Silvester, "High-order polynomial triangular finite elements for potential problems," Int. J. Eng. Sci., vol. 7, pp. 349-861.1969.
- 9) P. Silvester and C.R.S. Haslam, "Magnetotelluric modelling by the finite element methd" Geophys. Prospect., to be published.
- 10) T. Okoshi and T. Miyoshi, "The planar circuit-An approach to microwave integrated circuitry," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, pp. 245-252, Apr. 1972.