

# 비최소위상 플랜트를 위한 LQG/LTR설계에서 최적 근사화의 가중치 선정 방법

강진식\*

A Method of Selection of Weighting Function for the Optimal  
Approximation in LQG/LTR Design for Nonminimum Phase Plant

Jin-Shig Kang\*

## Summary

In this paper, a method of the selection of weighting function was suggested to reduce the approximation error based on the optimal approximation method suggested by Suh and Kang. The loop transfer recovery error and sensitivity recovery error are computed for the function of the weighting function, and it was proved the appropriateness of the selection of the weighting function, suggested, by a simulation example.

## 서론

제어기 설계이론 분야중에서 최근에 가장 활발히 연구되어온 분야로는 Inverse Nyquist, 특성근계적 방법, LQG, LQG/LTR,  $H_\infty$  제어이론 등이 있다. (Rosenbrock, 1974) LQG/LTR(Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery) 방법은 LQG설계 이론의 강인성 문제를 보완하기 위한 방법으로 설계 방법이 쉬우며 제어기 구조가 간단하지만(Athan, 1986) 비최소위상(nonminimum phase) 플랜트에는 적용할 수 없는 문제점을 지니고 있다. (Stein and Athan, 1984, 1987; Suh, 1990, 1991) 이러한 문제

점을 해결하기 위한 방법으로는 루프전달회복 오차를 최소로 하기 위한 방법(Yeh et. al, 1991, Zang and Freudenberg, 1987, 1990)과 비최소위상인 플랜트를 최소위상인 플랜트로 근사화 시키는 방법(Stein and Athan, 1984, 1987; 서, 1990, 1991; 강과 서, 1992)이 있다.

본 논문에서는 강과 서(1992)에 의하여 제안된 최적 근사화 방법을 토대로 근사화 오차를 줄이기 위한 가중치의 선정 방법을 제시한다. 그리고 가중치에 따르는 루프전달회복 오차, 감도회복 오차를 구하며, 모의실험을 통하여 제안된 가중치 선정방법의 타당성을 보인다.

\* 공과대학 통신공학과(Dept. of Communication Engineering, Cheju Univ., Cheju-do, 690-756, Korea)

## 이론해석

### 1. 최적 근사화 방법 고찰

이 절에서는 강과 서(1992)에 의하여 제안된 최적 근사화 방법에 대하여 약술한다. 설계대상인 비최소 위상 플랜트 전달함수  $G_p(s)$ 는 내부인수와 외부인수로 다음과 같이 분해된다.

$$G_p(s) = G_i(s) G_o(s) \quad (1)$$

여기서  $G_i(s)$ 는  $G_i^{-1}(s) G_i(s) = I$ 를 만족하고 우평면 영점을 갖으며  $G_o(s)$ 는 우평면 영점을 갖지 않는 함수이다. 근사화 오차를

$$E_{OPT}(s) = G_{OPT}(s) - G_p(s) \quad (2)$$

로 정의하면 위 문제는 다음과 같은 Nehari 문제로 변환된다.

$$\begin{aligned} \|E_{opt}(s)\|_{\infty} &= \|G_i(s) [G_i^{-1} W_2(s) - W_1(s) G_o(s)]\|_{\infty} \\ &= \|[G_i^{-1}(s) W_2(s) - W_1(s) G_o(s)]\|_{\infty} \quad (3) \end{aligned}$$

$G_i^{-1}(s) W_2(s)$ 는 안정인 부분  $L_s(s)$ 와 비 안정인 부분  $L_u(s)$ 로 나누면

$$G_i^{-1}(s) W_2(s) = L_s(s) + L_u(s) \quad (4)$$

로 표현된다. 식 (4)에서 비 안정인 부분  $L_u(s)$ 를 상태 공간으로 표현하면 다음과 같다.

$$L_u(s) = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ C_L & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

근사화 오차의 하한을 구하기 위한 제어 그래미언  $L_C$ 와 관측그래미언  $L_o$ 는 다음의 Lyapunov 방정식의 해로 구하여 진다.

$$A_L L_C + L_C A_L^T - B_L B_L^T = 0 \quad (6a)$$

$$A_L^T L_o + L_o A_L - C_L^T C_L = 0 \quad (6b)$$

$\lambda_L$ 를  $\lambda_L := \max(\lambda(L_C L_o))^{1/2}$ ,  $\omega_L$ 를  $\lambda_L$ 에 대응하는 고유벡터라고 하면 근사화 오차의 하한은  $\lambda_L$ 이 된

다. 이때 Nehari 문제의 최적해  $W_1(s) G_o(s)$ 는 다음과 같다.

$$W_1(s) G_o(s) = G_i^{-1}(s) W_2(s) - \lambda_L p(s) / q(s) \quad (7)$$

여기서  $p(s)$ 와  $q(s)$  각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(s) &= C_L (sI - A_L)^{-1} \omega_L \\ q(s) &= B_L^T (sI - A_L^T)^{-1} \frac{L_o \omega_L}{\lambda_L} \end{aligned}$$

따라서 최적근사 플랜트는

$$\begin{aligned} G_{OPT}(s) &= G_o(s) [G_i^{-1} W_2(s) - \lambda_L p(s) / q(s)]^{-1} W_2(s) \quad (8) \end{aligned}$$

로 구하여 진다. 이 근사화 과정에서  $p(s)/q(s)$ 는  $W_2(s)$ 와 같은 극-영점 구조를 갖으며  $G_{OPT}(s)$ 는 식 (7)을 구하는 과정에서 우평면의 극-영점이 서로 상쇄되어 최소위상이 된다.

### 2. 가중치의 선정 방법

식 (8)로 구한 최적 근사화 플랜트는 가중치  $W_2(s)$ 의 함수이다. 따라서 가중치  $W_2(s)$ 의 선정에 따라 최적 근사화 플랜트가 결정되며 근사화 오차의 크기도 결정되게 된다. 이 가중치의 선정 방법을 근사화 오차, 안정도 강인성의 보장등을 고려하여 고찰한다.

위의 최적근사화에 대한 근사화 오차  $E_{OPT}(s)$ 는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} E_{OPT}(s) &= G_{OPT}(s) - G_p(s) \\ &= W_1^{-1}(s) W_2(s) - G_p(s) \\ &= G_o(s) [G_i^{-1}(s) W_2(s) - \lambda_L p(s) / q(s)]^{-1} W_2(s) \\ &\quad - G_p(s) \\ &= G_p(s) [(1 - \lambda_L p(s) / q(s)) / q(s) G_i^{-1}(s) W_2^{-1}(s)]^{-1} \\ &\quad - G_p(s) \\ &= G_p(s) [(I - \lambda_L p(s) / q(s) G_i^{-1}(s) W_2^{-1}(s))^{-1} - I] \quad (9) \end{aligned}$$

식 (9)에서 최적 근사화 오차  $E_{OPT}(s)$ 의 크기를 최소로 하기 위해서는  $(I - \lambda_L p(s) / q(s) W_2^{-1}(s))^{-1}$ 의 크기가 1에 근접하여야 하며  $\lambda_L p(s) / q(s) W_2^{-1}(s)$ 의 크

가 최소화할 때 이 조건을 만족함을 알 수 있다. 그러나  $\lambda_L p(s)/q(s)$ 의 크기는  $W_2(s)$ 에 의존하여 임의로 조정할 수 없다. 따라서  $E_{OPT}(s)$ 의 크기를 최소화하기 위해서는  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 의 크기를 최소로 선정하여야 한다.

덧셈형 오차를 포함하는 제어루프의 안정도-강인성을 보장하기 위해서는 페루프 전달함수의 최대 특이치는 플랜트 전달함수와 오차함수의 역에 대한 최대 특이치 보다는 작아야 한다. 그리고 성능을 유지하기 위해서는 동작 영역에서의 루프감도함수가 최대 허용성능보다 커서는 안된다. 최적 근사화 플랜트에서  $\sigma_{MAX}\{G_{OPT}(s)E_{OPT}^{-1}(s)\}$ 는

$$\begin{aligned} \sigma_{MAX}\{G_{OPT}(s)E_{OPT}^{-1}(s)\} &= \sigma_{MAX}\{G_{OPT}(s)(G_{OPT}(s)-G_p(s))^{-1}\} \\ &= \sigma_{MAX}\{(I-G_{OPT}^{-1}(s)G_p(s))^{-1}\} \\ &= \sigma_{MAX}\{(I-W_1(s)W_2^{-1}(s)G_p(s))^{-1}\} \\ &= \sigma_{MAX}\{(G_i(s)W_2^{-1}(s)\lambda_L p(s)/q(s))^{-1}\} \\ &< \frac{\sigma_{MAX}\{W_2(s)\}}{\lambda_L} \end{aligned} \quad (10)$$

로 전개된다. 따라서  $\sigma_{MAX}\{W_2(s)\}/\lambda_L$ 의 제적이 덧셈형 오차를 포함하는 제어루프의 안정도-강인성을 보장하도록  $W_2(s)$ 를 선정하여야 한다.

### 3. LQG/LTR 오차 분석

목표루프를 칼만필터로 선택하면 루프전달회복오차  $E_{LTR}(s)$ 은 제어가중치  $\rho$ 가 영에 접근함에 따라 다음과 같은 점근적 특성을 갖는다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} E_{LTR}(s) = C\phi(s)H - G_p(s)[G_{OPT}(s)]^{-1}C\phi(s)H \\ = [I - G_p(s)W_2^{-1}(s)W_1(s)]C\phi(s)H \quad (11)$$

식 (11)에  $W_1(s)$ 를 대입하면 루프전달회복 오차  $E_{LTR}(s)$ 는

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} E_{LTR}(s) &= [I - G_p(s)W_2^{-1}(s)[G_i^{-1}W_2(s) \\ &\quad - \lambda_L p(s)/q(s)]G_i^{-1}(s)C\phi(s)H \\ &= -G_p(s)/q(s)[G_i^{-1}(s)]C\phi(s)H \\ &= -G_i(s)W_2^{-1}(s)\lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H \end{aligned} \quad (12)$$

로 된다. 여기서  $\|G_i(s)\|_p = 1$ ,  $\|\lambda_L p(s)/q(s)\|_\infty = \lambda_L$ 이며  $C\phi(s)H$ 는 안정도 강인성 및 성능·강인

성을 보장하기 위하여 설계된 목표루프전달 함수이므로 임의로 선정될 수 없다. 또한  $\lambda_L$ 도 근사화 과정에서 비 안정 극점 위치와 비 안정 전달함수, 그리고 선택된 가중치  $W_2(s)$ 에 의하여 결정되는 Hankel 연산자의 노름(norm)이므로 임의로 조정할 수 없다. 따라서 식 (11)의 루프전달회복 오차를 최소화하기 위해서는  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 의 크기가 작은 값이 되도록 선택하여야 한다.

제어기 설계시 루프감도함수 역시 중요한 역할을 하며 LQG/LTR을 설계하기 위해서는 목표루프의 감도함수가 선정되면 루프전달함수에 대한 루프감도함수도 목표루프의 감도함수에 근접하여야 한다. 루프감도함수의 표현식은

$$S_{GK}(s) = [I + G_p(s)K(s)]^{-1} \quad (13)$$

이다. 여기서 보상기  $K(s)$ 의 점근적 특성을 식(13)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} S_{GK}(s) &= [I + G_p(s)W_2^{-1}(s)[G_i^{-1}W_2(s) \\ &\quad - \lambda_L p(s)/q(s)]G_i^{-1}(s)C\phi(s)H)^{-1} \\ &= [I + \{G_i(s) - G_p(s)W_2^{-1}(s) \\ &\quad - \lambda_L p(s)/q(s)\}G_i^{-1}(s)C\phi(s)H)^{-1} \\ &= [I + C\phi(s)H + G_i(s)W_2^{-1}(s) \\ &\quad \cdot \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 목표루프의 감도함수  $S_F(s)$ 의 표현식을 이용하면 식(14)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} S_{GK}(s) &= [S_F^{-1}(s) + G_i(s)W_2^{-1}(s) \\ &\quad \cdot \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H)^{-1} \\ &= [S_F^{-1}(s)[I + S_F(s)G_i(s)W_2^{-1}(s) \\ &\quad \cdot \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H])^{-1} \\ &= [I + S_F(s)G_i(s)W_2^{-1}(s) \\ &\quad \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H]^{-1}S_F(s) \end{aligned} \quad (15)$$

루프의 루프감도함수  $S_{GK}(s)$ 가 목표루프의 감도함수에 근접하려면 식 (15)의  $S_F(s)G_i(s)W_2^{-1}(s) \cdot \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H$ 항이 0으로 접근하여야 한다. 즉  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 루프감도전달회복이 일어나려면

$$S_F(s)G_i(s)W_2^{-1}(s) \cdot \lambda_L p(s)/q(s)C\phi(s)H \rightarrow 0 \quad (16)$$

이러야 한다. 그러나  $\|G_i(s)\|_{\infty}=1$ ,  $\|\lambda_L p(s)/q(s)\|_{\infty}=\lambda_L$ 이며  $C\phi(s)H$ 는 목표루프의 전달함수로 안정도 강인성 및 성능을 만족하도록 설계된 값이다. 따라서 루프감도회복을 일어나게 하기 위하여서는 근사화 과정에서 가중함수로 취급되는  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 의 크기를 작게 하여야 한다.

이상으로 목표루프를 칼만필터로 선택하였을 때의 루프전달회복 및 루프감도회복 오차를 분석하였으며 이 오차들을 최소로 하기 위하여 선택되어야 하는 가중치에 대하여 고찰하였다. 다음은 목표루프를 LQ 조정기로 선택할 경우 루프전달회복 및 루프감도회복 오차를 분석하고 오차를 최소로 하는 방법에 대하여 요약한다. 목표루프를 LQ 조정기로 선택하면 LTR오차는 다음과 같은 점근적 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} E_{LTRO}(s) &= G\phi(s)B-K(s)G_p(s) \\ &= G\phi(s)B\{I-\lambda_L W_2^{-1}(s)p(s)/q(s)G_i(s)\} \quad (17) \end{aligned}$$

식 (17)에서 루프전달회복 오차는 근사화 과정에서 선택하는 가중함수에 의존함을 알 수 있다. 따라서 루프전달회복 오차를 최소로 하기 위해서는  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 의 크기를 작게 선정하여야 한다.

목표루프가 LQ 조정기인 경우 목표루프에 대한 루프감도함수는 다음식과 같다.

$$S_{LQ}=[I+G\phi(s)B]^{-1} \quad (18)$$

그리고 LQG 보상에 대한 루프감도함수  $G_{LQG}(s)$ 는 칼만필터의 실제 가중치  $\mu \rightarrow 0$ 일때 다음과 같은 극한 거동을 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} S_{LQG}(s) &= [I+K(s)G_p(s)]^{-1} \\ &= [I+G\phi(s)B-\lambda_L G\phi(s)BW_2^{-1}(s)p(s)/q(s)G_i(s)]^{-1} \\ &= G_{LQ}(s)[I+S_{LQ}(s) \cdot \lambda_L G\phi(s)BW_2^{-1}(s)p(s)/q(s)G_i(s)]^{-1} \quad (19) \end{aligned}$$

식 (19)에서 LQG보상기의 루프감도함수가 목표루프의 감도함수에 근접하게 하기 위해서는 가중치  $W_2^{-1}(s)$ 의 크기가 작아야 한다. 즉,  $W_2(s)$ 의 크기를 크게 선정함으로써 앞에서 언급한 루프전달회복 및 루프감도의 회복을 이룰 수 있다.

### 결과 및 고찰

모의실험 예제 모델로 다음과 같은 단일입력-단일출력 시스템을 고려하였다.

$$G_p(s) = \frac{(-s+10)}{s(s+20)}$$

주어진 플랜트는 10에 우평면 영점을 갖고며 원점과 -20에 극점을 갖는다. 최적 근사화에서 근사화 문제를 Nehari문제로 변환하기 위한 무계함수들과 각 무계함수들에 대한 근사화 플랜트 및 오차함수, 그리고 Hankel 노음을 Table 1에 보였다.

표에서 보여지는 바와 같이 최적 근사화로 구한 플랜트의 차수는 주어진 비최소위상 플랜트의 차수와 같으며 극점의 위치가 동일함을 알 수 있다. 즉, 근사화된 플랜트와 주어진 비최소위상 플랜트는 같은 모드를 갖음으로서 입력신호에 대한 출력신호가 유사하게 된다.

Table 1. Plant and error functions for each weighting

	weighting function	optimal approximated plant	error function	HK norm
$W_1(s)$	$\frac{s+10}{10s+1}$	$\frac{1.0202(s+10)}{s(s+20)}$	$\frac{2.0202s+0.0202}{s(s+20)}$	0.1984
	$\frac{s+28}{20+2}$	$\frac{0.3620(s+28)}{s(s+20)}$	$\frac{1.3620s+0.136}{s(s+20)}$	
$W_2(s)$	$\frac{s+40}{30s+3}$	$\frac{0.3620(s+40)}{s(s+20)}$	$\frac{1.2531s+0.1240}{s(s+20)}$	0.1663

Fig. 1에 각 가중치에 대한  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 의 보드선도를 보였다.

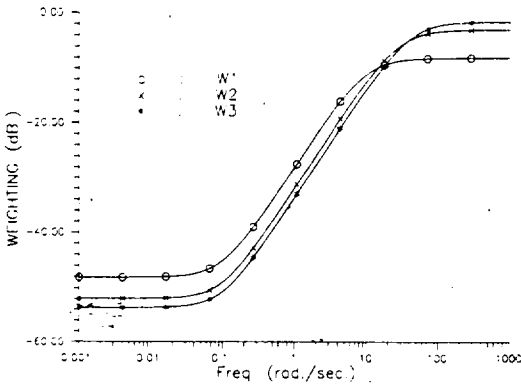


Fig. 1. Bod plot of  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$  for each weighting.

그림에서 보여지는 바와 같이 근사화 오차를 최소로 하기 위한 가중치  $W_2(s)$ 는  $W_3(s)$ 임을 알 수 있다. Fig. 2에 각 가중치에 대한 오차함수를 보였다.

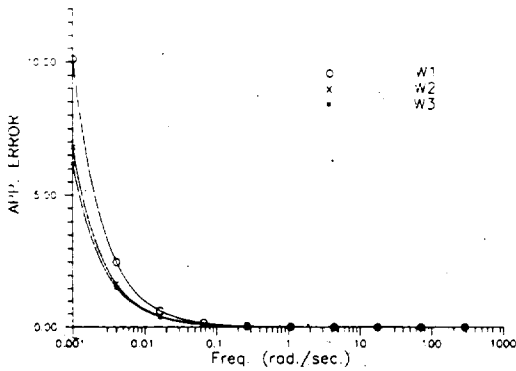


Fig. 2. Approximation errors for each weighting.

그림에서 보여지는 바와 같이 근사화 오차는  $\lambda_L W_2^{-1}(s)$ 가 가장 작은  $W_3(s)$ 인 경우에 작게 되어 논문에서 제시한 조건과 같음을 알 수 있다.

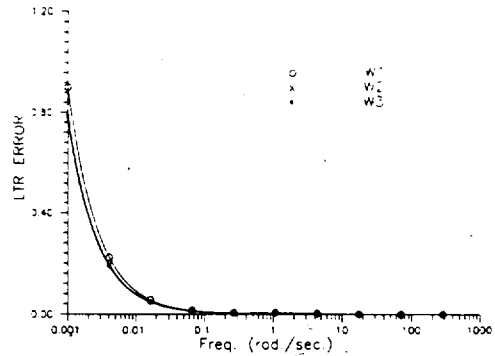
LQG/LTR 제어기 설계를 위한 목표루프로는 칼만 필터를 선택하였으며 설계변수들은  $\mu=500$ ,  $L=1$ 를 선정하였다. 이때 각 가중치에 대한 칼만필터 이득 H들을 Table 2에 나타내었다.

Table 2. Kalman filter gain for each approximated plant

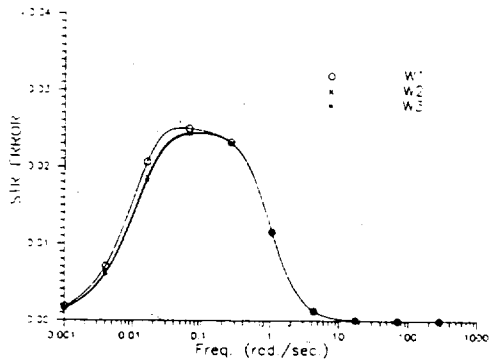
	$W_1(s)$	$W_2(s)$	$W_3(s)$
H	$7.643 \times 10^{-5}$	$4.339 \times 10^{-5}$	$3.792 \times 10^{-5}$
	$2.232 \times 10^{-3}$	$2.234 \times 10^{-4}$	$2.234 \times 10^{-3}$

Table 3. LQ regulator gain for state weighting

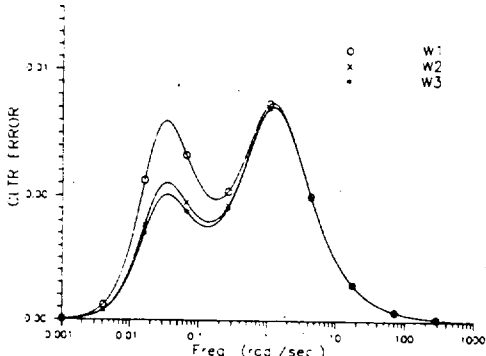
State weighting	LQ regulator gain	
$\rho=1$	$1.852 \times 10^1$	$3.1623 \times 10^1$
$\rho=10^{-3}$	$9.8120 \times 10^1$	$1.000 \times 10^3$
$\rho=10^{-5}$	$9.9810 \times 10^3$	$1.000 \times 10^6$
$\rho=10^{-7}$	$9.9981 \times 10^4$	$1.000 \times 10^9$



(a) LTR error



(b) Sensitivity recovery error



(c) Closed loop transfer function recovery error

Fig. 3. Loop transfer recovery, sensitivity recovery, closed loop transfer function recovery errors for  $\rho=10^{-7}$ .

루프전달회복을 위한 제어 가중치와 상태 가중치는  $\rho = (1, 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-7})$ ,  $Q = 1000 \times 1$ 로 선정하였으며 각각의  $\rho$ 에 대한 LQ 조정기 이득을 Table.3에 보였다. Fig.3에  $\rho = 10^{-7}$ 에 대한 루프전달회복 오차, 감도회복 오차, 페루프 전달 회복 오차들을 보였다. Fig.3에서 보여지는 바와 같이  $\lambda_1 W_2^{-1}(s)$ 가 가장 작은  $W_2(s)$ 에서 루프전달회복 오차, 감도회복 오차, 페루프 전달회복 오차가 작게 되어 본 논문에서 제시한 조건과 일치함을 알 수 있다.

## 적 요

본 논문에서는 비최소위상 플랜트에 LQG/LTR을 적용하기 위한 근사화 방법에 대하여 고찰하였다. 최적 근사화에서 가중치의 선정기준을 제시하였으며, 가중치에 따르는 최적근사 플랜트 및 최적근사 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계할 경우 루프전달회복 오차, 감도회복 오차등을 구하였다. 그리고 모의실험을 통하여 제안된 가중치의 선정방법으로 가중치를 선정할 경우 루프 전달회복오차, 감도회복 오차가 가장 작게됨을 보였다.

## 참 고 문 헌

- Athans, M., 1986. A tutorial on LQG/LTR methods, *Proc. CDC, Athens, Greece*.
- 강진식, 서병설, 1992. 비최소위상 플랜트에 대한 LQG/LTR에 관한 연구, 한국통신학회 논문지, 16 (10) :
- Rosenbrock, H.H., 1974. *Computer-Aided Control System Design*, New York : Academic Press.
- Stein, G. and Athans, M. 1984. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *Proc. American Contr. Conf.*, May, Sandiego.
- Stein, G. and Athans, M. 1987. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-32, (2) : 105 ~114.
- Suh, B.S., 1990. A study on the LQG-LTR method, *J. of KSMBE*, 1(1) : 25-30.
- 서병설, 1991. 비최소위상 플랜트를 위한 LQG/LTR 방법, 전기통신 학술과제보고서.
- Suh, B.S., 1991. A study on the LQG/LTR for nonminimum phase plant, *Pre-Conf. to the 1991 symposium on Math. theory of network and systems*, June 12-14.
- Yeh, H.H. Banda, S.S. Lynch Lt P.J. and McQuad, T.E. 1991. The LQG/LTR design via H2-optimization : 2097-2103.
- Zhang, Z. and Freudenberg, J.S. 1987. Loop transfer recovery with nonminimum phase zeros, *Proc. 26th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, Los Angeles : 956-957.
- Zhang, Z. and Freudenberg, J.S. 1990. Loop transfer recovery for nonminimum phase zeros, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 35(5), May.