

Maple V를 활용한 수학교육

김도현* · 김영신**

Teaching Mathematics Using Maple V

Do Hyun Kim, Young Sin Kim

Abstract

Recently, the impotence of participating in classes actively and cultivating student's thinking ability is emphasized in mathematics education society. Teachers are demanded to change their teaching style centered pencil- and-paper into using the variety instructional aids, such as calculator, video tape, computer, ohp, and projector, etc.

In this paper, we search for the maple's function and the method that apply maple to the secondary school mathematics. Maple has many functions : calculator, algebra, graphics, animation, programing, notebook.

We find that maple can be applied to the graph of function, the understand of simultaneous equations, the graph of trigonometry function, the calculation of limit, the computation of areas as limits, the derivative of a function and tangent line, a solid figure, and others in secondary school mathematics.

I. 서 론

Maple V는 1980년대에 캐나다의 University of Waterloo의 K.Geddes와 G.Gonnet교수에 의하여 처음으로 개발된, 기호를 포함하는 수식이나 방정식 등을 대수적으로 처리하는 능력을 갖는 획기적인 프로그램이다.

컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종인 Maple은 현행 수학교육에서 일반적으로 사용하고 있는 언어는 아니지만, 그래픽 기능과 수치계산, 대수

적 계산, 프로그래밍 등의 다양한 환경을 제공하고 있으며 사용이 편리하므로 교육용 언어로서, 특히 수학 교육용 언어로서 손색이 없다고 생각한다. Maple은 수학의 개념 이해와 계산 능력과 관련된 문제해결 등에 적용될 수 있다. 예를 들어 삼차원적인 입체도형을 Maple을 이용하여 표현한다면 학생들의 입체적인 발달에 도움을 줄 수 있고, 특히 Maple은 원하는 위치에서 삼차원적인 그래프를 관찰할 수 있으므로 한층 더 효과적으로 학생들의 개념 습득을 도울

* 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

** 제주대학교 사범대학 과학교육연구소 특별연구원

수 있다. 이러한 시뮬레이션 학습 상황에서는 반복적 계산 연습에 치우치지 않고, 학습자 스스로가 예상하고 이를 실행하며, 오류 수정을 실시함으로써 문제해결 능력을 함양시킬 수 있는 장점들을 갖추고 있다. 한편, Maple의 막강한 계산 능력이나 즉각적 결과의 제시는 계산의 과정보다는 계산의 결과만을 강조하여 학생들로 하여금 수학에서 배우는 것에 대해 부정적인 견해를 심어 줄 수도 있지 않을까 하는 우려도 생겼다. “강력한 계산도구가 있는데 굳이 이러한 것을 배울 필요가 있겠는가?”, “답을 구하였으니 계산 과정은 필요 없다”와 같은 생각이 그것이다. 이것은 Maple뿐 아니라 계산기 또는 다른 소프트웨어를 수업에 활용할 때 가지게 되는 물음과 같은 성격의 것이다. 실제로 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 계산기를 수학 수업에서 활용하는 문제도 그리 간단하지 않다. 수학 수업에서 어느 연령부터 계산기의 사용을 어느 수준에서 허락할 것이며, 계산기의 사용이 학생들의 계산력의 저하를 가져오지 않을까 하는 우려를 하게 된다. 때문에, 소프트웨어를 수업에 활용하기 위해서는 신중한 교수학적 연구가 선행되어야 할 것이다. 실제로, Maple을 교육대학원 원생들에게 가르치면서 다음과 같은 점을 생각하게 되었다. 첫째, 중등학교에서 Maple을 활용할 수 있다는 것이다. 예를 들면, 2차원 및 3차원 그래픽 기능을 이용하여 학생들에게 모형제시가 용이하고, 복잡한 계산 능력을 활용할 수 있고, 시뮬레이션도 가능하고, 애니메이션 기능을 이용하여 학생들에게 시각적으로 개념을 설명할 수도 있다. 둘째, 수학을 전공하는 학생으로써, 전공수학과 Maple의 접목이 가능하다. 예를 들어, 미적분, 미분방정식, 수치해석, 정수론, 선형대수, 통계학 등의 강좌를 Maple과 연결하여 공

부하는 것이 가능하다. 셋째, 즉각적인 계산결과 제시가 우려되었으나, 동일한 문제를 해결할 때는 과정을 중시하면서 복잡한 계산을 Maple에 맡길 수도 있고, 그렇게 함으로써 학생들은 이론적인 전개와 개념이해에 몰두하게 할 수 있다. 예를 들어, 적분을 잘하지 못하는 학생이 미분방정식을 배울 때 적분부터 다시 배우기에는 어려움이 있다. 이럴 때, 적분은 Maple의 결과를 이용하고 미분방정식을 푼다면, 미분방정식의 이해가 훨씬 쉬워질 것이고 선수학습의 결손에서 오는 해를 어느 정도 줄일 수 있을 것이다. 물론 나중에 결손된 부분은 보충해야 할 것이다.

이처럼 Maple강의를 하면서, Maple은 대학생뿐 아니라 중등학교 학생들에게도 수학수업에 활용할 가치가 있는 것으로 생각되었다. 따라서 본 논문에서는 수학 교육용 언어로써 Maple의 특징을 살펴보고 중·고등학교 수업에 활용할 수 있는 방안에 대하여 연구하고자 한다.

II. Maple의 특징

Maple은 여러 분야에 광범위하게 사용되고 있기 때문에 그 특징을 다 알 수는 없지만, 수학과 관련된 특징들을 중심으로 살펴보고자 한다.

1. Maple은 배우고 사용하기가 쉽다.

Maple은 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으므로 표현이 매우 용이하다. 예를 들면 $f(x) = x^3 + 1$ 과 같은 함수를 표현하는데 Maple에서도 $f(x) = x^3 + 1$ 과 같은 수식 그 자체를 입출력에 사용할 수 있다.

$$> f(x) = x^3 + 1;$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

2. Maple은 정확한 값을 계산하는 계산기이다.

메이플은 일반적인 계산기에서 할 수 있는 사칙연산과 제곱근의 계산 뿐 아니라, 100!이나 π 의 근사값 계산 등 복잡한 계산을 할 수 있다. 보통 계산기에서는 숫자만을 계산해 주는데 반하여 메이플은 문자의 계산까지도 완벽하게 처리함으로써 일반화를 가능하게 해 준다. 예를 들어 $\int x^2 ax$ 를 입력하고 enter키를 치면, $\frac{1}{3} x^3$ 이라는 결과가 나온다. 메이플에서는 무리수나 순환소수 등을 연산하더라도 특별한 요구가 없는 한 근사값이 아닌 참값을 출력한다. 예를 들어 $\sqrt{\pi}$ 나 $1/3$ 을 메이플에서 계산하면 근사값이 아닌 $\sqrt{\pi}$ 나 $1/3$ 이 그대로 출력된다. 그러나 `Digits:=100:evalf(Pi);` enter키를 치면 $\sqrt{\pi}$ 의 100자리까지의 근사해가 구해진다.

3. Maple은 기호연산(symbolic computation)이 가능하다.

일반적으로 이전의 고급언어로 된 프로그램에서 가장 큰 문제가 수치들의 계산만이 가능하다는 것이다. 그러나 Maple에서는 문자를 포함하고 있는 복잡한 수식의 대수적 연산뿐만 아니라 극한, 미분, 적분, 미분방정식, 멱급수, 벡터해석, 라플라스 변환 등에서도 기호연산이 가능하다.

수식의 전개, 인수분해, 통분, 부분분수로 분해하기, 약분하기, 주어진 식을 간단히 하기를 수행할 수 있다.

```
예) (a+b)^2 을 전개하기
> expand((a+b)^2);
```

방정식, 연립방정식, 부정부방정식, 미분방정식의 해 구하기 기능도 있다.

```
예) 방정식 x^2+ax+b=0의 해 구하기
```

```
> solve(x^2+ a*x + b =0, x);
```

```
예) 미분방정식 y'(t)+2t=0의 해 구하기
> dsolve( {diff( y(t),t)+2*t=0}, {y(t)} );
```

4. 다양한 그래픽의 기능을 갖는다.

Maple은 점, 선, 다각형 및 원과 같은 기본도형과, $y=f(x)$ 형태, 매개함수, 음함수, 극좌표 함수 등고선 등의 이차원 그래프, 다면체, 삼차원 곡면, 회전체 등 삼차원 그래프를 그릴 수 있다.

그래픽을 할 때 색상, 선의 두께, 점선 등의 속성을 지정해 줄 수 있고, 그래프에 글씨를 써 넣거나 몇 개의 그래프를 합쳐서 한꺼번에 나타내게 할 수도 있다. 또한, window상에서 복사하기 기능으로 한글 파일에 옮겨올 수도 있어서 수학에서 사용되는 그래프를 보다 쉽게 그릴 수 있다. 그래픽을 할 때 Maple 내부에 내장된 함수에서 원하는 결과를 얻을 수 없을 때가 종종 있는데, 이 때에는 패키지 불러오기를 하여 그래픽을 실행할 수 있다.

극좌표 함수의 그래프를 그리기 위해서는 `> with(plots): polarplot(r-식, angle=범위);` 을 하면 된다. 음함수의 경우는 `> with(plots): implicitplot(식, x의 범위, y의 범위),` 다면체를 그리려면 `> with(plottools): with(plots): display(다면체의 이름, 옵션)`을 하면 된다.

```
예) > with(plottools): with(plots): display(dodecahedron(), scaling=constrained, style=patch);
```

그 외에도 여러 가지 패키지 함수가 있다.

5. 다양한 애니메이션 기능을 갖는다.

Maple을 이용하면 움직이는 그래프의 표현을 흥미롭게 만들 수 있다. Maple에서 애니메이션

을 plot하기 위해서는 plots패키지 안에 들어있는 animate와 animate3d 명령어를 사용한다.

예) `> with(plots): animate(sin(x*t), x = -10..10, t = 1..2);`

위와 같은 명령어를 치고 난 후 그림을 움직이게 하기 위해서는 먼저 화면의 곡선위를 클릭하여 메뉴에서 Animation을 선택한 후에 Play를 선택한다. 2차원에서의 애니메이션은 특별한 지정이 없는 이상 16개의 그림으로 구성된다. 만약 움직임이 부드럽지 못할 경우에는 frames 옵션의 값을 증가시킨다.

예) `animate(sin(x*t), x = -10..10, t = 1..2, frames = 50);`

이러한 애니메이션 기능을 수학적 개념의 설명에도 응용할 수 있다.

6. 고수준의 프로그래밍 언어이다.

Maple에서는 수백개가 넘는 내장함수가 있다. 이 내장함수들을 이용하면 고수준의 프로그래밍이 가능하다. 일반 프로그래밍 언어와 달리 Maple의 큰 장점 중의 하나는 계산하려는 식을 입력하고 바로 계산의 결과를 얻어볼 수 있으므로, 자신의 생각의 결과를 바로 다음 생각에 연결시킬 수 있다. 그러나 고급언어와 비교할 때 컴파일러를 사용하여 실행파일을 따로 만들 수 없다는 단점은 있다.

7. 노트북의 기능을 갖는다.

Maple은 한 화면에 명령어와 계산 결과를 보여주고, 메모가 가능하며, 크기, 색, 서체의 지정도 가능하다. 개체 삽입에 의해 다른 프로그램에서 작업을 한 것을 끼워 넣을 수 있고, 노트북을 파일로 저장하여 필요할 때 다시 쓸 수 있다. 잘 구성하면 강의 내용이 순서대로 하나 또

는 여러 file에 저장되고, 다시 실행하면서 한 단계씩 재현해 볼 수 있고, 하이퍼링크의 기능을 사용해서 노트북간의 연결이 가능하다.

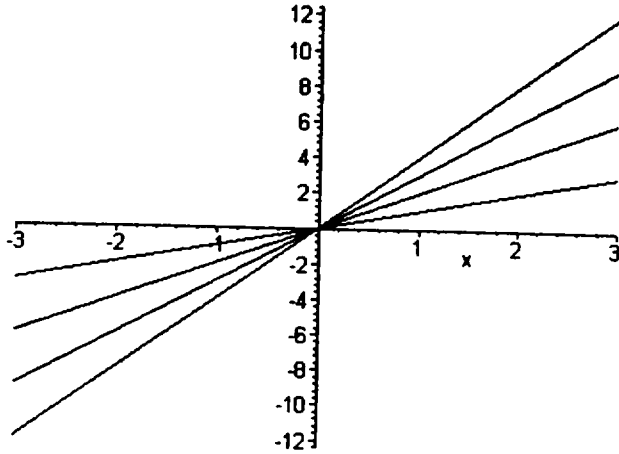
Ⅲ. 수학교육에의 활용

Maple은 중·고등학교 수학의 지도와 관련해서도 다양하게 응용될 수 있다. 그 가운데 몇 가지를 소개하고자 한다.

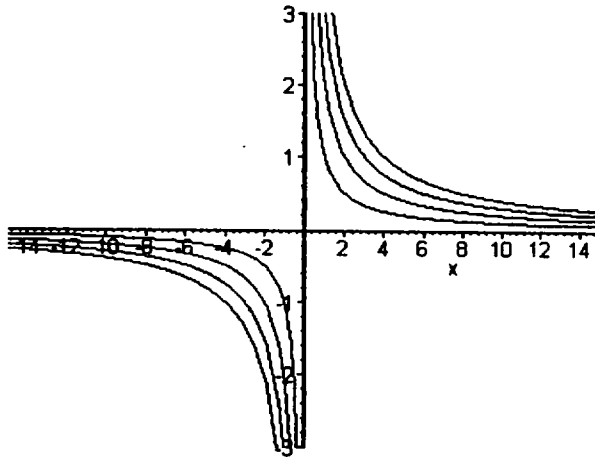
1. 함수의 그래프

중학교 1, 2, 3학년과 고등학교 공통수학의 함수의 그래프 단원에 나오는 일차함수, 이차함수, 쌍곡선 함수, 지수함수, 로그함수의 그래프를 메이플을 활용해서 쉽게 그릴 수 있고, 계수를 변화시킬 때 그래프의 개형이 어떻게 변하는지도 알아볼 수 있다. 여기서는 Plot라는 명령어를 사용하는데 함수를 일일이 열거하는 방법, 그리고 애니메이션 기능을 사용하여 동적 움직임을 살펴보는 방법 등을 생각할 수 있다. 첫째 방법은 메이플에 익숙하지 않는 학생들이 쉽게 이해하고 실행할 수 있는 것으로 생각되고, 두 번째 방법은 애니메이션의 움직임을 통해 학생들의 주의 집중과 흥미를 유발시킬 수 있다.

> plot({x,2×x,3×x,4×x},x=-3..3);



> plot({1/x,2/x,3/x,4/x},x=-15..15,view=[-60..60,-3..3]);



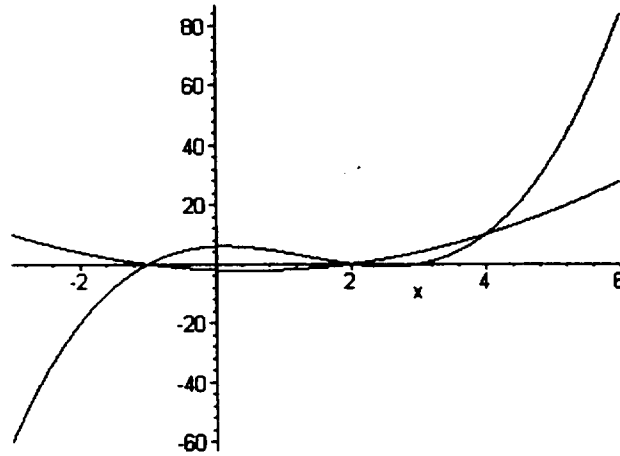
2. 연립방정식의 해

여러개의 함수의 그래프를 한꺼번에 그릴 수 있다는 것을 이용하여 연립방정식의 이해에 도움을 줄 수 있다.

[예] $y=x^3-4x^2+x+6$, $y=x^2-x-2$ 을 풀어라.

풀이)

> plot({x³-4x²+x+6,x²-x-2},x=-3..6);



```
> solve( {y=x5^3-4*x^2+x+6,y=x^2-x-2},{x,y} );
      {y = 0, x = 2}, {y = 10, x = 4}, {y = 0, x = -1}
```

두 번째 결과와 위의 그래프를 비교하여 보면, 두 그래프의 교점이 두 연립방정식의 해가 됨을 알 수 있다.

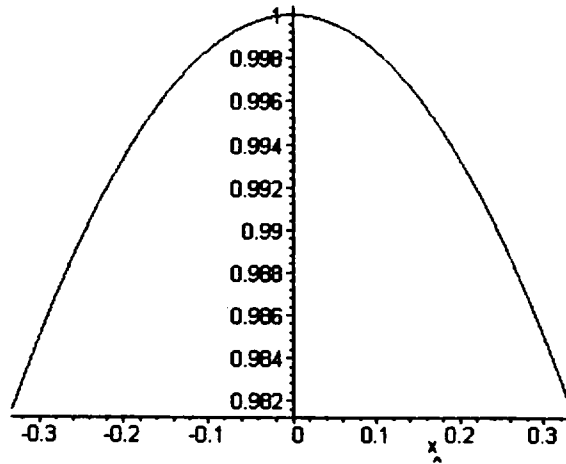
3. 극한값의 계산

Maple에서는 `limit()` 명령어에 의해서 바로 답을 얻을 수 있다. 예를 들어, `limit((x^4-1)/(x-1),x=1)`라고 입력하면 바로 4라는 답을 얻을 수 있다. 그러나, 극한의 개념을 보여주기 위하여 1에 매우 가까운 값들을 대입해 봄으로써 극한의 개념에 대해 생각해 보게 할 수 있다.

예) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 의 $x=0$ 에서의 수렴성을 조사하고, 그 결과를 그래프로 그리시오.

풀이)

```
> seq( evalf( sin(x)/x ), x=[ seq( 1/3^i, i=1..10 ) ] );
      .9815840904, .9979436565, .9997713922,
      .9999745974, .9999971774,
      .9999996862, .9999999652, .9999999962,
      .9999999997, 1.0000000000
> plot( sin(x)/x, x=-1/3..1/3 );
```



x값이 0으로 접근해감에 따라 $f(x)$ 는 1로 접근함을 알 수 있다.

4. 구분구적법

예) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ 의 근사값을 구분구적법에 의해서 구하시오.

풀이) $\text{int}(1/x, x=1..2)$ 라고 치면 $\ln(2)$ 라는 답을 바로 얻을 수 있다. 구분구적법으로 위 문제를 해결하기 위해서 주어진 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분해야 하는데, n 의 크기가 증가함에 따라 하합(S1)과 상합(S2)의 차이가 줄어들고, 이 값이 어떤 값에 근접함을 알 수 있다.

<n=10인 경우>

```
> with(student): s(1) := evalf(leftsum(1/x, x=1..2, 10));
```

```
s(2) := evalf(rightsum(1/x, x=1..2, 10));
```

```
s(1) := .7187714032
```

```
s(2) := .6687714032
```

<n=100인 경우>

```
> with(student): s(1) := evalf(leftsum(1/x, x=1..2, 100));
```

```
s(2) := evalf(rightsum(1/x, x=1..2, 100));
```

```
s(1) := .6956534305
```

```
s(2) := .6906534305
```

<n=1000인 경우>

```
> with(student): s(1) := evalf(leftsum(1/x, x=1..2, 1000));
```

```
s(2) := evalf(rightsum(1/x, x=1..2, 1000));
```

```
s(1) := .6933972431
```

```
s(2) := .6928972431
```

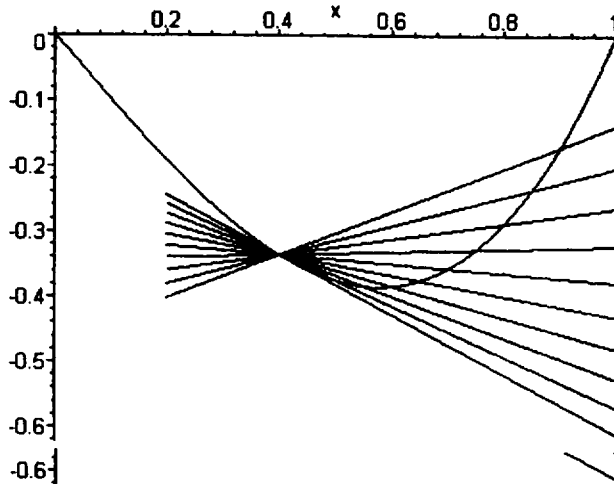
$n=10, 100, 1000$ 인 경우에 상합(S1)과 하합(S2)의 차이가 줄어들고, 상합과 하합이 모두 참값 $\ln(2)$ (약.6931471806)에 근사해감을 알 수 있다. 실제로 학생들에게 n 의 크기를 더욱 증가시키도록 함으로써 구분구적법과 정적분의 정의를 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

5. 함수의 미분값과 접선

예) $f(x) = x^3 - x$ 에 대하여 $a = \frac{4}{10}$, $b = a + h$ 일 때, $h > 0$ 가 0으로 접근해 갈 때 할선이 변화하는 모습을 $f(x)$ 의 그래프와 함께 한 평면에 그려라. 그리고 할선의 기울기의 극한을 구하고, 이로부터 접선을 구하여라.

풀이) 함수 $f(x)$ 와 a 를 지정하고,
 $>f:=x \rightarrow x^3-x; a:=4/10;$
 seq 를 이용하여 h 를 $1/2$ 에서부터 $1/20$ 씩 감소시키면서 할선의 기울기를 구하자.
 $>with(student): slps:= [seq(slope([a,f(a)], [a+1/2 \times (1-(n-1)/10), f(a+1/2 \times (1-(n-1)/10))]), n=1..10)];$
 이제 이 기울기를 갖는 할선들과 그래프를 그려보자. 하나씩 그리기 보다는 seq 를 이용하여

10개를 한꺼번에 그리고, 그림들을 집합으로 만들자. 그리고 합집합 연산을 이용하여 원래 함수의 그림을 추가하자.
 $>pp:= \{seq(plot(slps[i] \times (x-a) + f(a), x=0..1, color=black), i=1..10)\}; pf:= plot(f(x), x=0..1, color=red);$
 $>plots[display](\{seq(pp[i], i=1..10)\} union \{pf\});$



위에서와 같이 할선이 점점 한 직선으로 접근하면서 두 점이 일치하면 접선이 된다. 접선을 구하기 위하여 먼저 할선의 기울기의 극한값 즉, 접선의 기울기를 구하면,

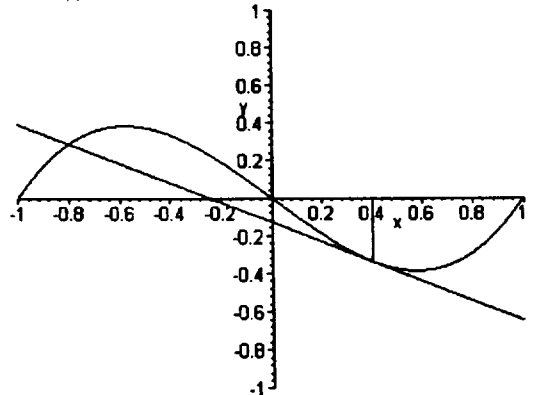
$>m:= \text{limit}(\text{slope}([a+h, f(a+h)], [a, f(a)]), h=0);$

이로부터 점 $[a, f(a)]$ 를 지나는 접선을 구하면,

$>y-f(a) = m \cdot (x-a);$

이다. 실제로 접선은 student패키지에 있는 showtangent라는 명령어를 이용하면, 쉽게 그려질 수 있다.

$>\text{showtangent}(f(x), x=2/5, x=-1..1, y=-1..1);$



6. 공간도형

주어진 두 평면의 방정식이 만나는 부분이 직선을 이룬다는 것을 시각적으로 보여줄 수 있다.

예) 두 평면 $x+y+z=2$, $2x-y+3z=1$ 의 교선의 방정식을 구하여라.

풀이) 두 평면을 q_1 , q_2 라 하고 그 교선을 m 이라 하자.

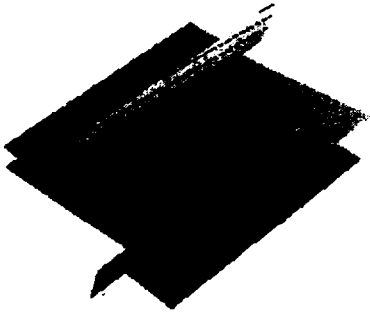
```
> with (geom3d): plane(q1,x+y+z=2,[x,y,z]): plane(q2,2*x-y+3*z=1,[x,y,z]):
```

```
> intersection(m,q1,q2): Equation(m,t);
```

```
[1 + 4 t, 1 - t, -3 t]
```

직선의 매개변수 방정식은 $x=4t+1$, $y=-t+1$, $z=-3t$ 이다.

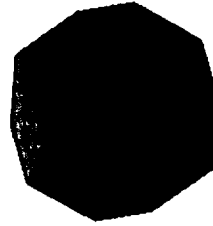
```
> plot3d({2-x+y,1/3-2/3*x-3/y},x=-3..3,y=-3..3);
```



7. 정다면체

중학교 1학년 입체도형의 성질에 나오는 정다면체를 보여줄 수 있다. 이때 왼쪽 마우스 버튼을 이용하여 다면체의 위치를 변경시켜 주면 학생들이 다면체의 형태를 더 잘 파악할 수 있다.

```
> with (plottools): with (plots): display(dodecahedron(),scaling = constrained,style = patch);
```



VI. 결 론

최근 수학교육계에서는 학생들이 수업에 능동적으로 참여하는 것과 학생들의 사고력 배양을 강조하면서 기존의 지필 중심의 수업에서의 변화를 요구하고 있다. 다양한 교구를 사용한다든지, 기술공학을 이용하여 컴퓨터나 계산기 또는 비디오 자료 등을 이용하든지, OHP나 실물화상기, 프로젝터를 이용하는 방안이 활발히 시도되고 있다. 또한 수업의 형태도 교사와 학생의 상호작용을 중시하는 소집단 학습에 대한 관심이 증대되고 있다.

이러한 시점에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용하고자 하는 의도는 시기적절한 것으로 생각된다. 그래서 메이플의 도입은 잘 이용한다면 교수 방법과 수학학습에의 변화를 가져올 수도 있을 것이다.

따라서 교사는 노트북 기능을 이용하여 미리 작성한 파일을 학생들에게 보여주고, 그 자리에서 프로그램의 일부를 수정하여 학생들과 함께 돌려볼 수도 있다. PC가 보유된 교실이라면 학생들도 개별적으로 혹은 조를 이루어 교사가 한 것을 따라하거나 재구성해 볼 수 있다.

그러나, 장경운(1996)이 지적한 것처럼, 소프트웨어의 활용이 학습을 향상시킨다는 보장은 없다. 문제는 컴퓨터를 사용하여 학생들이 지식을 구조화 시키는 방식이 지식을 활용하는 학생들의 방식에 어떤 영향을 미치는가 하는 것이

다. 앞에서 예를 든 바와 같이, 극한을 구하기 위해서, 메이플에서 `limit()`라는 명령어 한줄이면 답을 구할 수 있지만, 극한 개념의 의미를 생각하도록 하기 위해서는 여러줄의 명령어가 필요하다. 이처럼 메이플의 활용이 학생들의 학습에 도움이 되도록 하기 위해서는 먼저 교사의 교수학적 연구가 선행되어야 할 것이다. 잘 안된 메이플 수업은 학생들로 하여금 수학적 개념을 이해하도록 도울 수 있다.

실제 수업이 진행되는 교실의 사정을 고려할 때, 이러한 논의 자체가 힘들어질 수도 있다. 소프트웨어를 실습해보기 위해 메이플을 활용하는 단원마다 컴퓨터실을 찾아야 되는 번거로움이 있고 여러 반이 동시에 사용할 수 있는 컴퓨터실을 갖추고 있지 못하다는 현실이다. 또한 메이플 한글판이 없기 때문에 학생들이 도움말이나 에러 메시지를 읽는데 어려움을 겪고, 이것이 학생들에게 스트레스로 작용할 수도 있다. 이러한 어려움을 극복하고 수학교육에 메이플을

적극적으로 활용하기 위해서는 수학교육에 관계되는 사람들의 관심과 노력이 필요하리라고 생각한다.

참 고 문 헌

1. 박경수, 한동승(1999), Maple V-미분적분학을 중심으로, 경문사
2. 신동선, 류희찬(1998), 수학교육과 컴퓨터, 경문사
3. 장경윤(1996), 컴퓨터와 수학교육, 대한수학교육학회 논문집, 6(1)
4. 허혜자(1998), Mathematica를 활용한 수학교육 지도, 대한수학교육학회 논문집, 8(2)
5. 추인선, 박용범, 하회영, 최재용(1998), Maple V와 미분적분학, 교우사
6. K. M. Heal, M.L.Hansen & K.M.Rickard (1996), Maple Learning Guide, Springer