초등교육연구, 제19집
The Journal of Elementary Education Research
Vol. 19, Feb. 2015 : pp. 197~208.

F. Klein의 Erlangen Program에 관한 선행적 연구

A precedence study on F. Klein's Erlangen Program

현 종 익*

< 국문 초록 >

19세기 동안, 기하학 본질의 이해는 심오한 상전벽해와 같은 변화를 겪었다. 이전에 특권적 위치를 차지해온 유클리드 기하는 단지 매우 다양한 다른 기하 중 하나로 여겨지게 되었다. 그러나 이러한 다양성은 어떻게 이러한 기하들을 분류해야 하는가, 어떻게 이들 사이의 관계를 확립해야만 하는가라는 문제를 초래하였다. F. Klein's Erlangen Program의 중심 아이디어는 기하의 대칭성들의 군을 사용하여 이러한 문제가 해결될 수 있다는 것이었다.

기하의 대칭군은 기하의 구조를 보존하는 모든 전단사함수로 구성된다. 따라서 각각의 기하로 부터 어떤 군을 만들 수 있다. Klein은 다시 이 군이 그 기하를 재구성하는데 사용될 수 있다고 주장했다. 그러나 리만 기하에 바탕을 둔 일반상대성 이론의 발견 후 기하의 일반적인 설명으로 F. Klein's Erlangen Program은 더 이상 적절치 못하였다.

이 논문은 F. Klein's Erlangen Program의 기본 바탕이 되는 사영기하를 고찰하고자 한다.

* 주제어: **F. Klein's Erlangen Progrem, 유클리드기하, 사영기하**

* 제주대학교 교육대학 초등교육과 수학교육전공 교수(email: hyunji@jejunu.ac.kr)

※ 이 논문은 2014학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음.
"This research was supported by the 2014 scientific promotion program funded by Jeju National University"

Ⅰ. 서론

여러 가지 기하학을 어떤 통일된 개념으로 정의하고 분류하려는 연구가 진행되었다. Klein은 1872년 23세의 나이로 Erlangen 대학의 철학부의 교수로 취임하면서 다음과 같은 연구논문을 발표하였다.

Vorgleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen
(최근의 기하학연구에 있어서의 비교적 고찰)

이것은 기하학의 종합적 연구에 있어서 획기적인 방향과 방법을 제시한 것으로써 이것을 엘랑겐 프로그램(Erlangen Program)이라 한다. Klein은 그 서문에서 여러 가지 기하학이 각각 독자적인 방법으로 연구되었고 이들 사이에 어떤 통일성이 존재하지 않으므로 이들을 통일하는 어떤 일반원리를 찾는 것은 기하학의 연구에 매우 가치 있는 일이라고 강조하고 있다.

이런 점에서 사영좌표와 직선위의 사영좌표를 통해서 사영변환으로 변하지 않은 성질을 규명하는 사영기하학이 만들어 짐으로 Erlangen Program이 형성되였음을 고찰하고자 한다.

Ⅱ. 본론

Erlangen Program의 뜻은 명확히 하려면 변환군(transformation group)의 개념을 살펴보지 않을 수 없다. 그러기 위해서 먼저 사영좌표에 관하여 언급하기로 하자.

1. 사영좌표

[그림 1]에서 한 직선 위의 서로 다른 3점 P_0, P_x, P_∞ 를 택하고, 이를 바탕으로 하여 두 점 사이에 덧셈연산과 곱셈연산을 정의할 수 있다.

P_∞을 지나 두 직선 l_∞, l'_∞을 긋고, 또 P_0을 지나 직선 l_0을 긋고 l_∞와 l'_∞와의 교점을 각각 A, A'라 하자. P_x, P_y를 직선 l위의 임의의 두 점이라 할 때, 직선 P_xA, P_yA'가 각각 l'_∞및 l_∞와 X 및 Y에서 만난다고 하자. 이때 직선$\overline{XY}$가 l와 만나는 점을 P_{x+y}라 하면, 이 점 P_{x+y}를 P_x와 P_y의 합이라 부른다. 곧

$$P_x + P_y = P_{x+y}$$

이와 같이 하여 두 점의 덧셈이 정의된다. 이 정의에 의하여

$$P_x + P_0 = P_0 + P_x = P_x$$
$$P_x + P_\infty = P_\infty + P_x = P_\infty$$

가 성립하게 되며, P_x, P_y에 대하여 직선 l_0, l_∞, l'_∞의 선택에 관계없이 P_{x+y}는 임의적으로 결정된다는 것도 완전 4각형의 성질에 의하여 쉽게 증명할 수 있다. 또 완전 4각형의 성질을 이용하면 $P_{x+y} = P_{y+x}$, 즉

$$P_x + P_y = P_y + P_x$$

가 성립함도 알 수 있다. 곧 이 덧셈에서는 교환법칙이 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 방법을 이용하면 $P_{(x+y)+z} = P_{x+(y+z)}$, 즉

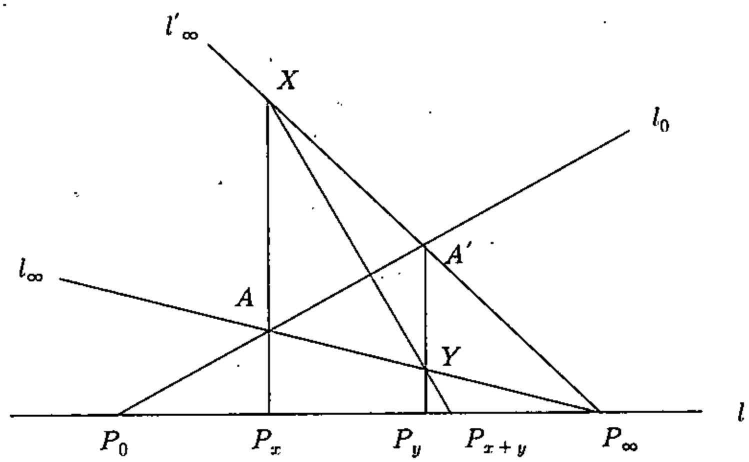
$$(P_x + P_y) + P_z = P_x + (P_y + P_z)$$

가 성립함도 알 수 있다. 곧 이 덧셈에서는 결합법칙이 성립함을 알 수 있다. 또 두 점 P_a, P_b에 대하여 $P_a + P_x = P_b$가 되는 점 P_x을 작도 할 수 있다.

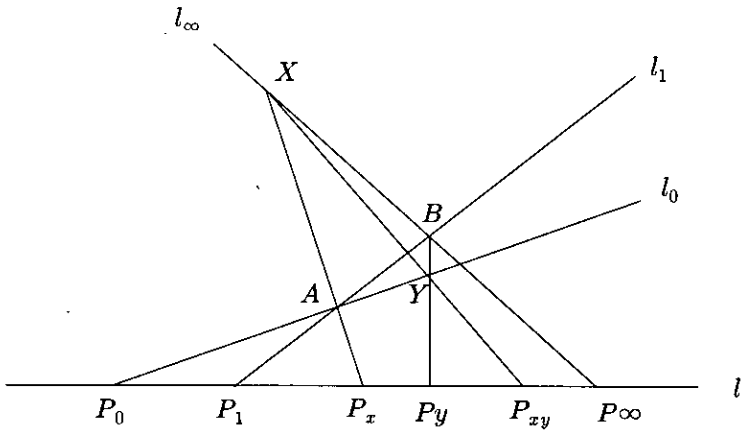
$$P_x = P_b - P_a$$

을 구할 수 있으며 따라서 뺄셈도 가능하다. 다시 말하면 덧셈에 관한 연산도 가능함을 알 수 있다. 이상에서 우리는 P_∞을 제외한 직선 l위의 모든 점에 대하여 덧셈이 가능하면 이 덧셈에 관하여 가환군(Abelian Group)을 이룸을 알 수 있다.

다음으로는 직선l위의 점들 사이에 곱셈을 정의하여 보자.



[그림 1] 덧셈연산



[그림 2] 곱셈연산

지금 직선 l위의 세 점 P_0, P_1, P_∞을 지나 각각 직선 l_0, l_1, l_∞을 긋고 l_1이 l_0및 l_∞와 각각 A, B에서 만난다고 하자. P_x, P_y을 l위에 임의의 두 점이라 하고, 직선 P_xA, 직선 P_yB가 l_∞, l_0와 각각 X, Y에서 만난다고 하자. 직선 XY와 l과의 교점을 P_{xy}라 할 때, 점 P_{xy}은 기점 P_0, P_1, P_∞에 관한 점 P_x, P_y의 곱이라 부르며

$$P_x \cdot P_y = P_{xy}$$

와 같이 나타낸다. 이와 같이 곱을 정의하면, 역시 완전 4각형의 성질에 의하여 P_x, P_y의 곱인 P_{xy}은 직선 l_0, l_1, l_∞의 선택에 관계없이 임의적으로 결정되며,

또한

$$P_1 \cdot P_x = P_x \cdot P_1 = P_x$$
$$P_0 \cdot P_x = P_x \cdot P_0 = P_0$$
$$P_\infty \cdot P_x = P_x \cdot P_\infty = P_\infty$$

로 됨을 알 수 있다. 또 완전 4각형의 성질을 이용하면 P_x, P_y, P_∞가 l위의 임의의 점일 때

$$P_{(xy)z} = P_{x(yz)}$$

즉

$$(P_x \cdot P_y) \cdot P_z = P_x \cdot (P_y \cdot P_z)$$

임을 알 수 있다. 다시 말하면 점의 곱셈은 결합법칙을 만족한다. Pappus의 정리를 가정하면 곱셈은 가환임을 증명할 수 있다. 곧

$$P_{xy} = P_{yx}$$

즉

$$P_x \cdot P_y = P_y \cdot P_x$$

도 된다.

곱셈의 작도를 역으로 수행함으로서 P_0, P_∞을 제외한 임의의 두 점 P_a, P_b에 대하여

$$P_a \cdot P_x = P_b$$

을 족하는 점 P_x가 항상 임의적으로 결정된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 이 P_x을 $\dfrac{P_b}{P_a}$로 나타내면 결국 나눗셈이 가능하다는 것을 뜻한다. 특히 $P_b = P_1$이면 $P_a(\neq P_0)$의 곱셈에 관한 역원이 존재함을 의미하는 것이다. 이상에서 보는 바와 같이 직선 위에서 점 P_0, P_∞을 제외하면 나머지 점들은 곱셈에 관하여 가환군을 이룬다는 것을 알 수 있다.

한편 덧셈과 곱셈에 관하여는 배분법칙

곧

$$P_x \cdot (P_y + P_z) = P_x \cdot P_y + P_x \cdot P_z$$

가 성립함도 완전 4각형의 성질을 이용하면 증명가능하다. 이상의 내용을 정리하면 직선 위의 모든 점은 (단 P_∞은 제외함)에 관하여는 4칙 연산이 가능하므로 하나의 체(field)를 이룬다는 것을 알 수 있다.

따라서 이 체가 유한체이면 직선위의 점은 유한개 밖에 존재하지 않으므로 유한사영기하학이 형성 되는 것이고, 만일 이 체가 무한체이면 직선 위의 점은 무한히 많게 되어 무한개의 점을 가지는 무한사영기하학이 형성되는 것이다.

특히 이 체가 유리수체와 동형이면 유리사영기하학, 실수체와 동형이면 실사영기하학이 형성된다.

2. 직선위의 사영좌표

앞 절에서 살펴본바와 직선(사영직선) 위의 점은 기점의 하나인 P_∞을 제외하면 나머지 점 전체는 하나의 체를 이루며 이 때 기점인 P_0와 P_1은 각각 덧셈과 곱셈에 관한 단위원임도 알 수 있다. 따라서 이를 각 점에 이와 동형인 체의 원소를 대응시키면 각 점에는 사영좌표(이 좌표를 비동차좌표라 부른다.)가 도입된 셈이다. 곧 기점인 P_0, P_1의 좌표는 각각 0, 1이고 기타

점들도 그에 대응되는 좌표를 가지게 된다. 이 비동차좌표에서 다시 동차좌표를 다음과 같이 도입한다.

지금 점 P_x의 좌표가 x일 때

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

를 만족하는 (x_1, x_2)를 점 P의 동차좌표라 부른다. 따라서 점 P의 비동차좌표는 일반적으로 결정되나 동차좌표는 임의적으로 결정되지는 않는다. 이를테면 (x_1, x_2)가 점 P의 동차좌표이면 $(\rho x_1, \rho x_2)$ (단, $\rho \neq 0$)도 P의 동차좌표인 것이다. 직선 위에서의 점의 동차좌표를 평면 위에서의 동차좌표로 확장하면, 평면 위의 점 P의 동차좌표는 (x_1, x_2, x_3)와 같이 된다. (여기서 주의 할 것은 x_1, x_2, x_3가 동시에 모두 0으로 될 수는 없다.) 평면 위에서도 직선 위에서와 마찬가지로 점 P의 동차좌표가 (x_1, x_2, x_3)이면 임의의 $\rho(\neq 0)$에 의하여 $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$로 ρ의 동차좌표로 된다.

이 동차좌표를 사용하면 사영변환은 다음과 같이 식으로 나타낼 수 있다. 곧

$$\begin{aligned} \rho x_1{}' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2{}' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3{}' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad \text{------------------------------(1)}$$

단, 여기서 이 일차변환의 계수의 행렬의 행렬식은 그 값이 0이 아니다. 곧

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

이 변환 (1)은 점 $\rho(x_1, x_2, x_3)$가 점 $\rho'(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$로 옮겨감을 뜻하며, 이 변환이 바로 유한번의 사영절단으로 옮겨가는 사영변환을 해석적으로 나타낸 것이다. 이때 행렬 A를 이 변환을 나타내는 행렬이라 부른다. 지금 두 개의 사영변환

$$\rho \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{------------------------------(2)}$$

단

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \rho \neq 0$$

$$\rho'\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad \text{-----------------------------(3)}$$

단

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho' \neq 0$$

가 주어졌을 때, 이 두 변환을 계속해서 시행하면 또 하나의 사영변환

$$\rho\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = B \cdot \frac{1}{\rho'} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

즉

$$\rho\rho'\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

을 얻게 된다.

윗 식에서 알 수 있는 바와 같이 두 변환이 행렬 A, B 나타나면, 두 변환을 결합한 사영변환의 행렬을 그 곱인 BA와 같게 된다. 또 사영변환의 행렬 A가 단위행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이면

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

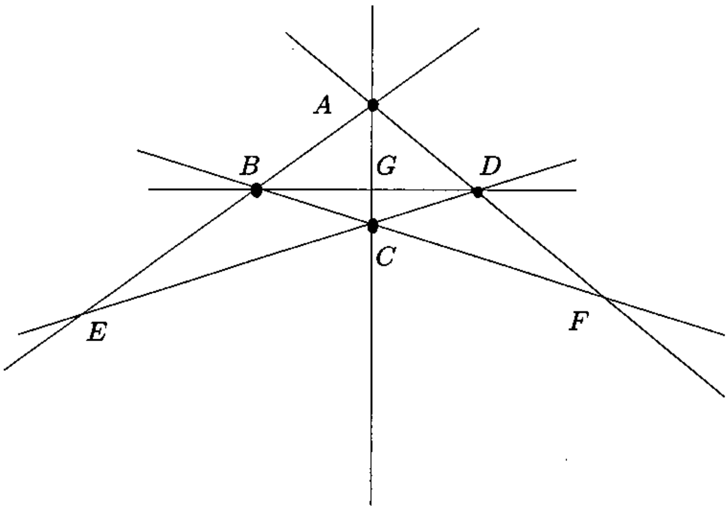
로 되어 이 변환은 항등변환으로 된다. 사영변환의 행렬 A는 $|A| \neq 0$이므로 A는 역행렬 A^{-1}를 가지며 따라서

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 에서 } \rho^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

와 같이 그 역변환이 존재하며 그것 역시 사영변환임을 알 수 있다.

이상에서 보는 바와 같이 사영변환을 나타내는 행렬 전체는 곱셈 곧 사영변환과 결합에 관하여 군(group)을 이루고 있다. 이 군을 우리는 사영변환군(projective transformation group)이라 부른다.

사영변환으로 도형 P가 도형 P'로 옮겨 갔을 때 도형의 크기나 값은 크기나 모두 변하게 된다. 그러나 사영변환으로 변하지 않는 성질이 있다. 사실상 사영기하학이란, 이 사영변환으로 변하지 않는 성질을 연구하는 학문이라고 볼 수 있다. 그러면 어떤 성질이 변하지 않는 성질인지 예를 들어 보기로 하자. 완전 4각형에 대해서 설명하고자 한다.



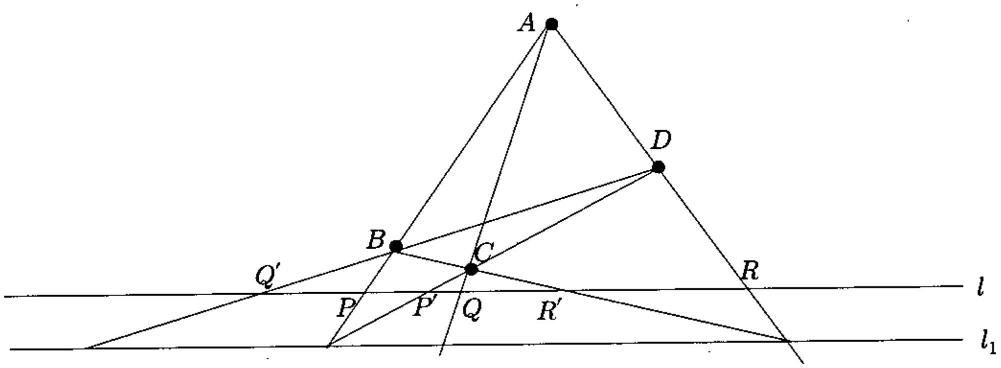
[그림 3]

어느 3점도 동일 직선 위에 있지 않은 4점 $ABCD$가 주어지면, 각 두 점식을 연결하여 생기는 6개 여직선 AB, AC, AD, BC, BD, CD가 생긴다. 4개의 점 A, B, C, D(완전 4각형의 꼭짓점) 6개의 직선 AB, AC, AD, BC, BD, CD(완전 4각형의 변)으로 이루어진 도형을 우리는 완전 4각형이라 부른다.

이때 3쌍의 대응변 AB, CD ; BD, AC의 교점을 E, F, G라 하자. 이 점들을 대각점이라 부르며, 이 대각점은 동일직선 위에 있지 않음을 증명할 수 있다. 이 완전 4각형을 한 직선 l로 절단하면 일방적으로 6개의 점열을 얻게 된다. 이를테면 [그림 4]에서 점열 (P, Q, R ; P', Q', R')가 바로 그것이다. 이 6개의 점열을 완전 6점열이라 부른다. 이 완전 6점열이 사영변환으로 불변이라는 것이 증명된다. 사실상 앞에서 도입한 직선 위에서의 점의 사영좌표와 평면 위에서의 사영좌표가 모두 이 완전 6점열을 바탕으로 하여 이루어진 것으로, 그것이 사영적 불변량이기 때문이다.

특히 완전6점열에서 $P=P'$, $R=R'$로 되는 경우, 즉 직선 l이 AB와 CD의 교점 및 BC와 AD의 교점을 지나는 경우에는 이 완전 6점열 $PQRP'Q'R'$곧 $PRQQ'$를 조화열점이라 부

른다. 완전 6점열이 사영적불변량이므로, 그 특수한 경우 이 조화열점도 사영적불변량임은 명백한 사실이다.



[그림 4]

Euclid 기하학에서의 정리들 중 Desargues의 정리, Pappus의 정리, Pascal의 정리, Brianchon의 정리 등은 모두 사영공간에서도 성립하는 정리들이다. 물론 Pascal의 정리와 Brianchon의 정리는 2차 곡선에 내접 또는 외접하는 6각형에 관한 것으로, 2차 곡선과 관련된 정리이다. 그러면 사영공간에서는 2차 공간에서는 2차곡선이 어떻게 다루어지는가 하는 문제가 제기되는데 동차좌표를 이용하면 Euclid 공간에서와 마찬가지로 2차 곡선을 생각할 수 있다.

동차좌표를 사용하면 2차 곡선의 방정식은 $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$라 할 때

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy = 0$$

또는

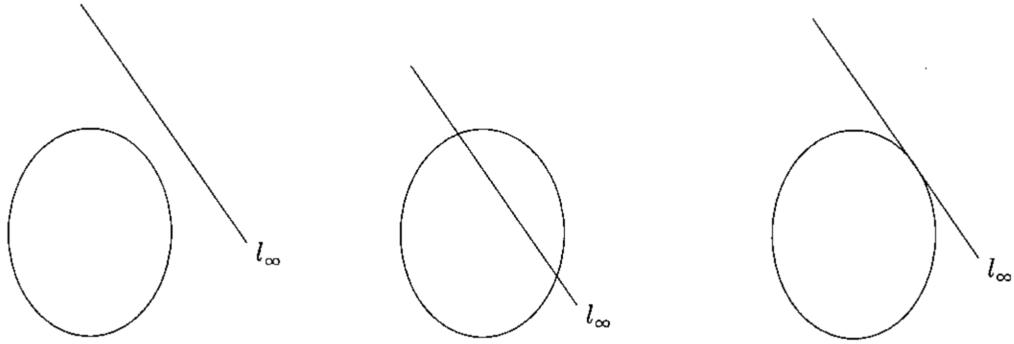
$$(x\, y\, z)\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{------------------------------}(4)$$

과 같이 표시된다. 만일 계수의 행렬식의 값이 (4)이 아니면 (4)은 고유 2차 곡선을 나타내며 이때 적당한 좌표변환을 하면 (4)는 다음과 같은 표준형으로 고쳐진다.

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

결국 사영공간에서는 2차 곡선은 단 한 종류밖에 존재하지 않음을 알 수 있다. Euclid 공간에서는 무한원직선 l_∞가 존재하여 2차 곡선이 l_∞와 만나지 않으면 타원, l_∞와 2점에서 만나면 쌍곡선, 한 점에서 만나면 (곧 l_∞와 접하면) 포물선으로 되어 3종류로 분류 되었지만 사영공간에서는 l_∞와 다른 직선이 구별되지 않기 때문에 2차 곡선은 단 한 종류밖에 존재하지 않

게 된다.



[그림 5]

따라서 사영공간에서의 2차 곡선의 이론은 Euclid 공간에서 보다 단순하며, 2차 곡선이 지니고 있는 성질 중 계량적인 성질을 제외하고는 대부분의 정리가 사영공간에서는 성립함을 알 수 있다.

Ⅲ. 결론

이상에서 우리는 사영기하학이란 사영변환으로 변하지 않는 성질을 규명하는 기하학임을 소개하였다. 이 사실을 기하학자들은 「사영기하학이란, 사영변환군에 종속된 불변량을 연구하는 학문이다.」라고 말하기도 한다. 그 중에서 일정한 직선(무한원직선)을 불변으로 하는 변환은 아핀변환이고 그 전체는 사영변환군의 부분군을 이룬다. 그리고 아핀변환군에 의하여 불변인 성질을 연구하는 것을 아핀기하학이라 한다. 길이와 각의 크기는 아핀변환에 의하여 변화하므로 아핀기하학에서는 의미가 없다. 그러나 평행성, 공점선, 공선점과 같은 성질은 아핀변환에 의하여 불변이므로 아핀기하학에서 성립하는 성질이다.

한편, 아핀변환 중에서 공원점이라 불리어지는 특별한 두 점을 불변으로 하는 변환을 합동변환 또는 Euclid변환이라 하고 이 변환군에 의하여 불변인 성질을 찾는 것이 Euclid기하학이다. 그리고 사영평면상에서 절대형이라 부르는 하나의 정 2차 곡선을 불변으로 하는 변환전체에 의하여 불변인 성질을 연구하는 것이 비 Euclid기하학이다. Klein은 계속하여 1대1의 양연속인 변환 즉, 위상변환에 의하여 불변인 성질을 연구하는 학문을 위상기하학이라 정의하였다. 그러나 이것은 오늘날의 위상기하학을 정의하는 데에는 불충분하다. Klein의 사상은 1920년대까지 기하학연구에 있어서 지도적인 역할을 했으며, Klein은 Erlangen의 사상을 확대하여 보다 높은 견지에서 통일하려 했으나 뜻을 이루지 못했다. 그 후, M. S. Lie와 E. Cartan은 접속의 개념으로 전기하학을 통일하고, Erlangen Program을 일반화 하였다.

참고 문헌

구광조 · 오병승 공저(1985). **기초과정 기하학**, 희문당.

구광조 · 오병승 공저(1991). **기하학개론**, 경문사.

박을룡 · 주석순 공저(1984). **사영기하학**, 동명사.

백용배(1989). **현대기하학**, 교학연구사.

백용배(1995). **기하학개론**, 교학연구사.

신용태(1980). **기하학개론**, 교학사.

엄상섭(1976). **대학과정 일반기하학**, 교학사.

Frank Ayres, Jr.(1969). **Theory and Problems of Projective Geometry**. Schaum's Outline Series. Mcgraw-Hill Book Company.

Felix Klein(1932). **Elementary geometry from an advanced standpoint**. Macmillan Co., New York

<abstract>

A precedence study on F. Klein's Erlangen Program

Hyun, Jong-Ik(Jeju National University)

During the 19th century, the understanding of the geometric nature has undergone a profound sea-change. Euclidean Geometry that had previously occupied a privileged position came to be seen as just one amongst a great variety of geometries. However, with this diversity came the problem: how to classify these geometric and how to the relationship between them should be established. The central idea of Klein's Erlangen Program was that if we used the group of symmetries of the geometry the these problems can be solved.

Symmetry group consists of all of the geometry bijection to preserve the structure of the geometry. Therefore, it is possible to create a group from which each of the geometry. Klein argued that this group again be used to reconstruct the geometry. But Klein's Erlangen Programm general description of the geometry, after the discovery of general relativity was based on the Riemann geometry, was not appropriate anymore.

This paper attempts to explore the projective geometry that is the basic foundation of Klein's Erlangen Program.

Key words : F. Klein's Erlangen Program, Euclidean geometry, Projective geometry