종이 띠에 의한 정다각형, 정별다각형 접기

방 은 숙* · 김 민 석**

목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학교육은 닫힌 체계로서의 수학이 아니라 창조적 활동으로서의 수학 즉, 현실을 수학화하는 과정을 배우는 것이어야 한다. 이를 위해 학습자에게 적절한 현상을 수학적으로 조직화하는 경험을 제공해 주어야 할 것이다. 이런 경험을 통해서 수학을 진정으로 이해하고, 필요한 상황에서는 수학을 응용할 수 있는 능력을 갖도록 하는 것이 무엇보다 중요하다.

새로운 수학적 개념을 학습하면서 학생들이 수학을 어렵게 느끼는 이유는 그것이 추상적이라는 데 있다. 이것은 학생들이 수학을 멀리하게 되는 이유가 되며 이 때문에 수학의 필요성을 인식하도록 할 수 있는 효과적인 지도가 힘들뿐만 아니라 창의적 사고를 계발할 수 없다.

그러므로 학습자 개개인이 관심과 의욕을 가지고 스스로 수학적인 태도, 생각을 체득하

* 제주대학교 정보수학과 교수
** 제주대학교 정보수학과

게 할 수 있도록 최소한의 수학적 지식과 기능으로 해결할 수 있는 방법의 연구・개발이 필요하다.

이러한 문제 상황에서 구체적 조작물을 학습에 투입하게 되면 학생들은 구체적인 세계와 추상적인 세계사이의 틈을 이 조작물을 이용함으로써 채울 수 있게 된다.

수학에 대한 흥미와 태도를 증가시키고 수학적인 개념을 이해시키는데 도움을 주는 가장 중요한 요소 중 하나로, 능동적인 수학적 경험의 중요성을 들 수 있을 것이다. 수학교육과정에 능동적이고 실질적인 경험의 요소를 추가시켜서 흥미를 유발시키고, 손쉽게 이용할 수 있는 방법중에 '종이접기'가 있다.

종이접기는 아동뿐만 아니라 어른들이 경험하는 놀이중 가장 쉽게 접할 수 있는 놀이로 종이접기 과정은 초등기하에서 필요로 하는 도형인 삼각형 등 간단한 도형의 성질뿐 아니라 도형들과의 상호관계를 은연중에 경험하게 하며, 도형의 넓이의 등분, 도형의 대칭성, 선분의 길이, 각의 이동 및 각의 등분 등 기하학적 개념과 종이접기를 수행하는 과정에 나타나는 종이의 모양에 따른 반복적인 규칙성에 의하여 논리적인 판단을 얻을 수 있다.

종이접기를 수학에 적용하는 것의 장점은 단순성과 독창성에 있다. 그러나 더욱 중요한 점은, 이것을 수학에 직접 적용함으로서 학생들에게 정신적이고 물리적인 참여를 유도하여 생동력있는 토론을 전개할 수 있다는 것이다.

따라서 본 논문에서는 구체적 조작물로 사용할 수 있는 종이띠 접기를 이용하여 그 속에서 찾아볼 수 있는 수학적 사실을 제시하고 이를 통해 수학적인 논리전개와 창의적인 사고력을 계발함과 동시에 수학에 대한 관심과 흥미를 유발하여 수학교과에 대한 긍정적인 태도를 갖게 하는데 목적이 있다.

2. 역사적 배경

그리스인들은 볼록 정다각형 즉, 모든 변의 길이가 같고 모든 각의 크기가 같은 다각형을 작도하는데 큰 관심이 있었다. 그들은 눈금없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 이러한 다각형을 만들어 내기를 원했다. 이러한 제한된 도구를 가지고 기하학적 그림을 그리는 것을 유클리드 작도라 하고 자와 컴퍼스는 유클리드 도구라 한다.

B.C 350년경 그리스인들은 다음과 같은 변의 개수를 가지는 볼록 정다각형을 작도하는데 성공했다.

$3, 2\times3, 4\times3, 8\times3, \cdots \quad (2^n\times3,\ n\geq0)$

$5, 2\times5, 4\times5, 8\times5, \cdots \quad (2^n\times5,\ n\geq0)$

$5, 2\times15, 4\times15, 8\times15, \cdots \quad (2^n\times15,\ n\geq0)$

$4, 8, 16, \cdots \quad (2^n,\ n\geq2)$

그 후 Gauss(1777-1855)가 볼록 정다각형을 작도할 수 있을 필요충분 조건은 그 다각형의 변의 개수가 2의 제곱승과 서로 다른 페르마 소수의 곱으로 표현되어질 때 가능하다라는 것을 발견하기까지 거의 이천년 동안은 더 이상의 진전이 없었다. 이 발견은 그리스인들의 업적뿐만 아니라, 유클리드 도구를 가지고 다음과 같은 변의 개수를 가지는 볼록 정다각형의 작도가 가능함을 내포한다.

$17, 2\times17, 4\times17, \cdots$
$257, 2\times257, 4\times257, \cdots$
$65537, 2\times65537, 4\times65537, \cdots$
$3\times17, 2\times3\times17, 4\times3\times17, \cdots$
$3\times257, 2\times3\times257, 4\times3\times257, \cdots$
$3\times65537, 2\times3\times65537, 4\times3\times65537, \cdots$
$5\times17, 2\times5\times17, 4\times5\times17, \cdots$
$\vdots$
$3\times5\times17\times257\times65537, 2\times3\times5\times17\times257\times65537,$
$4\times3\times5\times17\times257\times65537, \cdots$

유일하게 알려진 페르마 소수는 3, 5, 17, 257, 65537 이다. 그러므로 위와 같은 볼록 정다각형의 작도가 가능함을 알 수 있다. 하지만 이 목록에 없는 비교적 작은 수에 관심을 두자. 예를 들어, 만약 7개 또는 9개의 변을 가지는 볼록 정다각형을 작도하고 싶다면 가우스의 결과로부터 단지 유클리드 도구만을 사용하여 작도하는 것은 불가능하다는 것을 알 것이다.

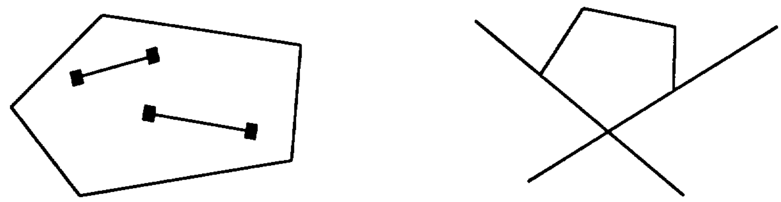
그러나 간단한 종이접기에 의하여 정다각형을 작도하는 방법이 있다. 본 논문에서는 정다각형을 종이띠로 접을 수 있는 이유를 설명하고 또한 일반적으로 모든 정다각형을 어떻게 종이띠로 접을 수 있는지 그 방법을 소개한다. 이때 결코 각을 측정하기 위하여 각도기를 사용하지 않는다.

Ⅱ. 종이 띠를 이용한 다각형 접기의 근거

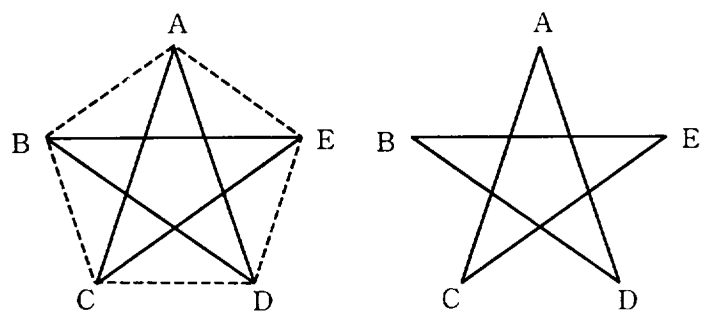
1. 종이띠 접기에서 사용될 용어

- 선 : 종이 띠를 접었을 때 나타나는 접힌 자국 또는 종이 띠의 변.
- 각 : 일반적인 각의 의미.
- 삼각형 : 일반 기하에서의 용어와 같은 의미.
  여기서 나타나는 모든 삼각형은 이등변 삼각형.

● 볼록 다각형 : 다각형에서 그 속에 있는 임의의 두 점을 연결하는 선분이 모두 그 다각형에 포함되는 것을 말한다. 이것은 어떤 변을 연장하여도 그 연장선이 도형안을 지나지 않는 다각형이다.



● 별꼴 정다각형 : 정다각형의 하나의 꼭지점에서 출발하여 꼭지점을 몇 개씩 건너(그 수는 일정) 차례로 이어서 출발점에 되돌아옴으로써 만들어지는 도형을 정별다각형이라 한다. 예를 들면, 정별오각형은 그림과 같이 정오각형의 꼭지점을 A, C, E, B, D, A의 순으로 이어서 얻어진다.



● $\frac{b}{a}$ 각형 : 별꼴 정다각형의 표기법으로 분자의 b는 다각형의 꼭지점의 개수를 말하며 분모의 a는 이 때의 윗변이 정볼록 다각형의 모든 a번째 꼭지점을 연속으로 지남을 말한다.

예를 들어 위의 정별오각형에서 꼭지점 A 다음의 꼭지점은 E를 건너뛰어 D에 나타나므로 $\frac{5}{2}$각형이라고 표기 할 수 있다.

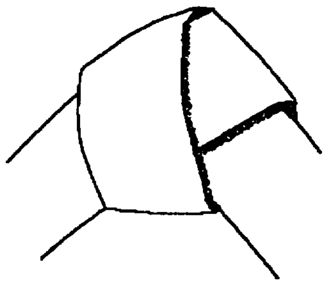
● 접기 절차 표기

- 아래로 한번 접기 : D
- 위로 한번 접기 : U
- 아래로 m번 접기 : $DDD \cdots D$ (m번) = D^m
- 위로 n번 접기 : $UUU \cdots U$ (n번) = U^n
- 아래로 한번 위로 한번 접기 : DU

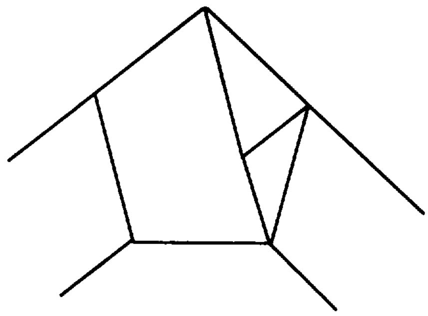
- 아래로 한번 위로 한번 접기를 반복하는 과정도 같은 표기로 한다. (DU)
- 아래로 m번, 위로 n번 접기 : D^mU^n

● 접고 꼬기 (F-A-T) 알고리즘 : 두 개의 접힌 선을 따라 한번은 접고 다시한번 꼬아 주는 시행.

2. 종이띠를 이용한 정오각형 접기

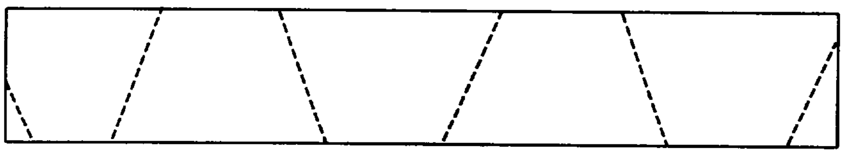


[그림 A] 매듭을 묶기

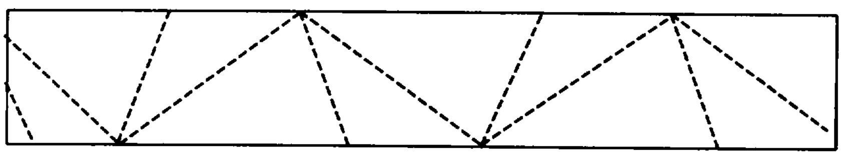


[그림 B] 매듭을 조이면서 납작하게 누른다.

매듭을 묶고 조이기에서 [그림B]의 매듭을 꼭 눌러서 선 자국을 확실히 남긴 후 다시 펼치면 다음과 같은 모양으로 나타난다.



(a) 매듭의 펼친 모양

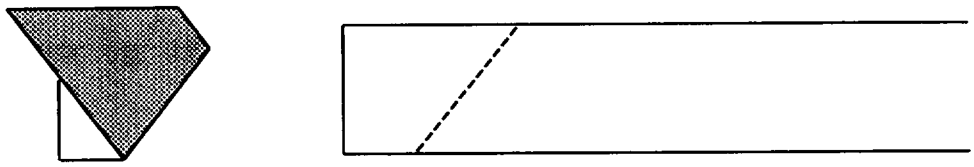


(b) 펼친 띠의 각의 이등분에 의한 선 접기

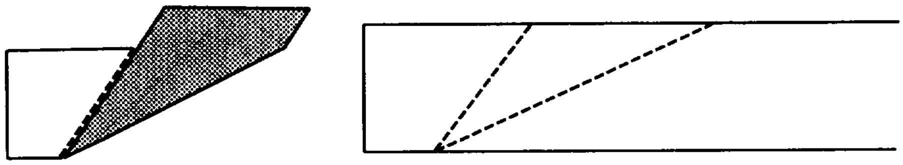
이제 정오각형을 만들고 싶을 때는 위와 같은 자국이 나타나도록 종이 띠를 접는다. 이것은 매듭을 묶은 후 펼쳐서 나오는 등변 사다리꼴의 대각선을 접어 그 접힌 선을 따라 접은 것이다. 다음에서 매듭을 이용하지 않고 위와 같은 모양의 접힌선이 나타나도록 직접 접어보자.

[접는 순서]

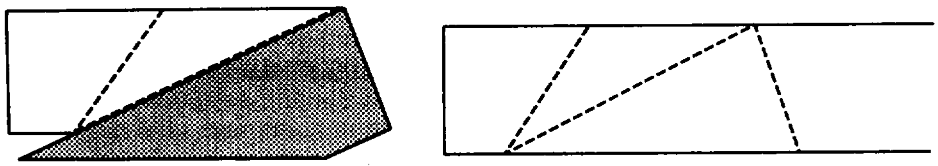
1) 긴 종이띠를 위로 접었다가 펼친다. - 임의대로



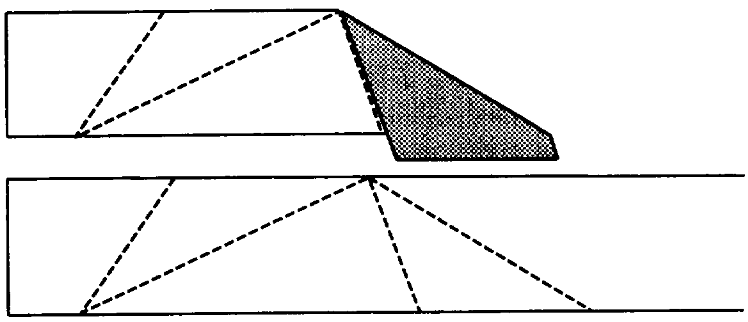
2) 접혀진 선에 맞추어 위로 접었다가 펼친다.



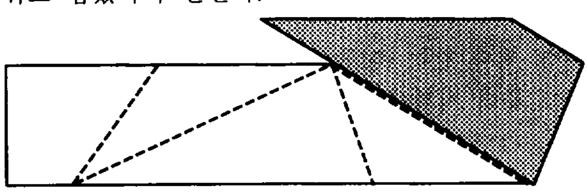
3) 접혀진 선을 따라 아래로 접었다가 펼친다.

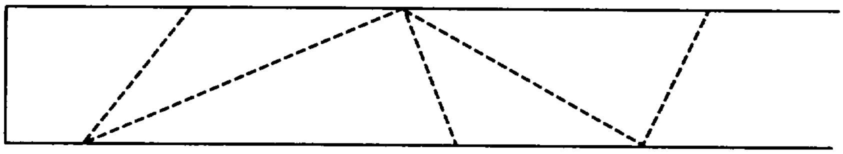


4) 다시 아래로 접었다가 펼친다.

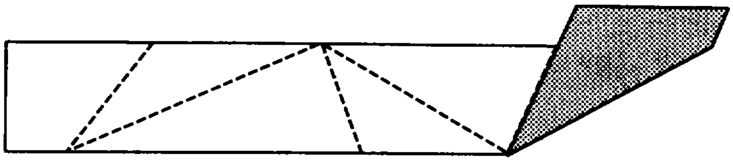


5) 위로 접었다가 펼친다.



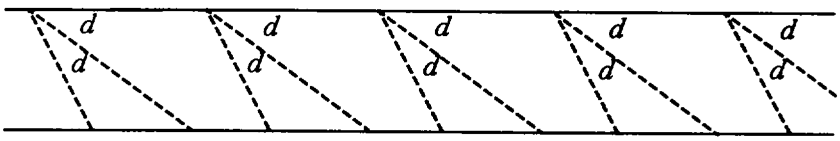


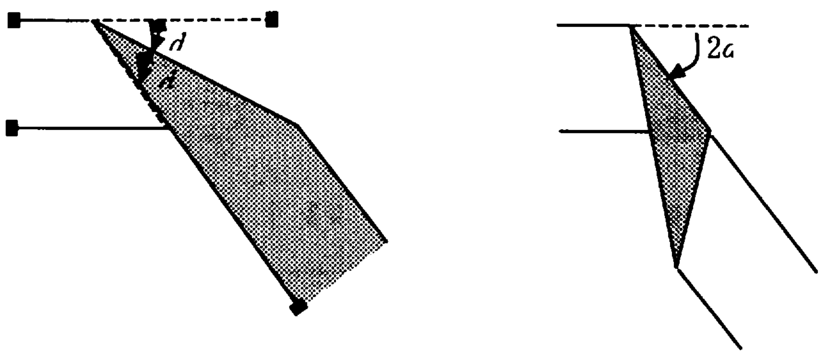
6) 다시 위로 접었다가 펼친다.



3. 정다각형의 근거

정다각형의 모든 외각의 합은 360°이므로 꼭지점이 p개일 때 각각은 $\frac{360°}{p}$ 가 된다. 따라서 정 p각형을 접기 위하여 일정한 간격의 점에서 $\frac{180°}{p}$ 의 각으로 띠를 접을 수 있다면 이들 점에서 F-A-T 알고리즘을 따라 $2\times\frac{180°}{p}$ 크기의 각도만큼 접을 수 있으므로 $\frac{360°}{p}$ 의 각을 접어 정 p각형을 만들 수가 있다. 즉, 만약 어떤 방법으로 띠 윗부분의 일정한 구간에서 $d°$ 크기만큼 접을 수 있다면 이들 점에서 F-A-T알고리즘을 따라 $2d°$ 크기만큼 접을 수 있다는 것을 말할 수 있다.





F-A-T 알고리즘에 의한 종이띠 접기

> **<정리>** 만약 종이 띠의 윗부분에 ($\frac{a}{b} \times 180°$)의 각을 일정한 간격으로 접어 나타낼 수 있으면, F-A-T알고리즘은 $\frac{b}{a}$ 각형을 접을 수 있다. (a, b는 홀수)

여기서 중요한 것은 ($\frac{a}{b} \times 180°$)의 각을 만들 수 있는 처음 접는 선을 고안하는 것이다. 주어진 어떤 접힌선에서 $\frac{2a}{b} \times 180°$, $\frac{4a}{b} \times 180°, \cdots$, $\frac{a}{2b} \times 180°$, $\frac{a}{4b} \times 180° \cdots$ 의 각을 만들기 위해서는 제2접는 선을 도입할 수 있다.

그러므로 실제로 a, b가 홀수인 $\frac{b}{a}$ 각형 접기인 경우에 관계되어진다. 그리고 $\frac{b}{a}$ 각형을 만드는데 있어 a와 b가 서로소 이어야 하고, 또한 $a < \frac{b}{2}$ 인 경우로 제한한다. 그 이유는 예를 들어, $\frac{7}{4}$ 각형은 실제로 $\frac{7}{3}$ 각형과 같은 것이기 때문이다.

Ⅲ. 종이 띠로 다각형 접기의 기본원리

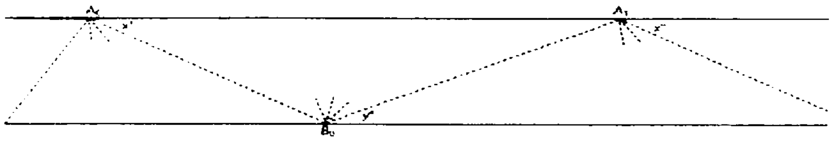
1. 종이 띠 접기 절차 $D^m U^n$

띠의 윗부분에 있는 모든 꼭지점에서 아래로 m번 접고, 아랫부분의 모든 꼭지점에서 위로 n번 접는 $D^m U^n$ 접기 절차에 한정한다면 어떤 다각형을 접을 수 있는지 생각해 보자.

> **<정리 3.1>** $D^m U^n$ 절차는 띠의 윗부분을 사용하여 $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ 각형을, 아랫부분을 이용하여 $\frac{2^{m+n}-1}{2^m-1}$ 각형을 접을 수 있다.

[증명]

이 접기 절차가 위쪽에 $x°$, 아래쪽에 $y°$의 각을 만들었다고 가정하자.



그리고 B_0에서 x의 보각을 n번 이등분하여 y가 나왔다고 하면,

$$x+2^n y=180$$

마찬가지로, A_1에서 y의 보각을 m번 이등분하여 x가 생겼다면, $y+2^m x=180$ 이라는 x와 y에 관한 연립방정식을 얻는다. y를 소거하여 풀자.

$$x+2^n(180-2^m x)=180$$

$$(2^{m+n}-1)x=(2^n-1)180$$

$$x=\frac{2^n-1}{2^{m+n}-1}\times 180$$

비슷한 방법으로

$$y=\frac{2^m-1}{2^{m+n}-1}\times 180$$

위와 같은 x와 y의 각을 접을 수 있으므로 정리가 증명된다. ■

<예제> $D^m U^n$ 방법에서 $m=n$ 이면 $\frac{2^{2n}-1}{2^n-1}$ 각형 즉, 2^n+1 각형을 접을 수 있다.

D^1U^1 : $\frac{2^2-1}{2-1}$ = 3각형

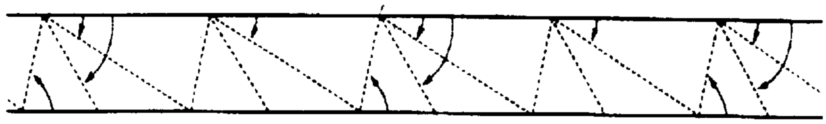
D^2U^2 : $\frac{2^4-1}{2^2-1}$ = 5각형

D^3U^3 : $\frac{2^6-1}{2^3-1}$ = 9각형

을 각각 접을 수 있다.

그 다음 경우, 즉, $n=4$일 때는 $2^4+1=17$ 각형이 되므로 17각형도 접을 수 있게 된다. 이론적으로 33각형, 65각형, 129각형, 257각형 등도 이 방법으로 접을 수 있다. 하지만 n의 값이 커질수록 이 방법에 의한 종이 띠 접기는 매우 어려워진다.

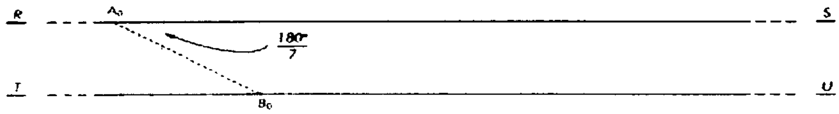
<예제> $D^m U^n$ 방법에서 $m\neq n$인 경우의 예로 D^2U^1(또는 U^1D^2) 접기를 보자. D^2U^1의 절차에 의해 다음과 같은 종이띠를 얻을 수 있다. 이 띠를 이용하여 접었을 때 정7각형($\frac{2^3-1}{2^1-1}$ =7)을 얻을 수가 있다.



<참고>

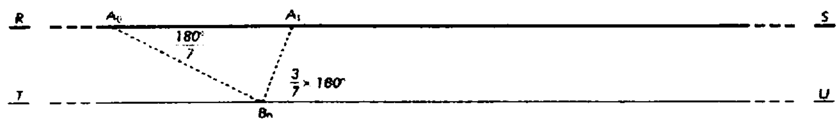
(1) 정 7각형을 접기 위해서는 띠의 윗부분에서 $\frac{180°}{7}$ 의 각으로 동일한 간격으로 접는 선을 만들어야 한다. 어떻게 하여 그러한 각이 만들어졌는지 살펴보자.

이제 그림에서 보여진 것 같은 하나의 그런 접힌 선이 있다고 가정하자.



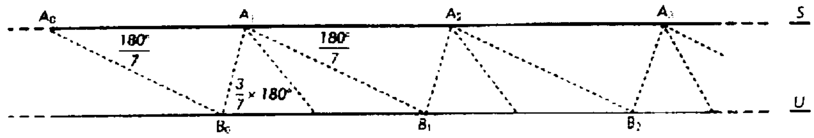
RS와 TU가 평행선이므로, 각 SA_0B_0와 A_0B_0U는 보각이다. (즉, 합은 180°)

그러므로 각 A_0B_0U는 ($\frac{6}{7}\times 180°$). 이 각을 이등분하는 위로 접힌 선을 만들어 보자.



보각의 규칙에 의해 다시 SA_1B_0는 ($\frac{4}{7}\times 180°$)가 된다.

아래로 한번 접는다면 이 각을 이등분한다. 다시 아래로 접으면 이 각은 $\frac{1}{4}$ 로 나눠진다. 그 결과 ($\frac{1}{7}\times 180°$)의 각이 된다.

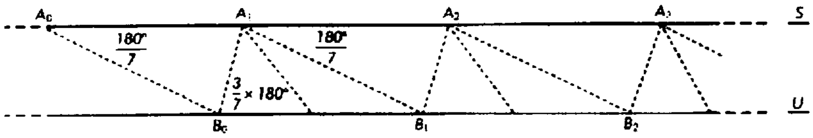


그러므로 이 과정을 계속 반복할 수 있다. 점 A_0, A_1, A_2, … 들은 띠의 윗부분에 같은 간격으로 나타난다는 것은 분명하다. 반면에 B_0, B_1, B_2, … 는 띠의 아래쪽에 동일한 간격으로 나타난다. 그래서 접기 절차는 D^2U^1과 같다.

또한 띠의 윗부분 대신 아랫부분을 사용한다면 $\frac{3}{7}\times 180°$의 각을 접을 수 있어 정 $\frac{7}{3}$ 각형이 되고, 윗부분에서 중간 접힌선을 사용한다면 $\frac{2}{7}\times 180°$의 각을 접을 수 있어서 정

$\frac{7}{2}$ 각형이 된다는 것도 알 수 있다. 그렇지만 위에서는 $\frac{1}{7}\times 180^\circ$ 만큼의 각의 크기를 가지는 처음 접는 선 A_0B_0를 처음부터 가정에 의하여 접어놓고 시작을 했다. 하지만 처음부터 그러한 정확한 각을 접기는 불가능하다. 처음에 부정확한 각을 접어놓고 시작하여 이 방법을 계속 했을 때 점점 더 정확한 값으로 수렴한다는 사실을 다음 참고에 설명한다. 또한 처음 약간의 부분을 잘라버리고 접기를 시작하는 이유가 여기에 있다.

(2) 종이접기에 있어서 문제는 처음에 어떻게 접을 것인가? 즉, 종이띠 위에 시작선을 만드는 것으로 제한되어진 것처럼 보인다. 하지만 이것은 그렇게 어렵지 않다. 만일 정다각형이 아주 정확하지는 못하더라도 매우 근사적인 것에 만족을 한다면 종이띠를 이용하여 정다각형을 접기란 아주 쉽다는 것을 지금부터 보일 것이다.



실제로 처음 각을 잡아 접는 것은 너무나도 부정확할 수 있다. 이 설명을 위해 정 7각형 접기를 예로 들어, 시작선 A_0B_0가 띠의 윗부분에 $(\frac{180}{7}+E)^\circ$의 각을 만든다고 가정하자. 물론 오차로써 E는 양수 또는 음수로써 생각한다. 그 다음에 산술을 통해 B_0A_1이 띠의 아랫부분에 $(\frac{3}{7}\times 180-\frac{E}{2})^\circ$의 각을 만드는 것을 보았다. 그리고 A_1B_1은 띠의 위쪽에 $(\frac{180}{7}+\frac{E}{8})^\circ$의 각을 만들었다. 그러므로 오차는 $\frac{E}{8}$로 줄어든다. 만약 계속한다면 A_2B_2에서의 각은 $(\frac{180}{7}+\frac{E}{64})^\circ$가 되어질 것이다. 물론, 이것은 A_nB_n쪽으로 감에 따라 $\frac{180^\circ}{7}$에 가까워지고 띠의 위쪽에 연속적으로 있는 점 A_n과 A_{n+1}사이의 거리가 띠를 따라 오른쪽으로 이동할수록 일정해 진다는 것을 설명한다.

띠의 윗부분에서 점 A_0로부터 그 다음점 A_r을 지나면서 k개의 접힌선이 생겼다고 가정하자. (예를 들어, 7각형에서 $k=3$). 이론상으로는 A_0와 A_r에서 나타나는 접힌선은 평행하다. 그러면 처음 오차가 E라면 A_r에서의 오차는 $\frac{E}{2^k}$가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이 띠의 윗부분에 있는 연속적인 점에서 각의 수열은 접고자 하는 각으로 매우 빠르게 수렴한다. 그리고 각이 수렴하는 것처럼 연속적인 점들 사이의 거리도 그렇게 된다. 그런 이유로 일정한 간격에서 같은 각의 크기만큼 접을 수 있어서 정다각형 접기가 가능한 것이다.

<정리 3.2> $\dfrac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ 이 정수일 필요충분조건은 n이 m의 인수이다.

[증명]

(⇒) $\dfrac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ 이 정수라 하자. 그러면,

$$2^{m+n}-1=(2^n-1)(2^m+2^{m-n}+2^{m-2n}+\cdots+2^{m-kn})+2^{m-kn}-1$$

이라 쓸 수 있으므로 나머지 부분인 $2^{m-kn}-1$ 이 0이어야 한다.

그러므로 $2^{m-kn}-1=0$

따라서 $m=kn$ 즉, n은 m의 인수이다.

(⇐) n이 m의 인수라 하자. 즉, $m=kn$

$$\frac{2^{kn+n}-1}{2^n-1}=\frac{(2^n-1)(2^{kn-n}+2^{kn-2n}+\cdots+2^0)}{2^n-1}$$
$$=2^{kn-n}+2^{kn-2n}+\cdots+1 \text{ :정수}$$ ■

<정리 3.3> N을 이진법으로 나타내자.

그러면 N이 $\dfrac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ 형태일 필요충분 조건은 N=10⋯010⋯0⋯10⋯01형태이다.

(10⋯0은 $\dfrac{m}{n}$ 번 반복되고 1다음에 $(n-1)$개의 0이 따른다.

이것을 N의 반복모형이라 한다.)

[증명]

(⇔) $N=\dfrac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ (N은 볼록다각형이므로 정수)

$$=2^m+2^{m-n}+2^{m-2n}+\cdots+2^{m-kn}+\cdots+2^0$$
$$=1\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{개}}1\underbrace{0\cdots0}\cdots10\cdots01$$

10⋯0은 k번($k=\dfrac{m}{n}$)반복되고 1다음에 $(n-1)$개의 0 이 따른다. ■

<예제> (1) N=7이라 하자. 이진법으로 7=111.

그러므로 7각형은 $n=1$(반복모형에서 0이 없으므로). 그리고 $\frac{m}{n}=2$ 에서 $m=2$(마지막 1은 반복모형이 아니다.)인 D^2U^1에 의해서 접을 수 있다.

(2) N=21이라 하자. 이진법으로 21=10101.

그러므로 21각형은 $n=2$(반복모형에서 0이 하나 따른다.) 그리고 $\frac{m}{n}=2$ 에서 $m=4$(10이 두 번 나타나므로)인 접기 D^4U^2에 의해서 접을 수 있다.

(3) N=11이라 하자. 이진법으로 11=1101.

이것은 올바른 유형이 아니다. 그래서 어떤 D^mU^n에 의해서 11각형은 접을 수 없다.

> **<정리 3.4>** 볼록 N각형이 $D^{m_1}U^{n_1}$ 절차로 접을 수 있다고 하자.
>
> (즉, N=$\underbrace{10\cdots0}\underbrace{10\cdots0}\cdots10\cdots01$ 형태이고, $10\cdots0$ 은 $\frac{m_1}{n_1}$번 반복되고
>
> (n_1-1)개
>
> 1 다음에 (n_1-1) 개의 0이 따른다.)이때 볼록 a각형이 N의 표기에서 어떤 1로부터 시작하여 N의 오른쪽 끝까지로써 $D^{m_2}U^{n_2}$ 절차로 접힌다고 하자. 그러면 별 $\frac{N}{a}$각형은 $m=m_1-m_2$ $n=n_1+m_2$ 인 D^mU^n절차로 접을 수 있다.

[증명]

가정에서 $n_2=n_1$ 임을 안다.

따라서 $N=\dfrac{2^{m_1+n_1}-1}{2^{n_1}-1}$ $a=\dfrac{2^{m_2+n_1}-1}{2^{n_1}-1}$

그러므로 $\dfrac{N}{a}=\dfrac{2^{m_1+n_1}-1}{2^{m_2+n_1}-1}$

로부터 $\dfrac{N}{a}=\dfrac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$

이 성립하려면 $m=m_1-m_2$ $n=n_1+m_2$ 이다. ■

<예제> N=7 a=3일때 각각 이진법으로 나타내면

7=111 3=11

이므로 볼록 7각형은 D^2U^1으로, 볼록 3각형은 D^1U^1으로 접을 수 있으며, 이 때 $n_1=n_2$, $m_1=2$, $m_2=1$ 로써 별 $\frac{7}{3}$각형은 D^1U^2로 혹은 D^2U^1으로 접을 수 있다.

2. 접기 절차 D^mU^n 이외의 종이띠 접기

D^mU^n접기로는 정 3, 6, 5, 10, 7 각형과 이것의 배수의 변을 가지는 정다각형을 접을 수 있었다. 그러나 정11각형, 정13각형 등과 같은 경우는 이 방법으로는 접을 수가 없다. 이와 같은 다각형을 접기 위해 D^mU^n이외의 접기 방법을 고려해볼 필요가 있다. 우선 정11각형 접기에 의해 이 방법을 생각해 보자. 정 11각형을 접는 것은 일정한 간격으로 띠의 윗부분에 $\frac{180°}{11}$ 의 각을 만드는 선을 접는 것이 필요하다. 7각형의 절차를 모방하여, 그러한 접힌선 A_0B_0를 놓는다고 가정하자. 다음과 같이 그 다음에 오는 것을 도식화 할 수 있을 것이다.

$$\angle A_0B_0U = (\frac{10}{11} \times 180)°$$

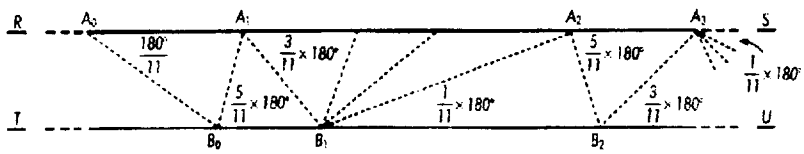
그것을 이등분하여 $(\frac{5}{11} \times 180)°$의 각 A_1B_0U를 얻는다.

$$\angle SA_1B_0 = (\frac{6}{11} \times 180)°$$

그것을 이등분하여 $(\frac{3}{11} \times 180)°$의 각 SA_1B_1을 얻는다.

$$\angle A_1B_1U = (\frac{8}{11} \times 180)°$$

그것을 3번 이등분하여 $(\frac{1}{11} \times 180)°$의 각 A_2B_1U를 얻는다.



이렇게 하면 원했던 각을 만들었지만, 그것은 띠의 아랫부분에 나타나게 된다. 하지만 그 과정을 반복하여 $(\frac{5}{11} \times 180)°$의 각 SA_2B_2, $(\frac{3}{11} \times 180)°$의 각 A_3B_2U, 그리고 $(\frac{1}{11} \times 180)°$의 각 SA_3B_3를 얻을 수 있다.

이와 같이 계속하면, 접힌선은 이 띠의 윗부분에 모두 $\frac{180°}{11}$ 의 각을 만들면서 A_0, A_3, A_6, A_9, … 점에 동일한 간격으로 나타난다. 여기에서 나타나는 종이 접기 방법은 $D^3U^1D^1U^3D^1U^1$으로 씌어질 것이다. 그 접기 방법은 D^mU^n보다 더 복잡하지만 체계적이긴 하다.

이와 같은 경우를 위해 다음과 같은 일반적인 방법을 소개한다.
앞에서 보았던 11각형을 예로 들어 다음 기호로 나타내보자.

$$11 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

종이 띠를 직접 접어보지 않더라도 위 기호 작성의 절차를 설명할 수 있을 것이다.

우선 11과 1로 시작해서 $11 \left| \begin{array}{c} 1 \\ \ \end{array} \right.$ 이라고 쓰자.

11-1=10, $\frac{10}{2}=5$ (5가 홀수이므로 멈춤). 여기서 10을 1번 이등분하여 5가 나왔으므로 1과 5를 다음처럼 적는다.

$$11 \left| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ & 1 \end{array} \right.$$

다시 11-5=6, $\frac{6}{2}=3$ (3이 홀수 이므로 멈춤). 여기서는 6을 1번 이등분하여 3이 나왔으므로 1과 3을 다음처럼 적는다.

$$11 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ & 1 & 1 \end{array} \right.$$

다시 11-3=8, $\frac{8}{2}=4$, $\frac{4}{2}=2$, $\frac{2}{2}=1$ (1이 홀수이므로 멈춤). 여기서 8을 3번 이등분하여 1이 나왔고 1은 처음 시작과 같으므로 끝내고 이 기호를 완성한다.

$$11 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

이 기호의 이해를 위해 앞 그림과 비교해 보면 그 원리를 쉽게 알 수 있을 것이다. 또한 기호를 이해할 수 있다면 앞에서 보았던 $D^3U^1D^1U^3D^1U^1$ 절차와 어떻게 관계되어지는지를 알 수 있다. 그리고 이것을 알 수 있다면 다각형 접기를 위하여 일반적인 절차로써 기호를 만들어 낼 수 있을 것이다.

이 기호의 아래 행에 있는 숫자는 종이 띠를 접어갈 때 정 11각형 접기를 위해 어떻게 종이 띠를 접어갈 것인가를 말해준다. 즉 $U^1D^1U^3$가 나오게 되고 처음 반복되는 1이 띠의 아랫부분에서 나오므로 같은 절차로 반복하면 윗부분에 나타나게 된다. 따라서 $D^3U^1D^1U^3D^1U^1$의 절차가 나오는 것이다.

이 방법을 다음과 같이 정리할 수 있다.

<정리 3.5>

$$\mathbf{b}\ \left|\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{array}\right|$$

여기서 b는 홀수, 각각의 a_i는 홀수, a_i와 b는 서로소, $a_i < \frac{b}{2}$, $b - a_i = 2^{k_i} a_{i+1}$, a_i는 반복되지 않으며 $a_{r+1} = a_1$ 이다.($1 \le i \le r$)

이와 같은 방법을 이용하여 정다각형 접기를 할 수 있으며 제2접는 선을 도입하여 각 다각형의 배수의 변을 갖는 다각형을 접을 수가 있다. 예를 들어
정6각형, 정12각형, 정24각형 등은 정삼각형 접기를 응용한다.

<예제>

이 방법에 의하여 간단히 정다각형의 접기 절차를 찾아보면 다음과 같다.

(1) 정삼각형 : D^1U^1

$$3\ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right|$$

(2) 정오각형 : D^2U^2

$$5\ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right|$$

(3) 정칠각형 : D^2U^1

$$7\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right|$$

(4) 정9각형 : D^3U^3

$$9\ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right|$$

(5) 정11각형 : $D^3U^1D^1U^3D^1U^1$

$$11\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

(6) 정13각형: $D^3U^1D^2U^3D^1U^2$

$$13\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

(7) 정15각형 : D^3U^1

$$15\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{array}\right|$$

(8) 정17각형 : D^4U^4

$$17\ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right|$$

Ⅳ. 결론 및 제언

정다각형의 여러 가지 성질들을 알고 있어도 실제적으로 그 정다각형의 작도문제(접기문제)는 쉽지가 않다. 서론 부분에서 보았듯이 자와 컴퍼스를 이용한 작도로써는 2의 제곱승과 서로 다른 페르마 소수의 곱으로 표현되어지는 변의 개수를 가진 정다각형을 작도할 수 있었다. 그러나 7각형 또는 9각형 등의 정다각형의 작도는 불가능했었다.

본 논문은 중등 수학교실에서 학생들이 작도가 불가능했던 정다각형을 종이띠를 이용한 접기를 통해 직접 접을 수 있는 방법을 찾고자 하였다.

먼저 Ⅱ장에서는 정사각형 종이와 매듭을 이용해서 오각형 접기 방법을 소개하였는데 특히, 종이띠 접기 방법은 매듭으로 접는 방법을 동기 삼아 접을 수 있음을 설명하였다.

Ⅲ장에서는 우선 종이띠 접기 절차의 기본 원리를 소개하고, 그 종이띠의 윗부분을 사용하여 아래로 m번 위로 n번 접는 D^mU^n으로 $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$ 각형을 접을 수 있음을 증명하였다. 또한 $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$의 값이 자연수일 필요충분조건은 n이 m의 인수임을 알았으며 어떤 정 볼록 N각형이 $\frac{2^{m+n}-1}{2^n-1}$일 필요충분조건으로 N이 특수한 모양의 이진법수로 표기됨을 증명했다. 또한, 별 $\frac{N}{a}$각형의 접기 절차에 관한 정리도 증명하였다. D^2U^1 절차로 접을 수 있는 정7각형은 어떤 접힌선을 사용하느냐에 따라서 별 $\frac{7}{2}$ 각형과 별 $\frac{7}{3}$ 각형도 접을 수 있음을 보여 주었다. 그런데 D^mU^n접기 절차로 되지 않는 정11각형의 접기 방법을 생각해 봄으로써 정 N각형의 종이띠 접기 절차의 일반적인 방법을 소개하였다.

이제 본 논문에서 알려진 정 N각형의 종이띠 접기 방법을 실제로 수업현장에 적용시킴으로써 학생들은 수학에 대한 색다른 즐거움과 흥미를 직접적인 체험을 통해 느낄 수 있을 것이다. 더 나아가 종이띠를 이용한 접기를 통해 정다각형뿐만 아니라 정다면체의 접기도 가능한가를 알아보고 가능하다면 복잡한 정다면체의 학습에 적용할 수 있도록 할 필요성이 있다. 정다각형 및 정다면체의 학습 적용을 위해 종이 접기를 활용하는 많은 교수 학습 방법의 연구・개발이 필요하다.

참 고 문 헌

Peter Hilton, Jean Pedersen, "Build Your Own Polyhedra", Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

강신민, 김석룡, "종이접기에 의한 정다각형의 작도", 경상대학교 교육대학원 석사학위논문, 1989.

백석윤, "종이접기를 통한 초등기하교육", 진주교육대학 초등교육 연수, 제4집, 1991.

황정원, "종이접기를 이용한 도형지도", 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문, 1999.

남호영, 박정숙, 천정아, "종이접기속에 숨겨진 수학", 수학사랑, 2001.

김미자 외, "황금비에는 황금이 있다?!", 수학사랑, 2001.

<Abstract>

Constructions of regular polygons and regular star polygons by folding a strip of paper

Eun-Sook Bang · Min-Suk Kim

In this thesis, we discuss how to construct the regular polygons such as polygons with 7 or 9 sides which could not built by using only Euclidean tools. Thus, we suggest an effective way to construct regular polygons by simply folding a straight strip of paper.

We can obtain a single pentagon once we take a strip of paper, tie a knot and press it flat. This method adopted to begin this paper including the means to make a regular star polygon.

In addition, we study some of the properties concerned with regular polygons and with some of general folding procedures.