초등교육연구 제8집(2004. 1.) pp. 1~19
제주교육대학교 초등교육연구원

이산수학의 기초원리

- 배열과 분배를 중심으로 -

The basic principles of discrete mathematics

- arrangements and distributions -

최 근 배*[1)]

〈 목 차 〉

요 약

본 고에서는 초등학교 고학년 또는 초등영재 수업에 사용할 수 있는 조합론의 기초적인 원리를 소개하고자 한다. 주로, 이중계수 문제, 비둘기집의 원리, 포함과 배제의 원리, 집합의 분할, 자연수의 분할 등의 기초적인 원리를 탐구하고자 한다.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to introduce the basic principles of combinatorics, which can be applied to high grade students or to the mathematically gifted students in elementary school. Mainly, we deal with the basic concepts of the double counting principle, the pigeonhole principle, the partition of a set, and the partition of a natural number.

* 제주교육대학교 수학교육학과 전임강사

Ⅰ. 서 론

이산(discrete)이란 「따로따로 떨어진, 분리된, 별개의」와 같은 사전적 의미로 이는 연속(continuous)과 대조가 되는 말이다. **이산수학**이란 이산을 다루는 수학분야이다. 다시 말해서, 이산적인 대상을 이산적인 방법으로 다루는 수학이다. 특히, 이산수학의 분야 중 조합론(combinatorics)이 중요한 부분을 차지하고 있다.

이산수학은 전에는 게임이나 퍼즐 등에 숨어있는 수학으로써의 성격이 강하였지만, 21세기의 정보화 시대에는 정보의 분석, 보호 등과 관련하여 대단히 중요한 위치를 점하고 있다. 또한 이산수학은 문제해결을 위한 수학적인 센스와 흥미를 요구한다는 점에서 틀에 박힌 보수적인 교육방법의 개선에 기여할 수 있는 장점을 가지고 있다. 즉, 이산수학을 수학의 본질적인 관점으로 볼 때, 정해진 틀을 따르는 수렴적사고보다는 발산적사고를 요구한다. 따라서 이산수학은 수학적 창의성을 기르는 데 기여할 수 있다.

이산수학에서 중요한 위치를 차지하고 있는 조합론(combinatorics)은 패턴들의 배열과 관련되어 있다([8]). 배열과 관련된 문제는 다음과 같이 요약된다.

(1) 배열의 존재성: 특정한 패턴의 배열이 존재하는가?

(2) 배열의 분류와 계수(計數): 만일 특정한 배열이 가능하다면 그 배열을 얻기 위한 여러 가지의 방법이 있을 수 있다. 그 방법의 수를 구하거나 여러 가지 형태로의 분류하기

(3) 배열의 구조 분석: 특정한 배열이 존재할 때, 그 배열의 구조는 어떠한가?

좀더 일반적으로, 조합론은 이산구조와 관계의 해석과 관련된 수학의 한 분야이다.

이산수학을 중등수학에 적용한 연구는 한원규(1987), 이준열(1991), 김수환(1992), 한용수(1992), 엄경애(1992), 임은찬(1993) 등이 있고, 초등수학에 적용한 연구사례는 이도영(1995) 등이 있다. 이도영(1995)의 연구는 주로 비둘기집의 원리와 그래프 이론 중 한붓그리기, 지도채색 문제, 최소지름 수형도 등을 중심으로 이산수학을 이산수학 자체가 아니라 문제해결을 위한 사고력 향상과 흥미유발에 초점을 두고 초등학교 고학년 학생들에게 소개하였다.

본 고에서는 초등학교 고학년 또는 초등영재 수업에 사용할 수 있는 조합론

의 기초적인 원리를 소개하고자 한다. 주로, 이중계수 문제, 배열과 분배와 관련된 비둘기집의 원리, 집합의 분할, 자연수의 분할 등의 기초적인 원리를 탐구하고자 한다.

Ⅱ. 기초지식

1. 자연수와 산술

크로네크(Kronecker)는 수학에 관하여 이야기를 할 때 "신은 자연수를 만들었고 그 나머지는 인간이 만들었다" 라는 말을 자주 인용하였다. 그는 자연수를 가장 이른 고고학적인 증거보다도 오래된 것으로 간주하였다. 역사적으로 볼 때, 영과 음수는 훨씬 더 나중에 발병(또는 발견)된 것이다.[2] 조합론(combinatorics)의 많은 부분은 계수(計數)와 관련되어있기 때문에 우리에게 자연수는 특별히 중요하다.

자연수는 우리와 친숙하게된 첫 번째 수학적인 구조다. 어린 아이들은 동요를 부르듯이 첫 번째 몇몇 자연수의 이름을 암송한다. 이러한 것이 그들에게 자연수는 연속성이 있다는 개념을 준다. 그들은 현명한 방법으로 자연수를 파악하고 있다.「일, 이, 약간의 수를 놓치고, 구십 구, 백」은 수열이 적어도 100까지 도달할 수 있다는 확신의 표현이고, 말하는 어린 아이가 약간의 압력(조언)을 받으면 놓친 부분을 채울 수 있다.

따라서 순서와 진행은 자연수의 가장 근본적인 성질이다. 산술연산은 임의의 수에서 그의 후속수(successor)로 진행할 수 있다는 암묵적인 가정을 기본으로 하고 있다. 참고로, 자연수를 정의하기 위한 공리 중 하나인 이탈리아 수학자인 Peano의 산술공리를 소개한다.

Peano의 산술공리: 자연수의 전체의 집합은 아래의 네 조건을 만족한다.

(i) 임의의 수 n에 대하여 후속수 n^+가 오직 하나 존재한다.

(ii) 어떠한 수의 후속수가 아닌 수 1이 존재한다.

(iii) 서로 다른 수는 서로 다른 후속수를 가진다.

(iv) (귀납법 공리) 만약 S가 1을 포함하는 자연수의 집합으로

2) Georges Ifrah, *Frome One to Zero: A Universal History of Numbers* (1985), for an account of the development of numbers and their representation.

「 $x \in S \Rightarrow x^{+} \in S$ 」이면, S는 모든 수(자연수)의 집합이다.

이로부터 덧셈을 다음과 같이 도입한다.

$$n+1=n^{+}$$

로 정의하고, 귀납적으로

$$n+m^{+}=(n+m)^{+}$$

또한 곱셈도 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$m\times 1=m$$

로 정의하고, 귀납적으로

$$m\times n^{+}=m\times n+m$$

로 정의한다.

자연수를 어떻게 수학적으로 표현할 수 있을까? 가장 단순한 방법은 수 n을 동일한 n 개의 표시(mark)의 열로 나타내는 방법이다. 이 방법은 아마도 인간이 선택한 가장 이른 기획이다. 이것은 기록을 하는데 잘 적용된다: 한 수로부터 다음수로 가기 위하여 단지 하나의 표시를 더 첨가하면 된다. 그러나 큰 수는 쉽게 인식할 수 없다. 여러 가지의 치밀한 사고(표시를 5개씩 그룹의 범위로 로마숫자의 구조로)후에, 위치개념이 최종적으로 채택되었다.

이것은 기저 b와 b와 다른 심볼로 구성된 b 디지트 $0,1,2,\ldots,b-1$를 포함한다. 영의 심볼에 대한 필요성이 인식되지 못했기 때문에 위치개념에 대한 전의 시도에 어려움을 당하였다. 임의의 자연수는 디지트의 유한배열에 의하여 표현된다. 논리적으로 일련의 배열은 오른쪽에서 왼쪽으로 읽는다. 따라서 이것을 $x_{n-1}\cdots x_1x_0$로 쓴다. 여기서 x_i는 디지트 중 하나다. 편리를 위하여 가장왼쪽의 디지트는 영이 아니다. 다음 수로의 진행에 대한 알고리즘을「주행거리 원리(Odometer Principle)」로 부른다. 이 원리는 i위치의 b카운터를 $i+1$위치에 하나의 카운터로 전이하는 것을 기초로 하고 있고, 차의 주행거리를 측정계를 살펴보면 이해할 수 있다.

주행거리 원리(Odometer Principle): 자연수 b를 기저로 주어진 자연수의 후속수 찾기를 생각해 보자.

가장 오른쪽의 디지트를 고려함으로써 시작한다.

- 만일 그 디지트가 $b-1$이 아니면, 그것을 순서에 있어서 다음 디지트로 대치하고 그 알고리즘을 끝내라.
- 만일 빈 공간의 상태로 있다면, 그것에 디지트 1을 쓰고, 그 알고리즘을 끝내라.
- 만일 위의 두 경우가 아니라면, 디지트 $b-1$를 고려하자. 그것을 디지트 0으로 대치하고, 왼쪽으로 한 칸 이동 후 위의 경우로 돌아간다.

예를 들어, 만일 기저 b가 2이고 디지트가 0과 1이면, (1로 시작된)알고리즘은 차례로 10, 11, 100, 101, 110, ... 이다.

기저 b를 기준으로 한 배열 $x_{n-1} \cdots x_1 x_0$은 양의 정수

$$x_{n-1}b^{n-1} + \cdots + x_1 b + x_0$$

를 나타낸다는 것은 귀납법에 의하여 알 수 있다.

2. 귀납법

귀납법은 자연수에 관한 주장을 증명하는 것에 대한 매우 강력한 원리 중 하나이다. 이것은 다양한 형태로 적용된다. 이 절에서는 귀납법의 몇몇 형태에 대하여 설명하고자 한자. 귀납법은 자연수에 관한 우리의 가장 기본적인 직관의 결과이다. Peano의 산술공리를 살펴보면 귀납법의 원리를 파악할 수 있다.

귀납법의 원리: $P(n)$을 자연수 n에 관한 명제 또는 주장이라고 하자. $P(1)$이 참이고 $P(n)$이 참일 때 $P(n+1)$이 또한 참이면, 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 참이다.

왜 이것이 사실일까? 자연수의 기본성질(심지어 어린아이도 인식할 수 있는)은 1에서 시작하여 임의의 자연수 n까지 셀 수 있다는 것이다. 이제, 귀납원리의 가정으로부터, 「$P(1)$은 참이고, 따라서 $P(2)$도 참이다, 따라서 (여기에 약간을 생략하고) 따라서 $P(n-1)$은 참이다, 따라서 $P(n)$는 참이다」

만일 수학적 주장에「약간의 점(일반적으로 세 개의 점으로 표시)」이나

「등등」으로 표현된 곳에는 아마도 귀납법에 의한 증명이 그 곳에 숨겨져 있다. 예를 들어, $f(1)=2$이고 모든 자연수 n에 대하여 $f(n+1)=2f(n)$을 만족하는 함수 f를 고려하자. 이 경우

$$f(2)=4=2^2,\ f(3)=8=2^3,\ \ldots,\ f(n)=2^n$$

위의 식에서 세 개의 점에는 귀납법에 의한 증명이 숨겨져 있다. $P(n)$을 $f(n)=2^n$이라는 주장으로 두자. 그러면 $P(1)$를 만족한다. $P(n)$을 만족한다고 가정하면,

$$P(n+1)=2P(n)=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

따라서 $P(n+1)$ 역시 만족하고, 귀납법의 원리는 결론을 정당화한다. 귀납법에 의한 매우 단순한 주장은 상세한 증명 대신에 세 개의 점으로 쓰여질 수 있다. 그러나 만일 필요하다면 이것의 증명을 제공하여야 한다.

이제, 귀납법의 원리의 여러 가지 다른 형태를 살펴보자. 그 첫 번째 하나는 평이한 것이다. 주장 $P(n)$에 대하여, $P(30)$이 참이고, $P(n)$이 참이면 $P(n+1)$도 참이다. 이로부터 $n\geq 30$인 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다는 결론을 얻는다. 이것을 형식적으로 증명하기 위하여 $Q(n)$을 $P(n+29)$이 참이다라는 주장으로 두고, $Q(n)$에 대한 귀납법의 원리의 가정을 검정하면 된다.

다음의 변형을 위하여, $P(n)$을 자연수 n에 관한 명제라고 하자. 모든 자연수 n에 대하여, 「만일 n보다 작은 모든 자연수 m에 대하여 $P(m)$을 만족하면, $P(n)$도 만족한다」이 경우 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 참이다라는 결론을 내릴 수 있을까?

$Q(n)$을 「모든 자연수 $m<n$에 대하여 $P(m)$을 성립한다」라는 진술로 두자. $Q(n+1)$이 참이면 $P(n)$이 참이다라는 사실은 당연하다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $Q(n)$이 만족함을 보이면 된다. 이러한 사실을 귀납법을 이용하여 증명하자.

먼저, $Q(1)$이 만족한다: 1보다 작은 자연수가 없으므로 성립함을 알 수 있다.

이제, $Q(n)$이 만족한다고 가정하자. 즉, 모든 자연수 $m<n$에 대하여 $P(m)$을 성립한다. 가정에 의하여 $P(n)$ 역시 참이다. $n+1$보다 작은 자연수는 n이거나 n보다 작은 자연수이기 때문에, 모든 $m<n+1$에 대하여 $P(m)$은 참

이다. 따라서 $Q(n+1)$이 만족된다.

이제 귀납법의 원리에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $Q(n)$이 성립한다.

귀납법의 마지막 형태는 「최소 반례에 의한 증명」의 기술을 준다. $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다는 것이 거짓인 명제라고 가정하자. 그러면 $P(n)$을 거짓으로 하는 최소의 자연수 n이 존재한다. 다시 말해서, 모든 자연수 $m < n$에 대하여 $P(m)$은 참이지만 $P(n)$은 거짓이다. 왜냐하면, 그러한 자연수 n이 존재하지 않는다고 가정하면 모든 자연수 $m < n$에 대하여 $P(m)$은 참이라는 것이 $P(n)$의 사실을 수반한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 참이고, 가정에 모순된다.

이러한 주장은 임의의 자연수들의 공집합이 아닌 집합은 최소수를 포함한다는 것을 보여준다(S가 임의의 자연수들의 공집합이 아닌 집합, $P(n)$은 $n \notin S$인 명제로 둔다).

3. 유용한 함수들

조합론에 자주 사용되는 기초적인 함수를 알아보자.

바닥(floor)과 천장(ceiling): 실수 x의 바닥은 x를 넘지 않는 가장 큰 정수를 의미하고, $\lfloor x \rfloor$로 나타낸다. 다시 말해서 $\lfloor x \rfloor$는 $m \leq x < m+1$를 만족하는 정수 m이다. 만일 x가 정수이면, $\lfloor x \rfloor = x$ 이다. 이 함수는 때때로 $[x]$로 나타내기도 하지만, 표현 $\lfloor x \rfloor$은 「끝 수를 잘라 버린다」다는 것을 암시한다는 점에서 더 적절한 표현일 수 있다.

실수 x의 천장은 x보다 작지 않은 가장 작은 정수를 의미하고, $\lceil x \rceil$로 나타낸다. 따라서 만일 x가 정수가 아니면 $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$이고, x가 정수이면 이 수의 바닥과 천장은 같다. 어떠한 경우든지 다음을 알 수 있다.

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

계승(factorial): 계승함수는 1부터 n 까지의 모든 정수를 곱한다는 법칙에 의한 양의 정수 상에서 정의된 함수를 의미하고, $n!$로 나타낸다. 이것은 다음의 법칙을 만족한다.

$$n! = n \cdot (n-1)!, \qquad n > 1$$

일관성 있게 $0!=1$로 정의하면, 위의 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. 실제로, 두 조건 $0!=1$과 위의 식은 모든 자연수 $n \geq 0$에 대하여 실제적으로 $n!$을 정의한다. 이것은 귀납법에 의하여 증명된다: $0!$이 정의되고, 만일 $n!$이 정의되면 $(n+1)!$이 정의된다. 따라서 모든 자연수 $n \geq 0$에 대하여 $n!$이 정의된다.

4. 이중계수(double counting)

우리가 그르칠 수 있을 만큼 단순하지만 상당히 중요한 계수원리가 있다.

「만일 같은 집합이 두 개의 다른 방법으로 계수 되었다면, 그 답은 같다」

이것은 어떤 주어진 행렬에서 모든 원소들의 합을 구하는 경우에, 모든 행을 더함으로써 또는 모든 열을 더함으로써 그 합을 구할 수 있는 것과 유사하다.

이 원리는 다음의 응용에 의하여 잘 설명되어 진다.

악수보조정리[3]: 어떤 모임에서, 모임의 참석자 중에서 홀수 번 악수한 사람의 수는 짝수이다.

이 악수보조정리를 밝혀보자. 모임의 참석자를 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이라고 두자. 이 모임에서 서로 악수를 한 참석자 x_i 와 x_j에 대한 순서쌍 (x_i, x_j)들의 집합에 이중계수를 적용하여 보자. $d(x_i)$를 참석자 x_i가 악수를 한 횟수라고 두고, e를 모임에서 일어난 악수의 총 횟수라고 두자.

한편, 순서쌍의 수는

$$d(x_1)+d(x_2)+\cdots+d(x_n)$$

이다. 왜냐하면, 각 x_i에 대하여 x_j의 선택의 수는 $d(x_i)$와 같기 때문이다. 또 다른 한편, 각 악수는 두 순서쌍 (x_i, x_j)와 (x_j, x_i)에서 일어난다. 따라서

$$d(x_1)+d(x_2)+\cdots+d(x_n)=2e$$

위의 식에서 n개의 수($d(x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$)의 합이 짝수이므로, n 개의 수중에 홀수인 수는 짝수이어야 한다.

---

3) 악수보조정리는 오일러(Euler, 1707-1783)의 논문, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* 에 처음으로 소개되었다.

[탐구문제 1] 5개 팀이 출전하는 농구시합에서 모든 팀이 홀수 번 시합을 할 수 있게하는 대전표를 짤 수 있겠는가?

[탐구문제 2] 일상 생활에서 이중계수가 적용될 수 있는 예를 찾아보아라.

III. 배열과 분배

1. 배열

5마리의 비둘기를 4개의 비둘기 집에 넣으면 2마리 이상 들어간 집이 반드시 존재한다. 이러한 주장은 너무나 당연하지만 이산 수학에서 배열의 존재성 문제를 이야기할 때 주요한 원리로 사용된다. 이러한 원리를 비둘기집의 원리(pigeonhole principle)라고 부른다.

비둘기집의 원리 1: $n+1$ 마리의 비둘기를 n 개의 비둘기집에 넣으면, 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.

「어떤 화가는 15일 동안 매일 1개 이상의 작품을 만들어 23개를 만들었다. 정확하게 6개의 작품을 만든 연속되는 며칠 사이의 기간이 있음을 보여라」

라는 문제를 생각하여 보자.

1일에서 i일까지 화가가 만든 작품의 수를 x_i라고 하자. 그러면 다음을 알 수 있다.

$$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{15} = 23$$

이고, 또한

$$x_1+6 < x_2+6 < \cdots < x_{15}+6 = 23+6 = 29$$

이다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\{x_1, \ldots, x_{15}, x_1+6, \ldots, x_{15}+6\} \subset \{1, 2, \ldots, 29\}$$

따라서 비둘기집의 원리에 의하여

$$x_1, \ldots, x_{15}, x_1+6, \ldots, x_{15}+6$$

중에서 서로 같은 두 수가 반드시 존재한다. 한편, $x_1, \ldots, x_{15}$들끼리 서로 다르고 또한 $x_1+6, \ldots, x_{15}+6$들끼리 서로 다르므로, $x_i+6=x_j$를 만족시키는 i,j가 존재하고, 따라서 $x_j-x_i=6$이다. 이로부터 연속되는 $i+1$에서 j일 까지 이 화가는 6개의 작품을 만들었다.

[탐구문제] 어떤 책을 하나 선택하자. 이 책의 i쪽에서 j쪽까지 들어있는 글자 수가 주어진 책의 쪽수의 배수가 되는 i,j가 존재함을 보여라.

보다 일반적인 비둘기집의 원리를 생각해 본다.

비둘기집의 원리 2: m 마리의 비둘기를 n 개의 비둘기집에 넣으면 유리수 m/n의 천장 $\lceil m/n \rceil$ 마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.

「종이 위에 세 개의 점이 동일 선상에 놓여있지 않도록 6개의 점을 찍고, 빨간색과 파란색의 두 색연필로 임의의 두 점을 연결한다고 하자. 이 때, 변의 색이 같은 삼각형을 만들지 않도록 15개의 변을 그릴 수 있을까?」

라는 문제를 생각해보자.

6개의 점의 라벨을 1,2,...,6으로 두고, 점 i와 점 j를 이은 변을 ij로 표현하자. 다섯 개의 변 16,26,36,46,56을 생각하자. 두 가지 색의 색연필을 가지고 있으므로 비둘기집의 원리에 의하여 다섯 개의 변 중 적어도 세 개는 같은 색이다. 일관성을 일지 않고, 세 개의 변 16,26과 36이 빨간색이라고 두자. 이제 두 가지의 가능성이 있다. 만일 12,23,31 중에서 하나가 빨간색(12)이면, 삼각형 126은 변의 색(빨간색)이 같은 삼각형이다. 만일 세 개의 변 12,23,31 모두가 빨간색이 아니면, 삼각형 123은 변의 색(파란색)이 같은 삼각형이다. 따라서 위의 문제는 불가능하다는 것을 알 수 있다.

[탐구문제] 위의 문제에서 만일 점이 5개라면 가능할까?

포함과 배제의 원리(Inclusion-Exclusion Principle)

유한집합 F의 부분집합 $S_1, S_2, \ldots, S_n$이 주어졌을 때, 각 $k=1,2,\ldots,n$에 대하여, 이들 중에서 모든 k개의 집합의 교집합의 개수의 합을 a_k라고 두면,

$$|\cup_{i=1}^{k} S_i| = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

$n=4$인 경우 a_k는 다음과 같다.

- $a_1 = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|$
- $a_2 = |S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_1 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_4| + |S_3 \cap S_4|$
- $a_3 = |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4|$
- $a_4 = |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|$

이제, 다음과 같은 문제를 생각해보자

「100이하의 자연수 중 소수의 개수는 몇 개일까?」

이 문제는 100이하의 자연수 중에서 2, 3, 5 또는 7로 나누어 떨어지지 않는 수에서 1을 제외한 수의 개수를 구하는 문제와 같음을 알 수 있다. 편리를 위해서, A_k를 100이하의 자연수 중에서 k의 배수 전체의 집합이라고 하자. 그러면 우리 문제의 답은 $100 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$를 구하는 것으로 단순화 될 수 있다.

2. 분배

이 절에서는 주어진 n 개의 구슬을 k 개의 그룹으로 분할하는 방법의 수와 관련된 문제를 생각하여 본다.

이러한 문제의 경우 주어진 n 개의 구슬이 서로 다른 경우와 서로 같은 경우로 나누어서 생각할 수 있다. 여기서는 k 개의 그룹을 구별하지 않는다고 가정한다.

(1) 집합의 분할

· 스털링 수(Stirling number)

빨간 색, 파란 색, 검은 색인 구슬 3개를 k 개의 그룹으로 나누는 방법의

수를 살펴보자.

- $k=1$일 때, {{빨간색 구슬, 파란색 구슬, 검은색 구슬}}: 1 가지
- $k=2$일 때, 다음과 같은 3 가지의 분할이 있다.
  {{빨간색 구슬}, { 파란색 구슬, 검은색 구슬}},
  {{파란색 구슬}, { 빨간색 구슬, 검은색 구슬}},
  {{검은색 구슬}, { 빨간색 구슬, 파란색 구슬}}
- $k=3$일 때, {{빨간색 구슬}, { 파란색 구슬}, {검은색 구슬}}: 1 가지

일반적으로 음이 아닌 정수 n, k에 대하여, 서로 다른 n 개의 구슬을 k 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 **제2종 스털링 수**라고 하고, $S(n,k)$로 나타낸다. 위의 예에서 본바와 같이 $S(3,1)=1$, $S(3,2)=3$, $S(3,3)=1$임을 알 수 있다.

이제, 제2종 스털링 수의 규칙성을 찾아보자.

(1) $k>n$인 경우: 서로 다른 n 개의 구슬을 k 개의 그룹으로 나눌 수 없다. 따라서 이 경우에는 $S(n,k)=0$를 얻는다.

(2) $k=0$인 경우: 서로 다른 $n(>0)$ 개의 구슬을 0 개의 그룹으로 나눌 수 없다. 따라서 이 경우에는 $S(n,0)=0$를 얻는다.

(3) $k=1$인 경우: 서로 다른 $n(>0)$ 개의 구슬을 1 개의 그룹으로 나누는 방법의 수는 1 이다. 따라서 $S(n,1)=1$을 얻는다.

(4) $n=k$ $(\neq 0)$인 경우: 서로 다른 $n(>0)$ 개의 구슬을 $k(=n)$ 개의 그룹으로 나누는 방법의 수는 1 이다. 따라서 $S(n,n)=1$ $(n=1,2,\ldots)$을 얻는다.

(5) $0<k<n$ 인 정수 n, k에 대하여, n 개의 서로 다른 구슬을 1, 2, ..., n이 라고 두고, k 개의 그룹으로 나누는 방법을 생각해 보자.

경우 1: n이 혼자서 1 개의 그룹을 이루는 경우
이 경우에는 $n-1$ 개의 서로 다른 구슬을 1, 2, ..., $n-1$을 $k-1$개의 그룹 G_1, G_2, ..., G_{k-1}으로 분할함으로써 다음과 같은 k 개의 그룹으로 나누어진다.

$$\{G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_{k-1},\ \{n\}\}$$

따라서 이 경우의 분할 수는 $S(n-1,k-1)$이다.

경우 2: n이 다른 구슬과 함께 1개의 그룹을 이루고 있는 경우

이 경우에는 1, 2, ..., $n-1$을 k개의 그룹 $G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_k$으로 나눈 후 n을 이 k 개의 그룹 중 어느 하나에 포함시키면 된다. 따라서 n을 포함시키는 방법의 수는 그룹 수 k와 같다. 따라서 이 경우의 분할 수는 $k\times S(n-1,k)$이다.

경우 1과 경우 2에 의하여 $0 < k < n$ 인 정수 n, k에 대하여, 다음과 같은 중요한 성질을 알 수 있다.

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\times S(n-1,k)$$

성질 (1)~(5)를 이용하여 다음과 같은 표 <표 1>를 얻을 수 있다. 편리를 위해서 $S(0,0)=1$로 정의하자.

<표 1> 스털링 수

n \ k	0	1	2	●	4	5	…
0	1	0	0	0	0	0	…
1	0	1	0	0	0	0	…
2	0	1	1	0	0	0	…
3	0	1	3	1	0	0	…
④	0	1	7	6	1	0	…
●	0	1	15	25	10	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

위의 표를 분석해보자. 위의 표에서 $S(5,3)=25$는 색칠된 부분으로 다음과 같이 설명된다.

$$25=7+\bullet\times 6=S(\bullet,\bullet)$$

위의 표의 작성은 위와 같은 방법으로 항상 만들어짐을 알 수 있다. 즉,

㉠ ㉡
　 ㉢

에서

$$㉢ = ㉠ + (㉡\text{의 열의 위치값}; k \text{ 값}) \times ㉡$$

의 규칙이 있음을 알 수 있다.

[탐구문제] 자연수 2310은 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수를 구하여라. 단, 곱하는 순서는 무시한다.

· 벨 수(Bell number)

서로 다른 n 개의 구슬을 같은 모양의 k 개의 상자(상자의 구별이 없음)에 빈 상자를 허용하여 넣는 방법의 수를 알아보자. 즉, 서로 다른 n 개의 구슬을 k 개 이하의 그룹으로 나누는 방법의 수와 같다. 따라서 이 수 $B(n,k)$는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$B(n,k) = S(n,0) + S(n,1) + \cdots + S(n,k)$$

여기서, $k=n$인 경우의 수를 $B_n = B(n,n)$으로 나타내고, 이 수를 **벨 수**라고 부른다. 벨 수 B_n는 n 개의 원소를 가지는 집합 (n-집합)의 분할 수 또는 n-집합상에서의 동치관계의 수를 의미함을 알 수 있다[4].

예를 들어, $B_3=5$; 집합 $\{1,2,3\}$은 다음과 같은 5개의 분할을 가진다.

$$\{\{1,2,3\}\}$$
$$\{\{1\},\ \{2,3\}\}$$
$$\{\{2\},\ \{1,3\}\}$$
$$\{\{3\},\ \{1,2\}\}$$
$$\{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$$

4) 주어진 집합에서, 그 집합의 동치관계들의 모임과 분할들의 모임은 일대일 대응관계가 있다.

벨 수 B_n는 제2종 스털링 수의 <표 1>의 n 행의 성분들의 합임을 알 수 있다. 예를 들어, <표 1>로부터 $B_5=0+1+15+25+10+1=52$를 얻는다.

<표 2>는 자연수 n에 따른 벨 수를 나타내고 있다.

<표 2> 벨 수

n	B_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
⋮	⋮

[탐구문제] 자연수 2310은 1보다 큰 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수를 구하여라. 단, 곱하는 순서는 무시한다.

(2) 자연수의 분할

서로 같은 구슬 n 개를 k 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 알아보자. 이 분할 수를 $p(n,k)$로 나타낸다. 예를 들어, 서로 같은 구슬(●) 4개를 k 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 살펴보자:

- $k=1$일 때, {{●,●,●,●}}: 1 가지
- $k=2$일 때, {{●}, {●,●,●}}, {{●,●}, {●,●}}: 2 가지
- $k=3$일 때, {{●}, {●}, {●,●}}: 1 가지
- $k=4$일 때, {{●}, {●}, {●}, {●}}: 1 가지

가 됨을 알 수 있다. 즉, $p(4,1)=1$, $p(4,2)=2$, $p(4,3)=1$이고 $p(4,4)=1$을 얻는다.

위의 예와 같이 $p(n,k)$는 자연수 n을 k 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수와 같음을 알 수 있다. 예를 들어, $p(4,2)=2$; 자연수 4를 2개의 자연수의 합으로 나타내면

$$\begin{aligned} 4 &= 1+3 \\ &= 2+2 \end{aligned}$$

[탐구문제] 자연수 6을 세 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수를 구하여라. 단, 합하는 순서는 무시한다.

이제, 자연수의 분할 수 $p(n,k)$의 규칙성을 찾아보자.

(1) $k > n$인 경우: 서로 같은 n 개의 구슬을 k 개의 그룹으로 나눌 수 없다. 따라서 이 경우에는 $p(n,k)=0$를 얻는다.

(2) $k=1$인 경우: 서로 같은 n 개의 구슬을 1 개의 그룹으로 나누는 방법의 수는 1 이다. 따라서 $p(n,1)=1$을 얻는다.

(3) $n=k$인 경우: 서로 같은 n 개의 구슬을 $k(=n)$ 개의 그룹으로 나누는 방법의 수는 1 이다. 따라서 $p(n,n)=1$을 얻는다.

(4) $1 < k < n$ 인 정수 n, k에 대하여, $p(n,k)$는 n 개의 서로 같은 구슬을 k 개의 그룹으로 나누는 방법을 다음과 같이 생각해 보자.

각 그룹은 적어도 1 개 이상의 구슬을 가져야 함으로, 우선 각 그룹에 1개씩 분배하자.

이제, $n-k$개의 남은 구슬을 m $(m=1,2,\dots,k)$개의 그룹에 나누어주면 된다. 그 방법의 수는 $p(n-k,m)$이다. 따라서 다음의 점화식을 얻는다.

$$p(n,k)=p(n-k,1)+p(n-k,2)+\cdots+p(n-k,k)$$

성질 (1)~(4)를 이용하여 다음과 같은 표 <표 3>를 얻을 수 있다.

<표 3> 자연수의 분할 수

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	⋯
1	▮	▮	▮	▮	▮	0	⋯
2	○	○	○	○	0	0	⋯
3	■	■	■	0	0	0	⋯
4	●	●	1	1	0	0	⋯
5	$\boxed{1}$	2	2	1	1	0	⋯
⑥	$\boxed{1}$	●	■	②	▮	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

색칠한 부분의합

$1+0+0+0+0=1$

$1+1+0+0=2$

$1+1+1=3$

$1+2=3$

$1=1$

이제, n 개의 서로 같은 모양의 공을 같은 모양의 k 개의 상자(그룹)에 빈 상자를 허용하여 넣는 방법의 수 $p_k(n)$를 알아보자. 이는 서로 같은 공을 k 개 이하의 그룹으로 나누는 방법의 수와 같다. 따라서

$$p_k(n) = p(n, 1) + p(n, 2) + \cdots + p(n, k)$$

를 얻는다.

주어진 자연수 n 을 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 $p(n)$이라고 하면, 이 수는 위의 식에서 $k=n$인 경우와 같음을 알 수 있고 <표 3>에서 제 n행의 합

$$p(n) = p_n(n) = p(n, 1) + p(n, 2) + \cdots + p(n, n)$$

과 같다. 예를 들어, 자연수 6을 몇 개의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수를 생각해보자.

$6=6$; 1 개의 자연수의 합: $p(6,1)=1$ 가지

$6=1+5=2+4=3+3$; 2 개의 자연수의 합: $p(6,2)=3$ 가지

$6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$; 1 개의 자연수의 합: $p(6,3)=3$ 가지

$6=1+1+1+3=1+1+2+2$; 1 개의 자연수의 합: $p(6,4)=2$ 가지

$6=1+1+1+1+2$; 1 개의 자연수의 합: $p(6,5)=1$ 가지

$6=1+1+1+1+1+1$; 1 개의 자연수의 합: $p(6,6)=1$ 가지

따라서 자연수 6을 몇 개의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}p(6) &= p(6,1)+p(6,2)+p(6,3)+p(6,4)+p(6,5)+p(6,6)\\ &= 1+3+3+2+1+1=11\end{aligned}$$

IV. 결 론

이산수학은 제 7차 수학과 중등 교육과정에 선택과목으로 도입되었다. 수학이란 학문의 속성상 학습은 연속성을 유지하여야만 학생들이 새로운 개념에 대한 인지적인 갈등을 적게 유발한다. 또한 창의성교육의 관점에서도 이산수학의 도입은 타당하다고 생각된다. 이산수학은 높은 수준의 수학적 센스를 요구하고 있기 때문이다. 이러한 관점에서, 초등학교 고학년이나 영재학생을 대상으로 이산수학의 기초적인 원리를 소개하였다.

參 考 文 獻

[1] 김수환, "고등학교 수학교육과정에서의 이산수학", 청람수학교육 제2집, 한국교원대학교 수학교육 연구소, 1992.

[2] 엄경애, "중학생을 대상으로한 이산수학의 소개 실험 연구", 이화여자대학교 석사학위 논문, 1992.

[3] 이도영, "초등학교 고학년에서 이산수학의 소개에 관한 기초 연구", 한국교원대학교 석사학위 논문, 1995.

[4] 이준열, "수학과 교육과정에서 이산수학의 역할", 수학교육 제30권, 제2호, 한국 수학교육학회지, 1992.

[5] 임은찬, "이산수학 문제해결과정에서 사용된 전략의 특징", 이화여자대학교

석사학위 논문, 1993.
[6] 한원규, "수학교육에 있어서 이산수학의 역할", 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1987.
[7] 한용수, "중등학교 수학과 교과과정에서 이산수학의 도입에 관한 연구", 한국교원대학교 석사학위 논문, 1992.
[8] R. A. Brualdi, "Introductory Combinatorics", Elsevier North-Holland, INC. 1977.
[9] P. J. Cameron, "Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms", Cambridge University Press, 1994.