科學教育, 12, 77~90, 1995
Journal of Science Education
12, 77~90, 1995

지수법칙의 지도에 관한 연구

이미복* · 양성호**

A Study on Teaching Laws of Exponents

Lee, Mi-Bok · Yang, Sung-Ho

Abstract

In this paper, we first define the logarithmic function $\log x$ as the area of the region bounded by x-axis, and the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $x \geq 1$, and the negative area of the region bounded by x-axis and the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $0 < x < 1$. We study properties of this function. Also we define the exponential function as the inverse function of the logarithmic function and investigate the laws of exponents.

Ⅰ. 서 론

현행 고등학교 1학년에서 학습되고 있는 지수함수와 로그함수 단원의 전개과정을 살펴 보면 먼저 지수함수를 정의하고 그의 역함수로써 로그함수를 도입하고 있다. 그런데 교과서에서 소개하고 있는 지수함수의 정의를 살펴 보면 "실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$를 a를 밑으로 하는 지수함수라 한다."라고 그 정의를 내리고 있다. 여기서 우리는 지수함수의 정의역이 실수 전체라는 부분에 주목해 볼 필요가 있다. 즉, "지수 x가 실수일 때

* 제주서중학교
** 제주대학교 사범대학 수학교육과

a^x는 어떤 의미를 갖는 수인가?"에 대한 의문이다. 그리고 지수함수의 선수학습으로써 중학교에서 지수의 용어 사용과 지수가 정수일 때 성립하는 간단한 지수법칙들을 소개하고 있고, 고등학교에서도 지수함수의 정의에 앞서 지수의 범위를 정수에서 유리수로, 유리수에서 실수로 확장시켜 그 때의 a^n의 뜻과 여러 가지 지수법칙들을 소개하고 있다. 그런데 지수를 유리수에서 실수로 확장시킬 때 즉, x가 실수일 때 a^x의 뜻을 직관적으로 인정하게 하여 학습시킴으로써 학습자로 하여금 학습의 진행에 부자연스러움을 주고 있다고 여겨진다. 예를 들어, x가 $0, 3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$일 때 2^x의 값은 각각 $2^0 = 1$, $2^3 = 8$, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$가 되는 것은 이해가 되어도 x가 $\sqrt{2}$, 즉 $2^{\sqrt{2}}$는 무엇을 의미하는 것이며 "과연 그런 수가 있을까?"라는 의문을 갖게 된다. "만일 있다면 이것은 무리수인가? 유리수인가?"에 대하여 학습자들에게 이해시킬 수 있는 설명은 현행 고등학교 수학교과서의 구성을 가지고서는 할 수가 없다. 결국 학습자들은 $2^{\sqrt{2}}$가 무엇인가에 대하여 확실하게 이해하지도 못하면서 $y = 2^x$ (x는 실수)라는 지수함수를 공부하였고, 또 이것의 역함수를 정의하였으니 논리적으로 볼 때 이론의 전개에 결함이 있음을 알 수 있다.

따라서, 본 논문에서는 지수함수를 현재 고등학교 수학 교과서에서 소개되어진 것과는 다른 방향에서 지도할 수 있는 방법들을 살펴 보고 그 지도 방법에 따른 고등학교 교과서의 구성을 재검토하여 보다 효과적인 지수함수와 로그함수의 학습 방법을 모색해 보고자 한다.

Ⅱ. 현행 교과과정의 체계와 분석

지수법칙, 지수함수, 로그함수와 관련된 중,고등학교 수학교과의 구성은 다음 표와 같다.

중학교의 교재는 유리수의 사칙연산, 대소관계, 거듭제곱, 지수, 지수법칙, 무리수의 순으로 구성되고 있고 거듭제곱의 지수는 정수 범위에 한정시켜 간단한 지수법칙만을 다루고 있다. 고등학교의 교재에서는 지수가 양의 정수로부터 유리수까지 확장해서 지수법칙을 다루고 있고, 특히 지수가 유리수로부터 실수로 확장할 때 수열 단원 전에 유리수의 지수들이 가까워지는 값으로 (예를 들어,

중 학 교			고 등 학 교	
1 학 년	2 학년	3 학년	일 반 수 학 I	수 학 I
I. 집합과 자연수 1)기수법 · 거듭제곱의 뜻 · 지수의 뜻 II. 정수와 유리수	I. 수와 연산 ·지수법칙 (지수:정수)	I. 수와 연산 1) 무리수 · 제곱근	V. 함 수 VI. 지수함수와 로그함수 1) 지수함수 ·거듭제곱과 거듭제곱근 · 지수의 확장 · 지수함수 2) 로그함수 · 로그함수의 성질	1. 수 열 2. 극 한 3. 미 분 4. 적 분

$2^{\sqrt{2}}$는 $2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \cdots$처럼 유리수 r이 한없이 $\sqrt{2}$에 가까운 값을 취할 때, 2^r이 한없이 가까워지는 값을 $2^{\sqrt{2}}$로 정의하였다.) 간략히 소개한 후 지수가 유리수일 때와 마찬가지로 지수가 실수일 때에 지수법칙이 성립한다고 서술하고 있다. 또한, 지수함수 $y = a^x(a > 1)$의 예로써 $y = 2^x$에 대하여 함수값이 간단하게 계산되어지는 수치만을 이용하여 대응표를 만들고 이의 그래프를 그리고 있다. 작성한 대응표상에 있지 않은 x에 대하여 2^x의 값이 정해져서 그래프는 연속적으로 이어진 연속 곡선이 된다고 말하고 있다.

지수의 범위를 자연수에서 정수로, 다시 정수에서 유리수로 확장할 때 그 원리는 지수법칙이 보존되게 확장되었다. 지수의 정의를 유리수에서 실수로 확장하는 데에는 지수법칙의 형식이 보존된다는 원칙 이외에 연속성이 보존되도록 해야 한다. 이를 테면, 실수의 연속성에 의해서 무리수 x는 유리수로 된 수열 $\{x_n\}$의 극한값이 된다. 이 때 $a^{x_1}, a^{x_2}, \cdots, a^{x_n}, \cdots$ 의 극한값으로 a^x을 정의한다. 이 정의의 타당성은 무리수 x에 수렴하는 어떤 수열을 택해도 $\{a^{x_n}\}$의 극한은 일정하다는 것이다.

지수함수 $y = a^x(a > 0,\ a \neq 1)$은 정의역이 실수의 집합, 치역이 양의 실수 집합인 단사함수이므로 이 역의 대응으로 로그함수를 도입하고 그 성질을 조사하고 있다. 지수에서 지수함수, 로그함수까지의 이론을 전개하는 데에 실수의 연속개념, 실수 상에서 유리수의 조밀성의 성질, 수열단원 전에 "한없이 가까워지는 값"의 표현 등의 이론에 대하여 미묘하게 다루고 있어 학습자가 이들 개념이나 성질을 이해하는 데 많은 어려움이 따르고 있는 실정이다.

Ⅲ. 로그 함수

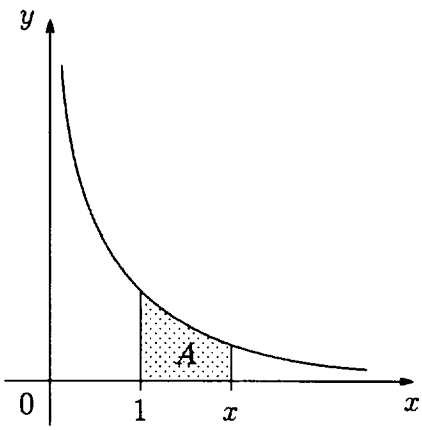
정의역을 양의 실수로 하고, 공역을 모든 실수로 하면서

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ 이고 } f(1) = 0$$

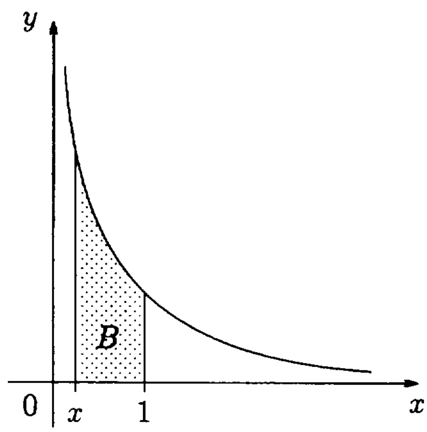
을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 생각 해보자. 과연 그러한 함수가 존재할 것인가?

함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하여 보자.

즉, 함수 $f(x)$를 $x > 1$ 일 때에는 1과 x사이의 구간에서 곡선 $\frac{1}{x}$ 과 x축과의 면적으로, $0 < x < 1$ 일 때에는 x부터 1까지의 구간의 면적에 -1를 곱한 값으로 정의한다. 다음 그림의 점선 표시된 부분은 $x > 1$ 일 때와 $0 < x < 1$일 때의 $f(x)$ 값을 나타낸다.



$f(x) = A$ 의 면적



$f(x) = -(B$ 의 면적$)$

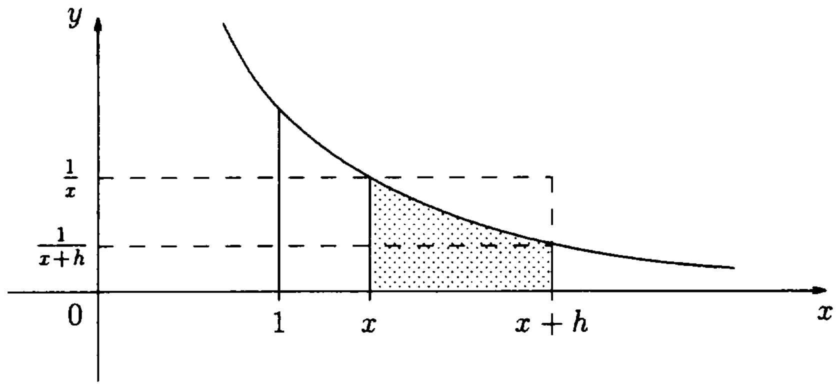
특히, 이 정의에 따르면 $f(1) = 0$ 이 됨을 알 수 있고, 또한 이 함수 $f(x)$ 는 다음 정리를 만족한다.

정리1 함수 $f(x)$ 는 미분 가능하고 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

증명 정의에 의하여 $f(x)$ 의 도함수를 구하여 보자.

즉, 평균 변화율 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 이 h가 0에 가까워짐에 따라 $\dfrac{1}{x}$ 에 접근함을 보이면 된다.



먼저 $h > 0$ 인 경우, $f(x+h)-f(x)$ 는 위 그림의 점선 표시된 부분의 면적이므로 다음과 같은 부등식이 만족된다.

$$\frac{h}{x+h} < f(x+h)-f(x) < \frac{h}{x}$$

부등식의 양변을 양수 h로 나누면

$$\frac{1}{x+h} < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{1}{x}$$

이다. h가 0에 가까워짐에 따라 $\dfrac{1}{x+h}$ 은 $\dfrac{1}{x}$ 에 가까워진다. 따라서,

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

이다. 마찬가지로 $h < 0$ 인 경우도 위와 비슷하게 극한값이 $\dfrac{1}{x}$임을 구할 수 있다. 따라서, $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$ 이다. ■

위에서 $x>0$ 일 때 곡선 $\frac{1}{x}$ 과 x축과의 면적으로 정의한 함수 $f(x)$ 는 $x>0$ 일 때 정의되는 함수로서 $f(1)=0$과 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 을 만족함을 알 수 있다. 이제, 우리는 이 함수 $f(x)$ 가 유일하게 존재하는지에 대해서도 살펴볼 필요가 있다. 만일 함수 $g(x)$ 가 모든 양의 실수에서 정의되고 $g'(x)=\frac{1}{x}$이고 $g(1)=0$ 인 함수라면, 그 때 이 함수는 $f(x)$와 상수 c 만큼의 차이가 있다. 즉, 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)+c$ 이다. 만일 $x=1$ 이라면, $g(1)=f(x)+c=0+c=c$ 이다. 그런데 $g(1)=0$ 이므로 $c=0$ 이 된다. 따라서, $g(x)=f(x)$이다. 이것은 $x>0$인 범위에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 이고 $f(1)=0$ 을 만족하는 함수가 유일하게 존재한다는 것을 보여준다.

지금까지 $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ 이고 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(1)=0$ 인 함수는 앞에서 처럼 면적을 이용하여 정의하였을 때 유일하게 존재하는 함수임을 보여 주었다. 이제 이 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 표기하기로 하자.

$$f(x)=\log x.$$

이러한 log 함수는 다음과 같은 성질들을 만족한다.

정리2 함수 $\log x$ 는 단조증가한다.

증명 $\log x$의 도함수는 $\frac{1}{x}$ 이고 이 값은 $x>0$ 범위에서 양이다. 따라서 $\log x$ 는 단조증가 함수이다. ■

정리3 모든 $a,b>0$에 대하여 $\log ab=\log a+\log b$ 이다.

증명 모든 $x>0$ 에 대하여 정의된 함수 $g(x)=\log ax$ 의 도함수는 $\frac{dg(x)}{dx}=\frac{d\log ax}{dx}=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}$ 이므로 $\log ax=\log x+c$ (c는 상수) 이다. 이 식은 모든 $x>0$ 에 대하여 성립하므로 $x=1$ 을 택하면 $\log a=c$ 이다. 즉, $\log ax=\log a+\log x$ 이다. 이제, $x=b$ 라 놓으면 $\log ab=\log a+\log b$ 가 되어 구하는 결론이 나온다. ■

정리4 n 이 정수이고 $a > 0$이면, $\log a^n = n \log a$ 이다.
증명 먼저 n 을 양의 정수라고 하자. 정리3에 의하여
$\log a^2 = \log a + \log a = 2\log a$,
$\log a^3 = \log a^2 + \log a = 2\log a + \log a = 3\log a$ 이다.
귀납법을 쓰기 위하여, $\log a^{n-1} = (n-1)\log a$ 를 가정하면

$$\begin{aligned}\log a^n &= \log a^{n-1} + \log a \\ &= (n-1)\log a + \log a \\ &= n\log a\end{aligned}$$

다음으로 n 이 음의 정수라면, $n = -m$ (m은 양의 정수)라 놓자.
$0 = \log 1 = \log a^m a^{-m} = \log a^m + \log a^{-m}$ 이므로 $\log a^{-m} = -\log a^m$ 이다.
즉, $\log a^n = \log a^{-m} = -\log a^m = -m\log a = n\log a$.
그리고, 특히 $n = 0$ 일 때 $\log a^n = \log a^0 = \log 1 = 0 = 0\log a$ 이므로
n 이 정수일 때 $\log a^n = n\log a$ 가 됨을 알 수 있다. ■

위의 정리에 따라서 다음 정리들은 쉽게 증명할 수 있을 것이다.
따름정리5 $a > 0$일 때, $\log \frac{1}{a} = -\log a$ 이다.
증명 $\frac{1}{a} = a^{-1}$이므로 위의 정리4에 의하여 $\log \frac{1}{a} = -\log a$ 이다. ■
따름정리6 $a, b > 0$일 때, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. 이다
증명 정리3과 따름정리5에 의하여

$$\begin{aligned}\log \frac{a}{b} &= \log a \cdot \frac{1}{b} = \log a + \log \frac{1}{b} \\ &= \log a + \log b^{-1} = \log a - \log b \text{ 가 된다. } \blacksquare\end{aligned}$$

이제 위의 모든 성질들을 만족하는 함수 $y = \log x$의 그래프에 대하여 생각해 보도록 한다.
$y = \log x$의 기울기는 $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} > 0$ 이므로, $y = \log x$의 그래프는 증가함수가 되어 왼편에서 오른편으로 올라간다. 그 함수는 연속이므로, $\log x$도 연속이고 곡선은 연속적으로 변하는 접선을 갖는다. $\frac{d^2\log x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$ 은 항상 음이므로

곡선 $y = \log x$는 어디서나 위로 볼록하다. $\log 1 = 0$이므로 곡선은 점(1,0)을 지난다. 이 점에서 기울기는 1이므로 곡선은 x축과 $45°$각을 이루게 된다. 예를 들어, $\log 2$값을 살펴볼 때 이것은 [1,2]에서 $\frac{1}{x}$곡선이 이루는 면적이다. 이 면적에 내접 또는 외접하는 사각형을 생각해 볼 때 $0.5 < \log 2 < 1.0$ 임을 알 수 있는 데 실제로 사다리꼴공식을 이용하여 좀 더 정확히 계산해 보면 $\log 2 \approx 0.69315$가 된다. 위의 증명된 정리들을 이용하여 다음 값들을 계산해 보면,

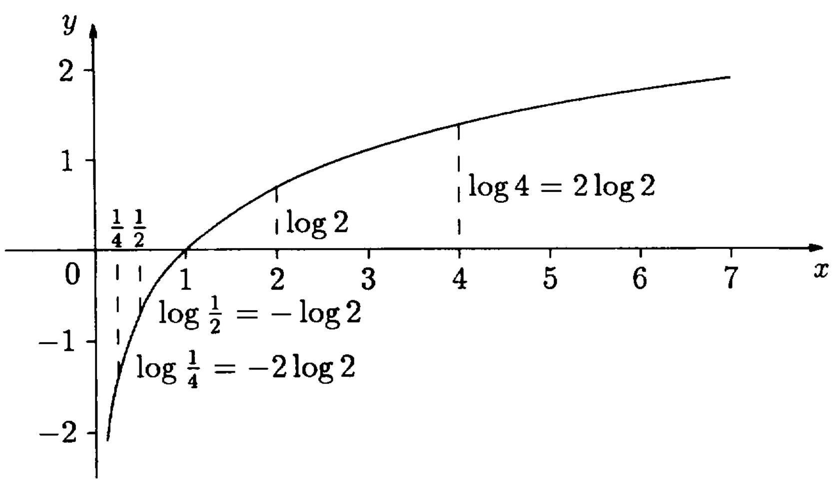
$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 \approx 1.38630,$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 \approx 2.07944,$$

$$\log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \approx -0.69315,$$

$$\log \frac{1}{4} = \log 2^{-2} = -2\log 2 \approx -1.38630$$

등을 얻을 수 있다. 더군다나, $\log 2^n = n \log 2$는 n값이 양으로 커져감에 따라 그 값도 점점 커져간다. 따라서, $x \to +\infty$일 때 $\log x \to +\infty$이고, 한편 x가 $+0$에 가까이 가면 $\frac{1}{x}$은 $+\infty$로 커지므로 $x \to +0$일 때 $\log x = -\log \frac{1}{x} \to -\infty$임을 알 수 있다. 그러므로, 함수 $\log x$ 의 치역은 실수 전체가 된다. 이제 이 값들을 좌표 평면 위에 도시하여 연속적인 곡선으로 연결하면 다음과 같은 그래프를 얻을 수 있다.

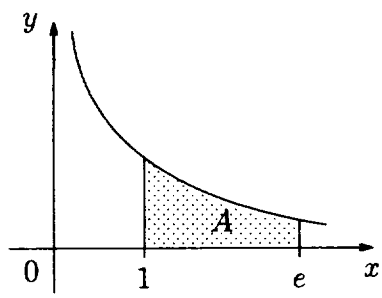


Ⅳ. 지수 함수

앞 장에서 정의한 함수 $\log x$는 양의 실수를 정의역으로 하는 증가함수이고 실수 전체가 치역이므로 역함수가 존재한다. 우리는 이 역함수를 기호 exp로 표시하기로 한다. log함수는 모든 실수를 함수 값으로 취하므로 exp는 실수 전체에서 정의되는 함수이다. 특히, $\log 1 = 0$이므로 $\exp(0) = 1$이 된다.

정의　$\exp(1) = e.$

즉, 이것은 1과 x사이의 구간에서 곡선 $\frac{1}{x}$과 x축과의 면적이 1이 되는 x축 상의 값을 e라고 한다는 뜻이다. 따라서, $e > 1$ 임을 알 수 있다.



A 의 면적 $= 1$

함수 exp는 다음과 같은 성질을 갖는다.

정리7　z와 w가 실수일 때, $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$이다.

증명　$a = \exp(z),\ b = \exp(w)$라 하면 $z = \log a,\ w = \log b$이다.
그리고 $z + w = \log a + \log b = \log ab$가 됨을 앞장의 정리에서 이미 밝혔다.
그리고 역함수의 정의에 따라 $\log ab = z + w$는 $\exp(z + w) = ab$가 된다.
따라서 $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$이다. ■

이 정리를 이용하면 다음 성질은 쉽게 증명이 된다.

정리8　r이 유리수일 때, $\exp(r) = \{\exp(1)\}^r$이 된다.

증명　먼저, r이 자연수일 때는 정리7에 의하여
$\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1)\exp(1) = \{\exp(1)\}^2$이고
$\exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2)\exp(1) = \{\exp(1)\}^2\exp(1) = \{\exp(1)\}^3$이다.
만일, $\exp(r - 1) = \{\exp(1)\}^{r-1}$라고 가정하면 귀납법에 의하여
$\exp(r) = \exp(r - 1 + 1) = \exp(r - 1)\exp(1) = \{\exp(1)\}^r$임을 밝힐 수 있다.

만일 r이 음의 정수라면, $r=-m$ (m은 양의 정수)라 놓을 때
$1=\exp(0)=\exp(r+m)=\exp(r)\exp(m)$ 이다. 따라서,
$\exp(r)=\dfrac{1}{\exp(m)}=\dfrac{1}{\{\exp(1)\}^m}=\{\exp(1)\}^{-m}=\{\exp(1)\}^r$이다.
또한, $r=\dfrac{1}{m}$ (m은 양의 정수) 라고 하면,

$$\begin{aligned}\{\exp(r)\}^m &= \{\exp(\frac{1}{m})\}^m = \exp(\frac{1}{m})\exp(\frac{1}{m})\cdots\exp(\frac{1}{m})\\ &= \exp(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}) = \exp(m\cdot\frac{1}{m}) = \exp(1).\end{aligned}$$

따라서, $\exp(r)=\{\exp(1)\}^{\frac{1}{m}}=\{\exp(1)\}^r$ 이다. 그러므로 r이 유리수일 때도 $\exp(r)=\{\exp(1)\}^r$ 이 된다. ■

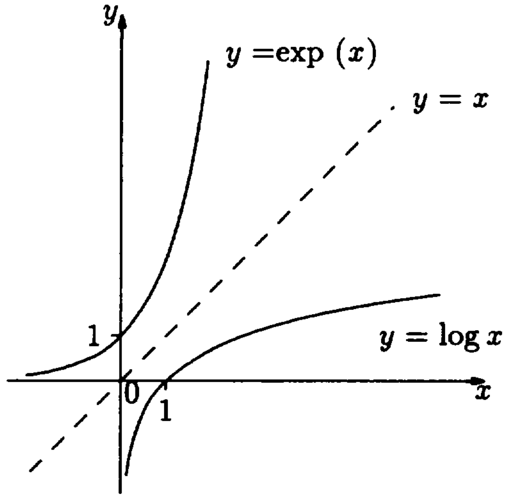
한편, $\exp(1)=e$ 이므로 $\exp(r)=e^r$ (r 은 유리수)로도 나타낼 수 있으며 함수 exp 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

정리9 함수 exp는 미분가능하고 $\dfrac{d\exp(x)}{dx}=\exp(x)$ 이다.

증명 역함수의 미분정리에 의하여 함수 $\exp(x)$ 는 미분가능하다.
만일 $y=\exp(x)$ 즉. $x=\log y$ 라면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 이므로

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\log y}{dy}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\exp(x)}$ 이다. 따라서, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}=\exp(x)$ 이다. ■

곡선 $y=\exp(x)$ 는 함수 $y=\exp(x)$ 가 증가함수이고 $\exp(1)=e>1$ 이므로 $\exp(n)$은 n이 커짐에 따라 점점 커진다. 또한, $\dfrac{d^2\exp(x)}{dx^2}=\exp(x)>0$ 이므로 그 곡선은 아래로 볼록하다. 따라서, $\exp(x)$의 그래프를 도시하면 다음과 같다.



이 그래프는 $y = \log x$의 그래프와 $y = x$에 대하여 대칭이 되고 있음을 확인할 수 있다.

V. 일반적인 지수함수와 지수법칙

우리는 앞에서 2^x 을 정의하는 데 어려움이 있다는 것을 지적하였는 데 다음과 같은 정의를 사용한다면 학습자들이 이해하는데 어려움은 없을 것이다.

a를 양수, x를 실수라면 이때 a^x를 다음과 같이 정의 한다.

$$a^x = \exp(x \log a).$$

예를 들면 $2^x = \exp(x \log 2)$, $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \log 2)$ 이다.

a^x 를 위와 같이 정의할 때, n이 양의 정수이면 a^n 은 a를 n 번 곱한 것과 같다는 것을 다음에서 알 수 있다.

$$\begin{aligned} a^n &= \exp(n \log a) \\ &= \exp(\log a + \log a + \cdots + \log a) \\ &= \exp(\log a) \times \exp(\log a) \times \cdots \times \exp(\log a) \\ &= a \times a \times \cdots \times a. \end{aligned}$$

특히, $a^0 = \exp(0) = 1$ 이다. 이것은 일반적으로 x가 유리수일 때 a^x 는 우리가 이미 알고 있는 값과 일치한다는 것을 보여준다. 그리고 x가 실수일 때 $\log(\exp) = i_{\mathbb{R}}$ ($i_{\mathbb{R}}$ 은 항등함수이다.)이므로, $\log a^x = \log(\exp(x \log a)) = x \log a$ 임을 쉽게 알 수 있다.

다음 정리는 일반적인 지수함수 a^x 가 a의 값에 따라서 증가함수가 되기도 하고 감소함수가 되기도 한다는 것을 보여준다.

정리10 $a > 0$ 일 때 a^x 는 a 의 값에 따라서 다음과 같다.
$0 < a < 1$일 때 a^x 는 감소함수이고, $a > 1$ 일 때 a^x 는 증가함수이다.

증명 정의에 의하여, 모든 실수 x 에 대하여 $a^x = \exp(\log a)$이다. 그런데, $0 < a < 1$ 라면 $\log a^x$ 는 x값이 $+\infty$로 커짐에 따라 음으로 그 절대값이 점점 커진다. 즉,

$$\lim_{x \to +\infty} \log a^x = \lim_{x \to +\infty} x \log a = -\infty.$$

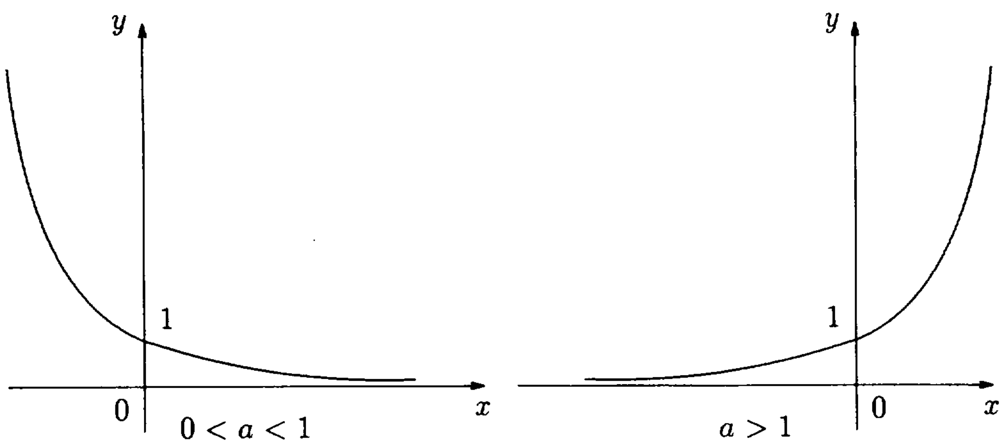
따라서, $\exp(x \log a)$ 는 $0 < a < 1$ 일 때 감소함수가 된다.
한편, $a > 1$일 때 $\log a^x = x \log a$이므로 x 값이 $+\infty$로 증가함에 따라 $\log a^x$도 점점 증가한다. 따라서, $a^x = \exp(x \log a)$는 증가함수이다. ■

정리11 지수함수 a^x의 도함수는 $a^x \log a$이다.

증명 $u = x \log a$라 놓으면 $\frac{du}{dx} = \log a$이고, $a^x = \exp(x \log a) = \exp(u)$ 이므로 $\frac{da^x}{dx} = \frac{d\exp(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \exp(u) \cdot \log a = a^x \log a$이다. ■

$$\frac{d^2 a^x}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx} a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \log a) = (\log a)^2 a^x > 0$$

이므로 곡선 $y = a^x$는 항상 아래로 볼록하다는 사실과 이상의 정리를 종합하여 곡선을 평면에 도시하면 다음과 같다.



일반적인 지수함수 $y = a^x$ 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

정리12 $a, b > 0$ 이고 r, s 가 실수일 때 다음의 지수법칙이 성립한다.

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$ (ii) $(a^r)^s = a^{rs}$

(iii) $(ab)^r = a^r b^r$ (iv) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$.

증명 위 성질들은 로그함수와 지수함수의 성질을 이용하여 증명할 수 있다.
(i) $a^r a^s = \exp(r \log a) \exp(s \log a) = \exp((r+s) \log a) = a^{r+s}$.
(ii) $(a^r)^s = \exp(s \log a^r) = \exp(rs \log a) = a^{rs}$.
(iii) $(ab)^r = \exp(r \log ab) = \exp(r \log a) \exp(r \log b) = a^r b^r$.
(iv) $(\frac{1}{b})^r \cdot b^r = (\frac{1}{b} \cdot b)^r = 1^r = 1$ 이므로 $(\frac{1}{b})^r = \frac{1}{b^r}$ 이다. 따라서 $(\frac{a}{b})^r = (a \cdot \frac{1}{b})^r = a^r \cdot \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$ 이다. ■

이상에서 처럼 지수함수 a^x는 x 가 실수일 때, 우리가 이미 알고 있는 지수 함수에 관한 여러 가지 성질이 모두 성립한다는 것을 알 수 있다.

정리13 c는 임의의 상수이고 $x > 0$일 때 $f(x) = x^c$로 정의된 함수는 미분가능하고 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{df(x)}{dx} = cx^{c-1}.$$

증명 정의에 의하여 $f(x) = x^c = \exp(c \log x)$ 이다. 만일, $u = c \log x$라 놓으면 $f(x) = \exp(c \log x) = \exp(u)$이고, $\frac{du}{dx} = c \cdot \frac{1}{x} = \frac{c}{x}$이다. 따라서, $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d \exp(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \exp(u) \cdot \frac{c}{x} = \exp(c \log x) \cdot \frac{c}{x} = x^c \cdot \frac{c}{x} = cx^{c-1}$이다. ■

VI. 결 론

본 연구의 이론 전개는 고등학교 교육 현장에서 학습자들에게 $y = 2^x$ (x는 실수) 를 이해시키는 방법으로써 현행 교과서에서 소개되어진 것과는 다른 방향에서 그 지도 방법을 제시하였다.

제 3장과 4장에서는 먼저 $x > 0$ 일 때 1과 x사이의 구간에서 곡선 $\frac{1}{x}$과 x축이 이루는 면적으로 함수 $\log x$ 를 정의하여, log 함수의 여러 가지 성질 등을 조사하였다. 이 함수는 연속이고 증가함수이므로 이의 역함수가 존재한다. 이의 역함수를 함수 exp 로 정의하여 여러 가지 성질 등을 살펴 보았다. 제 5장에서는 이 두 함수를 이용하여 $a > 0$ 일 때 일반지수함수 a^x 를 정의하였다. 이 지수함수는 x 가 유리수일 때는 우리가 이미 알고 있는 a^x 의 개념과 같다. x 가 임의의 실수라면 지수함수 a^x $(a > 0)$ 는 우리가 알고 있는 지수함수에 관한 여러 가지 성질들이 모두 성립된다.

이와 같은 이론 전개가 현행 교과서에서 소개된 방법보다 훨씬 학습자들에게 이해시키기 쉽다고 단정하지는 못하지만 미분개념이 이미 학습된 학습자라면 이 지도 방법을 적용해도 충분히 무리없이 학습이 이루어지리라 여겨진다. 끝으로 중,고등학교 교육과정 구성상 지수함수와 로그함수의 이론 전개는 이론의 체계와 중,고등학교 교육과정의 연계성, 학생의 수학능력 등의 여러 가지 요인을 고려하여 충분한 선행 연구 및 조사 실험 후에 이루어져야 된다고 판단된다.

참 고 문 헌

[1] 김용운 외, 미분적분학과 해석기하학, 청문각, 1983.
[2] 김정수 외, 미분적분, 이우출판사, 1985.
[3] 신동선 외, 대학일반수학, 선진문화사, 1987.
[4] 정영진, 고등학교 수학 I, 학연사, 1989.
[5] S. Lang, A First Course in Calculus, Addison-Wesley Pub. Co. 1968.