

단일 인접면을 갖는 성층화된 유체에서의 이중확산유동

이종문* · 홍남호** · 이동원*** · 현명택****

Double-Diffusive Convection in a Density Stratified Fluid with a Single Interface

Jong-Moon Lee*, Nam-Ho Hong**, Dong-Won Lee*** and Myung-Taek Hyun****

ABSTRACT

A two-layer, solutally-stratified system with a single interface in a square rectangle is simulated. As noted in previous studies, a unicell flow pattern appears in case of relatively lower buoyancy ratio, while global fluid motion does as layered flow pattern with two convective layers. The averaged Nusselt number develops as the same tendency with pure natural convection and convective effect retards as buoyancy ratio increases. There is no effect with Lewis number, but for $N \geq 0.7$ the convective effect is much more delayed in $Le=10$ than in $Le=100$ and 300 .

Key Words : Double-diffusive convection, Combined buoyancy, Flow pattern, Buoyancy ratio, Interface

기호설명

Ar	: 종횡비(=H/L)	L	: 밀폐용기의 폭[m]
C	: 무차원농도	Le	: Lewis수(=α/D)
ΔC	: 양단의 농도차[wt%]	N	: 부력비(= $\overline{\beta} \Delta C / \beta \Delta T$)
D	: 물질확산계수[m ² /s]	Nu	: 국소 Nusselt 수
g	: 중력가속도[m/s ²]	\overline{Nu}	: 평균 Nusselt 수
H	: 밀폐용기의 높이[m]	p	: 무차원압력
		Pr	: Prandtl 수(=ν/α)
		Ra _T	: 온도차에 의한 Rayleigh 수(=gβΔTH ³ /να)
		T	: 무차원온도
		ΔT	: 양단의 온도
		t	: 무차원 시간
		u, v	: x 및 y 방향 무차원 속도
		x, y	: 무차원 좌표

* 남녕고등학교
 Namnyung High School

** 서귀농업고등학교
 Seogwi Agricultural High School

*** 제주대학교 대학원
 Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

**** 제주대학교 기계공학과
 Dept. of Mechanical Eng., Cheju Nat'l Univ.

- α : 열확산계수[m²/s]
- $\frac{\beta}{\beta}$: 농도차에 의한 체적팽창계수[wt%⁻¹]
- β : 온도차에 의한 체적팽창계수 [°C⁻¹]
- ν : 동점성 계수[m²/s]

1. 서 론

이중확산유동(double-diffusive convection)은 열-소금 확산계 혹은 소금-설탕 확산계와 같이 확산율(diffusivity)이 다른 두 부력인자들의 복합부력에 의한 유동을 의미한다. 이중확산유동은 Ostrach⁽¹⁾가 지적한 것처럼 밀도의 각 구성인자와 중력의 방향에 따라 여러 가지 유형으로 나눌 수 있어 해석이 어렵다.

이 분야에 대한 초기 연구는 온도 및 농도구배가 중력과 같은 방향으로 가해지는 'salt-finger' 현상에 국한되었다. 1970년대에 이르러 한 부력인자가 중력과 수직방향으로 가해질 때의 유동현상에 관한 연구⁽²⁾⁻⁽⁷⁾가 수행되어 층을 이룬 유동형태가 존재함이 밝혀졌고, 최근 두 부력인자가 중력과 수직으로 작용할 때 밀폐용기내의 유동형태에 관한 연구가 발표되었다⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾. 근래 이중확산유동의 진동현상에 대해 연구^{(7),(9),(11)-(13)}가 진행되고 있으며 이러한 연구는 첨단산업체에서의 고순도 결정제조 기술의 개발에 일조할 것이다.

이중확산유동의 경우 어느 한 부력인자에 의한 자연대류와 달리 두 부력인자가 연관되어 있고 그들의 상관관계에 따라 유동형태가 달라질 뿐 아니라 온도와 농도 경계조건을 동시에 만족시켜야 하는 문제점 등으로 아직까지 그 현상이 제대로 구명되지 않고 있다. 본 논문에서는 정사각형 용기내에 하나의 인접면을 경계로 계단형태의 농도분포를 갖는 성층화된 용액에 수평방향 온도구배가 가해질 때 이중확산유동에 관해 수치해석하여 유동층의 생성 및 인접면의 변형과정을 조사하고자 하며 그에 따른 온도, 농도분포 및 열전달 특성을 수치적으로 연구하고자 한다.

II. 이론 해석

본 연구의 해석영역은 Fig.1과 같다. 유동은 x, y 평면의 2차원이며 수평, 수직방향 속도는 u, v 이고 밀폐용기의 폭은 L, 높이는 H이다.

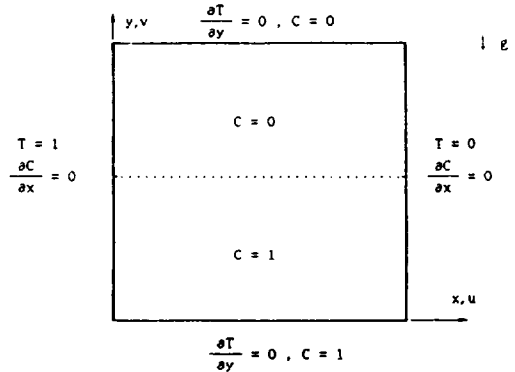


Fig. 1 Physical model of the present study

밀폐용기내의 유체는 소금물로 초기 및 경계 조건은 농도가 직각 밀폐용기의 가운데를 중심으로 농도가 다르고 수직, 수평 경계면은 각각 등은, 등농도이다. 기본방정식에서 부력항을 제외한 모든 물성치가 일정하다고 가정하고 길이, 시간, 속도, 온도와 농도를 각각 H, H²/α, α/H, ΔT 그리고 ΔC로 무차원화하면 기본방정식은 식(1)-식(5)가 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \text{Ra} \tau \text{Pr} (T - NC) \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \tag{5}$$

여기서 식(1)는 연속방정식이고, 식(2)와 (3)는 Boussinesq Approximation이 적용된 x, y 운동량방정식이다. 식(4)와 (5)은 각각 에너지 보존식과 물질보존식이다. 윗 식에서 N은 온도차에 의한 성층화된 농도에 의한 부력의 비를 나타내며 Ra_T 는 H를 대표길이로 하는 온도차에 의한 Rayleigh수, Pr와 Le는 각각 유체의 Prandtl수와 Lewis수를 나타낸다.

초기 및 경계조건은 농도가 직각 밀폐용기의 가운데를 중심으로 층이지고 수직, 수평경계면은 각각 등온, 등농도이며 각 벽면에서 점착조건(no-slip condition)을 만족해야 하므로 무차원화된 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= v(0, x, y) = 0 \\ T(0, x, y) &= 0.5 \\ C(0, x, y) &= 0 \quad (0.5 \leq y \leq 1) \\ &= 1 \quad (0 \leq y \leq 0.5) \end{aligned} \quad (6)$$

또한 경계조건은 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} u(t, 0, y) &= 0, u(t, x, 1) = 0 \\ v(t, 0, y) &= 0, v(t, x, 1) = 0 \\ T(t, 0, y) &= 1, C(t, x, 1) = 1 \\ &= 0, C(t, x, 1) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0,1} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0,1/Ar} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 Ar은 종횡비로 본 연구에서는 1이다.

차분화방정식은 식(1)-(5)을 시간에 대해서는 음함수방법(implicit method)으로, 공간에 대해서는 한 검사체적에 대해 적분하여 얻었으며, 압력과 온도 및 농도장에 대한 해는 주 격자점(main grid point)에서, 속도장에 대한 해는 이동된 격자점(staggered grid point)에서 해를 구하였다. 검사면에서의 유속은 Power-Law Scheme을 이용하였고 SIMPLE algorithm⁽¹⁴⁾을

사용하여 계산하였다.

수치해석에서의 격자수는 21×22 로 하였고 각 경계면 부근에서는 다른 격자점의 1/2로 격자를 구성하였다. 무차원시간 증분은 0.025이며, 운동량방정식의 이완계수는 0.3-0.45, 압력방정식은 0.5-0.65 그리고 온도, 농도장의 경우 0.7-0.85로 각각 취하였다.

III. 수치해석 결과 및 고찰

본 수치해석은 열-소금 확산계에 대한 연구로 해석영역은 $Ar=1.0$, $Pr=7.0$, $Le=10-300$, $Ra_T=1 \times 10^4 - 1 \times 10^6$ 그리고 $N=0-1.0$ 으로 무차원시간 $t=0-0.25$ 까지 계산을 수행하였다.

Fig. 2는 $Ra_T=1 \times 10^5$, $N=1.0(Le=100)$ 일 때 시간에 따른 유동형태의 변화과정을 도시하였다. Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이 초기에는 수직벽면에서의 전도에 의한 열전달로 용기내에 매우 약한 유동이 형성되나 시간이 경과할수록 수직 열경계면에서 밀폐용기 내부로 열전달량이 증가하여 Fig. 2(b)에서와 같이 2개의 셀 유동이 형성된다. 이후 대류현상은 더욱 활발해져서 최종적으로 완전히 성장한 2개의 셀형태의 유동이 형성됨을 알 수 있다(Fig. 2(f)). 이때 두셀의 경계면인 인접면은 저온벽으로 갈수록 저온벽이

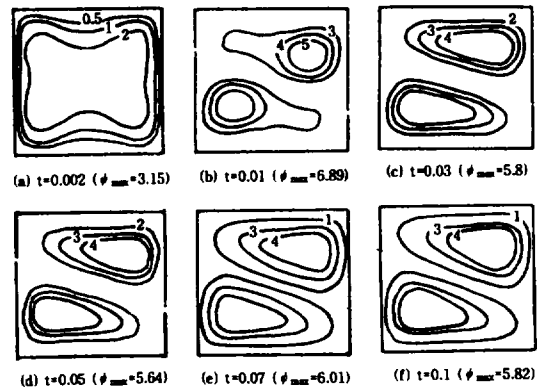


Fig. 2 Stream function isocontour maps with time for $Ra_T=1.0 \times 10^5$ and $N=1.0$ ($Le=100$)

영향으로 밀도가 증가하기 때문에 아래로 경사져 흐르고 고온벽으로 갈수록 주변의 뜨거운 유체로부터 열전달이 이루어지면서 밀도가 감소하여 위로 경사져 흐른다. 또한 각 셀의 유동은 고온벽이 밀폐용기 왼쪽에 존재하고 저온벽이 오른쪽에 존재하므로 모두 시계 방향으로 회전한다.

Fig. 3은 $Ra_T=1 \times 10^5$, $N=0.5$ ($Le=100$)인 경우로 준정상상태에서 단일셀 유동이 관찰되었다. Fig. 3(a)에서 보는 바와 같이 초기에는 2개의 유동층이 관찰되나 반대편 벽면까지 성장하지 못하고 양 벽면에서의 열전달이 충분히 이루어짐에 따라 부력효과의 증가로 셀(cell)사이의 인접면이 파괴되고 있음을 Fig. 3(c)에서 알 수 있다. 이후 단일셀 형태의 유동으로 정상상태에 도달하여 어느 한 부력인자만에 의한 자연대류와 같은 경향을 보임을 알 수 있다(Fig. 3(f)).

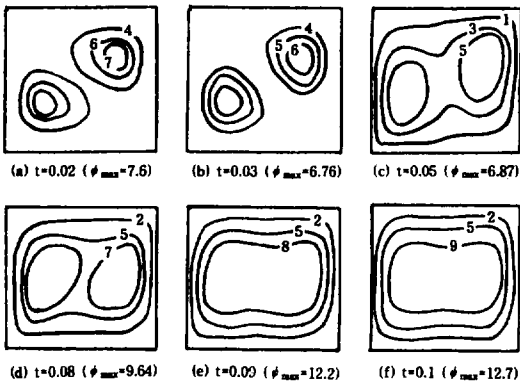


Fig. 3 Stream function isocontour maps with time for $Ra_T=1.0 \times 10^5$ and $N=0.5$ ($Le=100$)

위와 같은 2가지 유동형태에 대한 그 형성과정을 자세히 관찰하기 위하여 Fig. 4 와5에는 밀폐용기 중앙부에서 시간에 따른 수평방향 속도분포를 나타내었다. Fig. 4에서 살펴보면 처음 ($t=0.002$)에는 1개의 셀이 형성되나 시간이 지날수록 차츰 열전달량이 증가함에 따라 대류현상이 활발히 진행되어 시간 $t=0.006$ 에서 대류에의

한 2개의 셀이 형성되어 정상상태에 도달함을 알 수 있다. 그러나 $N=0.5$ 인 Fig. 5에서는 처음 ($t=0.02$)에는 2개의 셀이 형성되었다가 시간이 지날수록 부력효과의 증가로 셀사이의 인접면이 파괴되어 $t=0.05$ 에서 1개의 셀이 나타나 정상상태에 도달함을 알 수 있다.

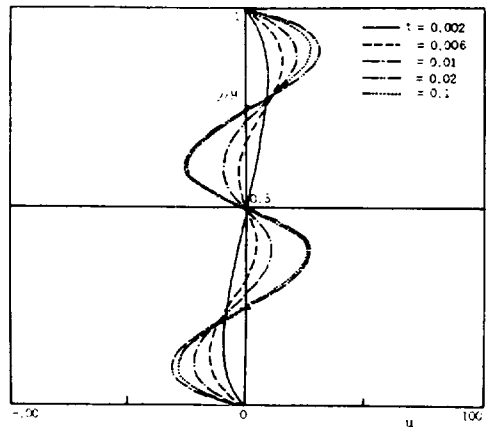


Fig. 4 Dimensionless horizontal velocity profiles at $x/L=0.5$ for $Ra_T=1.0 \times 10^5$ and $N=1.0$

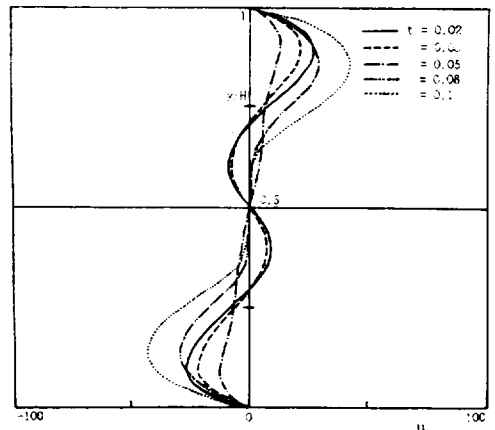


Fig. 5 Dimensionless horizontal velocity profiles at $x/L=0.5$ for $Ra_T=1.0 \times 10^5$ and $N=0.5$

본 연구에서 행한 연구범위에서는 $Ra_T=1 \times 10^6$ 인 경우 항상 ($0 \leq N \leq 1$) 단일셀이 관찰되었고, $Ra_T=1 \times 10^5$ 인 경우 $N=0.2, 0.5, 0.7$ 에서는 단일셀이 나타난 반면 $N=1.0$ 에서는 2개의 셀이 나

타났다. 한편 $Ra_T=1 \times 10^4$ 인 경우 $N=0.2, 0.5$ 에서 단일셀이 $N=0.7, 1.0$ 일 때는 2개의 층이 나타났다.

단일 인접면을 갖는 정사각형 용기내에서 복합부력에 의한 온도 및 농도분포의 특성을 조사하기 위하여 $Ra_T=1 \times 10^4, 1 \times 10^5, 1 \times 10^6$ ($Pr=7.0, Le=100, N=0.5$)일 때 준정상상태($t=0.1$)에서의 유동함수, 온도 및 농도장을 Fig. 6에 제시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 기하학적 형태 및 경계조건의 대칭으로 맘미암아 밀폐용기내의 유동함수, 온도장 및 농도장은 모두 점대칭으로 나타남을 알 수 있다. Fig. 6(a)에서 살펴보면 초기에는 전도에 의한 현상으로 온도가 거의 수직적으로 분포하고, 농도는 인접면에서 확산이 덜 이루어진다. 이러한 현상은 온도 및 농도의 확산률이 차 때문에 생기는 것으로 본 연구의 경우 $Le=100$ 이기 때문에 확산률이 큰 온도는

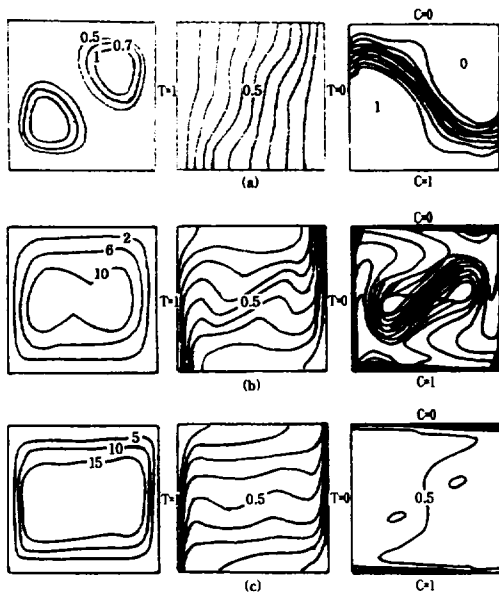


Fig. 6 Stream function, temperature and concentration isocontour maps for $N=0.5, Le=100$ and $t=0.1$; (a) $Ra_T=1.0 \times 10^4$ ($\psi_{max}=1.49$) (b) $Ra_T=1.0 \times 10^5$ ($\psi_{max}=12.7$), (c) $Ra_T=1.0 \times 10^6$ ($\psi_{max}=20.3$)

인접면에서 충분히 확산되지만 농도는 확산률이 작기 때문에 충분한 확산이 이루어지지 않아 급격한 변화를 보인다. $Ra_T=1 \times 10^5$ 인 경우(Fig. 6(b)), $Ra_T=1 \times 10^4$ 의 경우보다 대류에 의한 유동이 많이 일어나 셀 내부 온도가 거의 성층화되고 농도는 인접면에서 심하게 셀 내부로 확산되고 있다. Fig. 6(c)에서 살펴보면 온도변화는 주로 수직 열경계층내에서만 일어나며 코어(core) 영역의 수평방향으로는 거의 변화가 없고 수직방향으로는 안정되게 성층화되고, 농도는 빠른 셀유동으로 용기내부 전역에서 0.5로 균일하게 분포하며 농도변화는 수평물질 경계층에서만 나타남을 알 수 있다.

복합부력에 의한 열전달 특성을 조사하기 위해 Fig. 7에 $Ra_T=1 \times 10^6$ 의 경우에 있어서 부력비에 따른 평균 Nu수의 변화를 무차원 시간에 대하여 나타내었다. 온도차만에 의한 자연대류의 경우($N=0$) 초기에는 밀폐용기내로의 열전달이 주로 전도에 의해 이루어지기 때문에 Nusselt수가 급격히 감소함을 알 수 있다. 그러나 시간이 경과하여 유체내로 열전달이 충분히 이루어짐에 따라 온도차에 의한 밀도변화로 밀폐용기에 유동이 유발되므로 평균 Nu수는 완만히 증가하기 시작하여 결국 정상상태의 값에 도달된다. 이중확산유동의 경우에 시간에 따른 평균 Nu수의 변화는 일반 자연대류($N=0$)와 같은 경향을 보이며 대류효과는 부력비가 증가할수록 늦게 나

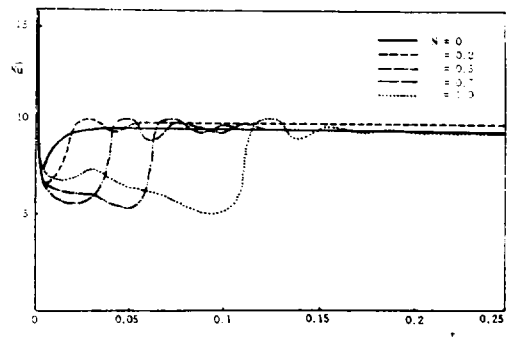


Fig. 7 Transient average Nusselt number for $Ra_T=1.0 \times 10^6$ and $N=0-1.0$ ($Le=100$)

타남을 알 수 있다. 이것은 부력비가 증가할 수록 농도차에 의한 부력이 증가하여 온도차에 의한 부력을 상쇄시키기 때문이다. 또한 단일셀 유동이 형성되는 경우 순수 온도차만에 의한 자연대류와 비슷한 값을 갖는다. 대략적으로 $Ra_T=1.0 \times 10^4$ 의 경우 $\overline{Nu}=2.3$, $Ra_T=1.0 \times 10^5$ 일 때 $\overline{Nu}=4.75$, 그리고 $Ra_T=1.0 \times 10^6$ 일 때 $\overline{Nu}=9.84$ 의 값을 보였다.

Fig. 8은 $Ra_T=1.0 \times 10^5$ 이고 $N=0.5$ 일 때 시간에 따른 국소 Nusselt수의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 8에서 고찰하면 초기에 밀폐용기에는 2개의 셀이 형성되나 $t=0.09$ 에서 인접면이 파괴되어 결국 2개의 셀이 단일셀 유동으로 바뀌고 있음을 알 수 있다.

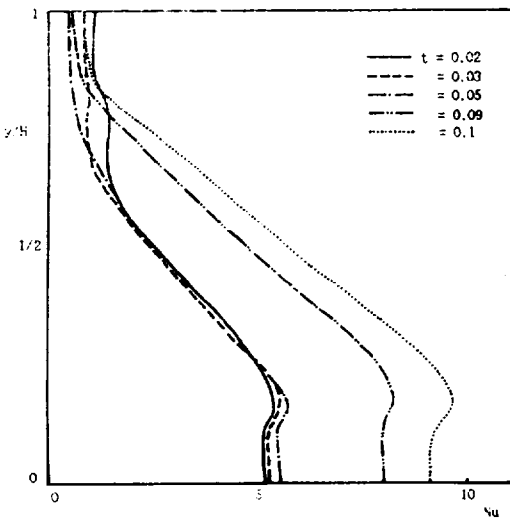


Fig. 8 Local Nusselt number with time for $Ra_T=1.0 \times 10^5$ and $N=0.5$

Lewis수의 변화에 따른 영향을 고려하기 위해 $Ra_T=1 \times 10^6$ 이고, 부력비가 0.5, 1.0일 때 Lewis수에 따른 평균 Nusselt수의 변화를 Fig. 9와 10에 도시하였다. $N=0.5$ 인 경우 평균 Nusselt수의 변화는 Lewis수에 관계없이 거의 비슷한 경향으로 나타나며 준정상상태에서의 평균 Nusselt수도 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

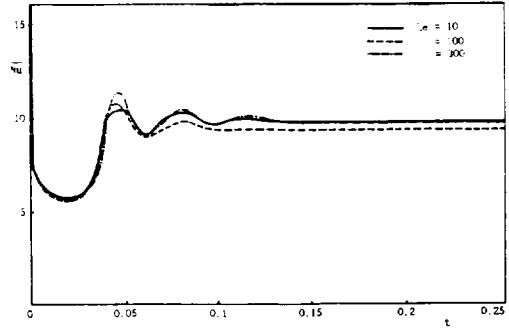


Fig. 9 Transient average Nusselt number for $Ra_T=1.0 \times 10^6$ and $N=0.5$

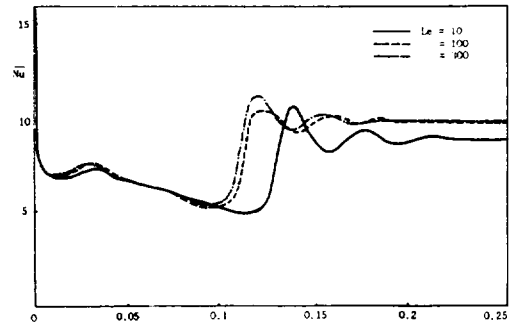


Fig. 10 Transient average Nusselt number for $Ra_T=1.0 \times 10^6$ and $N=1.0$

그러나 부력비 $N=1.0$ 인 Fig. 10에서는 $Le=100, 300$ 일 때 별 차이는 없지만 $Le=10$ 인 경우 대류 효과가 지연되는 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 경향은 본 연구 영역에서 부력비가 0.7이상인 경우 관찰되었다. $Le=10$ 인 경우 다른 경우에 비해 상대적으로 확산률이 작은 요소의 확산이 빠르게 일어나기 때문에 인접면에서의 확산이 크게 일어날 것이고 따라서 선형적으로 성층화된 효과를 주게되어 온도차에 의한 부력을 상쇄시키기 때문으로 생각된다.

IV. 결 론

하나의 인접면을 경계로 계단형태의 안정적 농도분포를 갖는 성층화된 용액에 수평방향 온도구배가 가해질 때 비정상 이중확산유동에 관

해 수치해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 유동형태의 형성과정은 밀폐용기 위·아래면에서 두개의 유동층이 생성되어 층을 이룬 유동형태가 되나 부력비가 작은 경우에는 인접면이 파괴되어 하나의 셀 유동으로 나타난다.
- 2개의 유동층이 형성되는 경우 인접면에서 확산물의 차 때문에 온도는 그다지 변하지 않으나 농도는 크게 변한다.
- 시간에 따른 평균 Nusselt수의 변화는 일반 자연대류($N=0$)와 같은 경향을 보이나 대류효과는 같은 Rayleigh수에서 부력비가 증가할수록 지연되어 나타난다.
- 부력비가 작은 경우 Lewis수에 따른 영향은 거의 없으나 부력비가 0.7 보다 큰 조건하에서는 $Le=100, 300$ 때 보다 $Le=10$ 일 때 대류효과가 훨씬 지연되는 경향을 보인다.

참 고 문 헌

1. Ostrach, S., 1980, Natural convection with combined driving forces, *PhysicoChemical Hydrodynamics*, Vol. 1, pp. 233-247.
2. Thorpe, S.A., Hutt, P.K. and Soulsby, R., 1969, The effect of horizontal gradients on thermohaline convection, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 38, pp.375-400.
3. Chen, C.F. Briggs, D.G. and Wirtz, R.A., 1971, Stability of thermal convection in a salinity gradient due to lateral heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 57-65.
4. Wirtz, R.A., Briggs, D.G. and Chen, C.F., 1972, Physical and numerical experiments on layered convection in a density stratified fluid, *Geophysical Fluid Dynamics* Vol. 3, pp. 265-288.
5. Bergman, T.L. and Ungan, A., 1988, A note on lateral heating in a double-diffusive system, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 194, pp.175-186.
6. Lee, J., Hyun, M.T. and Kang, Y.S., 1990, Confined natural convection due to lateral heating in a stably stratified solution, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp.869-875.
7. Hyun, M.T. and Bergman, T.L., 1995, Direct simulation of double-diffusive layered convection, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, pp.334-339.
8. Lee, J. and Hyun, M.T., 1988, Experiments on thermosolutal convection in a shallow rectangular enclosure, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 1, pp.259-265.
9. Jiang, H.D., Ostrach, S. and Kamotani, Y., 1988, Thermosolutal convection flow regimes with opposed buoyancy forces in shallow enclosures, *PhysicoChemical Hydrodynamics*, Vol. 10, pp.599-613.
10. Lee, J., Hyun, M.T. and Moh, J. H., 1990, Numerical heat transfer in a stably stratified solution due to side-wall heating, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 18, pp.343-355.
11. Jiang, H.D., Ostrach, S. and Kamotani, Y., 1991, Unsteady thermosolutal transport phenomena due to opposed buoyancy forces in shallow enclosures, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 135-140.
12. Beckermann, C., Fan, C. and Mihailovic, J., 1991, Numerical simulations of double-diffusive convection in a Hele-Shaw cell, *Video Journal of Engineering Research*, Vol. 1, pp. 71-82.
13. Chang, J. and Lin, T.F., 1993, Unsteady thermosolutal opposing convection of liquid-water mixture in a square cavity-II. Flow structure and fluctuation analysis, *Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 36 pp.1333-1345.
14. Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill, New York.