시각적 정의에 따른 삼각함수의 지도법

강 형 식*·강 승 필**

I. 서 론

1 연구의 필요성

고등학교 수학교육의 목표는 수학의 기본적인 지식을 바탕으로 사물의 현상을 논리적으로 사고하는 능력을 길러 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 하는데 있다.

Bloom은 학습효과를 높이기 위한 질이 높은 수업으로 "학습자로 하여금 학습과정에서 적극적으로 참여하게 해 주어야 하며, 수업과정에 적절한 강화가 사용되어야 한다."고 주장하고 있다. 이는 학습자의 능력에 알맞게 학습지도 자료를 재구성해야 하고 성취동기를 높일 수 있도록 해야 하며 적절한 시기에 행동의 변화에 대한 책임이 뒤따르 필요가 있음을 표현한 것이다.

수학교과에서 삼각함수란 단원은 타 단원보다 학업성취가 어렵고, 전반적으로 흥미가 낮은 편이어서 교과내용을 충분히 이해 못하는 학생은 누적결손현상이 생기고 있다. 학습누적결손을 최대한 줄이려면, 시각적으로 인지할 수 있는 삼각함수의 정의를 도입하여 삼각함수와 관계된 수학적 지식과 사고방법 등이 토지 측량이나 토목공사 등 우리의 실생활과 아주 밀접한 관련이 있다는 사실을 주지시켜 삼각함수에 대한 관심과 흥미를 느끼게 해야한다.

* 남녕고등학교 교사
** 제주대학교 교육과학연구소

따라서 고등학교 수학교과과정 중 공통수학에 포함된 삼각함수 내용의 중요성을 인식시키고 삼각함수의 기본개념, 원리, 법칙 등을 이해시킴과 아울러 삼각함수에 대한 흥미를 제고시키고, 합리적으로 문제해결을 할 수 있게 하는데 연구의 필요성이 있다.

2 연구의 목적 및 필요성

현행 교과서는 직각을 90등분하여 1°라고 정의하고 있다.([1]) 단위원의 중심각의 크기를 나타내는 실수로 일반각의 크기를 나타낼 수 있다. 역으로 어떤 실수에 대하여 그 실수의 크기에 따른 일반각이 정해진다. 그래서 학생들은 그 개념의 차이를 이해하는데 어려움을 느끼는 것이 사실이다.

이러한 사실을 바탕으로 삼각함수를 좀 더 쉽게 이해하도록 하고 문제해결능력을 기르며 학습지도 방법 개선을 위한 새로운 삼각함수의 교과과정을 작성하는데 참고할 수 있으며 각의 크기를 원호의 길이로 정의하여 삼각함수에 관한 내용을 보다 폭 넓게 이해시키고 적용할 수 있도록 삼각함수에 관한 내용을 분석, 검토하여 학생들의 보다 효율적인 학습지도와 학습에 대한 동기유발이 되도록 하는데 연구의 목적이 있다.

따라서 본 연구는 현행 고등학교 교과내용을 중심으로 시각적으로 인지할 수 있는 삼각함수의 정의를 도입하여 고찰하고자 한다. 각의 크기 및 종류를 정의하고 난 후 삼각함수를 시각적으로 정의하고 그 방법으로 정의된 삼각함수의 연속성 및 미분가능성을 고찰한다.

II 삼각함수의 시각적 정의 및 성질

1 각의 크기

정의 1 (각) 평면위의 한 점 O를 시점으로 하는 반직선 OP가 반직선 OX에서 회전하여 만들어지는 도형을 각이라 하고 $\angle XOP$로 나타낸다.

이 때 반직선 OX를 각의 시초선, 반직선 OP를 각의 동경, 점 O를 각의 꼭지점, 반직선 OX, OP를 각의 변이라고 한다.

동경 OP가 점 O의 둘레를 시계바늘이 돌아가는 방향과 반대인 방향으로 회전해서 생기는 각을 양의 각이라 하고 시계바늘이 돌아가는 방향과 같은 방향으로 회전해서 생기는 각을 음의각이라고 한다. (그림 1)

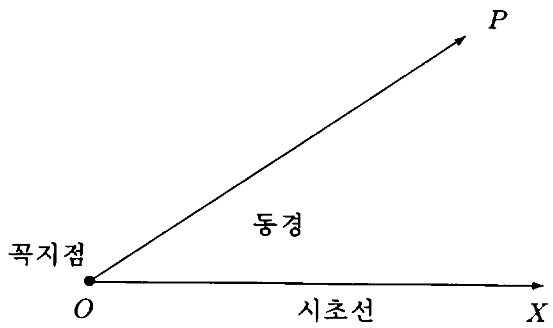

그림 1 각의 크기

예제 2 (양의 각과 음의 각)

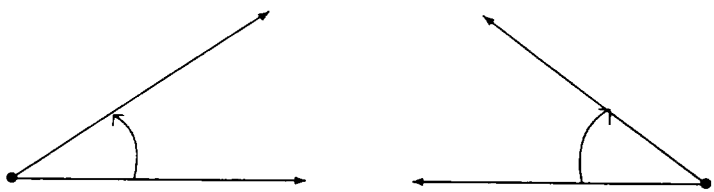

그림 2 양의 각과 음의 각

정의 3 (각의 크기) 중심이 O인 단위원에서 O를 꼭지점으로 하는 두 개의 반직선 OX, OP가 만드는 $\angle XOP$의 크기는 만약 $\angle XOP$가 양의 각이면 동경 OP가 원주상에서 지나간 호의 길이 x를 $\angle XOP$의 크기로 정

하고 만약 $\angle XOP$가 음의 각이면 동경 OP가 원주상에서 지나간 호의 길이가 x일 때 $-x$로 정의한다. (그림 3)

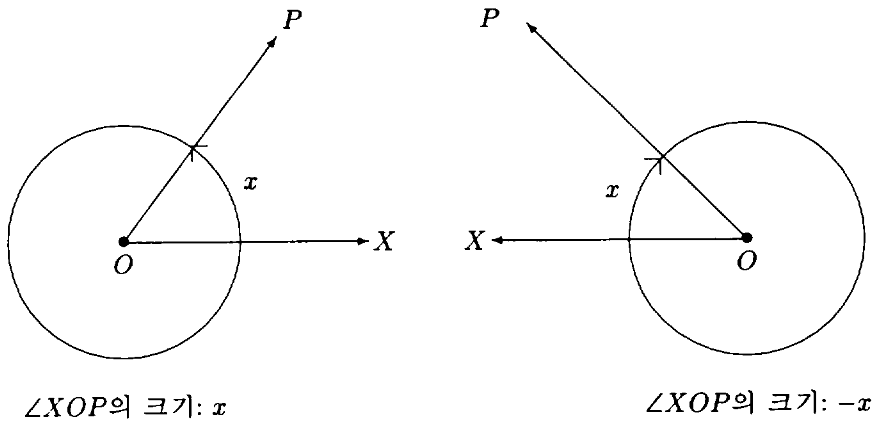

그림 3 각의 크기

III sine 함수, cosine 함수의 시각적 정의

정의 4 (sine 함수, cosine 함수)

(i) sine 함수는 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수로서 대응규칙은 다음과 같다. 정의역의 임의의 원소 t가 주어질 때 좌표평면에서 시초선 OX를 구하면 동경 OP가 단위원과 만나는 점의 y좌표를 t에 대한 sine 함수값이라고 정의하고 기호로 $\sin t$라 표시한다. (그림 4)

(ii) cosine 함수는 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수로서 대응규칙은 다음과 같다. 좌표평면에서 시초선 OX를 양의 x축이라 하고 각의 크기가 t인 $\angle XOP$를 구하면 동경 OP가 단위원과 만나는

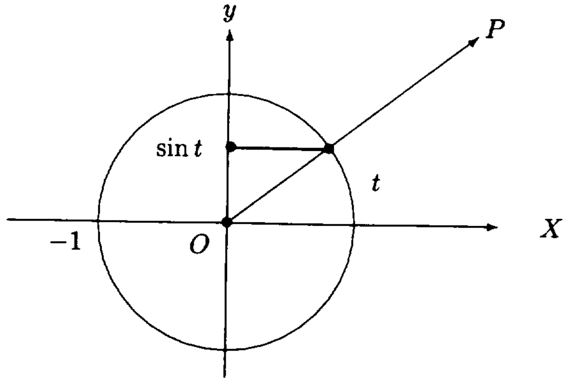

그림 4

점의 x좌표를 t에 대한 cosine 함수값이라 정의하고 기호로 $\cos t$라 표시한다. (그림 5)

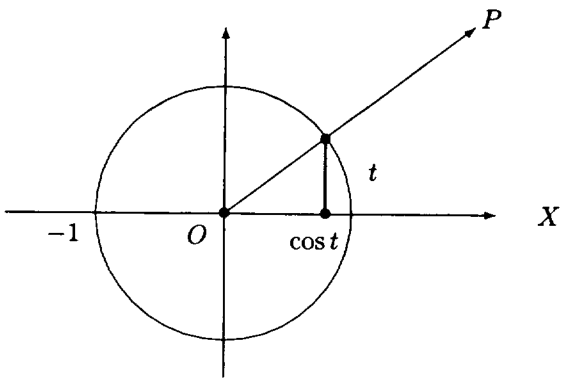

그림 5

예제 5 그림 6에서 다음을 알 수 있다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2},\quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

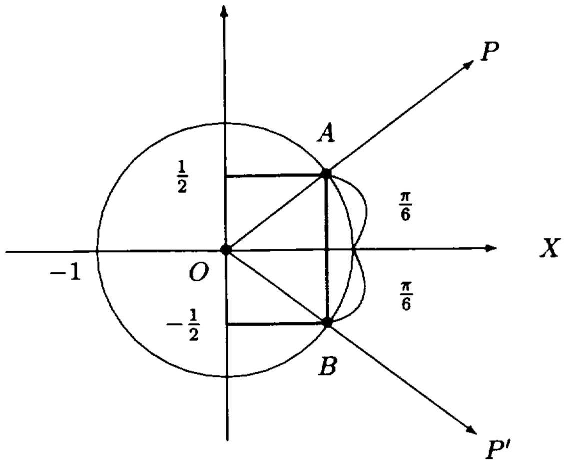

그림 6

그림 6에서 $\triangle OAB$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로 A의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$이고 B의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$이다. 따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

IV 삼각함수의 여러가지 성질-시각적 정의에 따른 고찰

정의 6 (tangent 함수, cotangent 함수, secant 함수, cosecant 함수) tangent 함수, cotangent 함수, secant 함수, cosecant 함수를 각 각

$\tan, \cot, \sec, \csc$로 나타내고

$$\begin{aligned}
\tan t &= \frac{\sin t}{\cos t} \ (\cos t \neq 0), \\
\cot t &= \frac{1}{\tan t} \ (\tan t \neq 0), \\
\sec t &= \frac{1}{\cos t} \ (\cos t \neq 0), \\
\csc t &= \frac{1}{\sin t} \ (\sin t \neq 0).
\end{aligned}$$

으로 정의한다.

정리 7 (삼각함수의 상호관계)

$$\begin{aligned}
\sin^2 t + \cos^2 t &= 1, \\
\sec^2 t - \tan^2 t &= 1, \\
\csc^2 t - \cot^2 t &= 1.
\end{aligned}$$

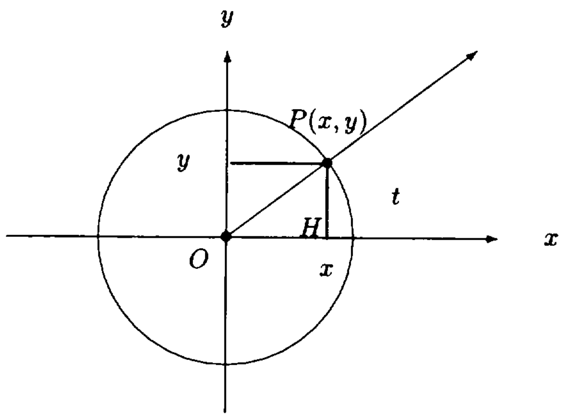

그림 7

증명. 그림 7과 같이 각의 크기 t로 정해지는 동경과 단위원과의 교점을

$P(x,y)$라 하면

$$\sin t = y, \ \cos t = x, \ \tan t = \frac{y}{x}.$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{OP}^2.$$

따라서

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

$1 + \tan^2 t = 1/\cos^2 t = \sec^2 t$이므로

$$\sec^2 t - \tan^2 t = 1.$$

$1 + \cos^2 t = 1/\sin^2 t = \csc^2 t$이므로

$$\csc^2 t - \cot^2 t = 1.$$

정리 8 (sine 법칙) *$\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$라 하면,*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

증명. $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$인 $\triangle ABC$에서 그림 8과 같이 좌표축을 정하고 중심이 A인 단위원과 변 AC가 만나는 점을 C_1, 점 C_1에서 x축에 수선 C_1H_1을 긋고 점 B를 중심으로 하는 단위원과 변 BC가 만나는 점을 C_2, 점 C_2에서 x축에 수선 C_2H_2를 내린다. 또 꼭지점 C에서 x축에 수선 CH를 내리면 $\triangle AH_1C_1 \backsim \triangle AHC$이므로 $1 : b = \cos A : \overline{AH} = \sin A : \overline{CH}$. 따라서

$$\overline{AH} = b\cos A, \ \ \overline{CH} = b\sin A.$$

$\triangle BH_2C_2 \backsim \triangle BHC$이므로 $1 : a = \cos B : \overline{BH} = \sin B : \overline{CH}$. 따라서

$$\overline{BH} = a\cos B, \ \ \overline{CH} = a\sin B.$$

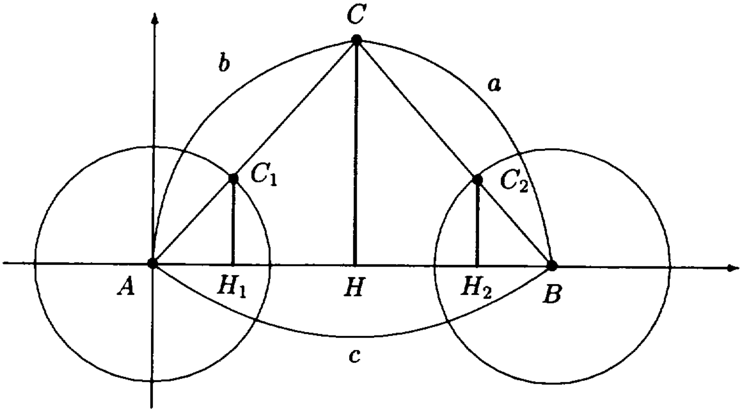

그림 8

여기서 꼭지점 C의 좌표를 구하면 Ax를 시초선으로 볼 때 변 AC은 각 A를 나타내는 동경이므로

$$C(b\cos A, b\sin A) \tag{1}$$

한편 Bx를 시초선으로 볼 때 변 BC은 각 $\pi - B$를 나타내는 동경이므로

$$C(c - a\sin B, a\sin B) \tag{2}$$

식 (1), (2)에서 꼭지점 C의 y좌표를 비교하면

$$b\sin A = a\sin B$$

따라서

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

따라서

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

정리 9 (cosine 제 1법칙)

$$\begin{aligned} a &= c\cos B + b\cos C, \\ b &= c\cos A + a\cos C, \\ c &= a\cos B + b\cos A. \end{aligned}$$

증명. $\triangle ABC$의 꼭지점 C의 좌표를 다음과 같이 두 가지로 나타낼 수 있음을 알고 있다.

$$C(b\cos A, b\sin A) \quad C(c - a\cos B, a\sin B).$$

여기서 꼭지점 C의 x좌표를 비교하면

$$b\cos A = c - a\cos B$$

이므로

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

비슷한 방법으로

$$\begin{aligned} b &= c\cos A + a\cos C, \\ a &= c\cos B + b\cos C. \end{aligned}$$

정리 10 (cosine 제 2법칙)

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}$$

증명. 앞의 cosine 법칙에 차례로 a, b, c를 양변에 곱하면

$$a^2 = ab\cos C + ac\cos B \tag{3}$$

$$b^2 = bc\cos A + ba\cos C \tag{4}$$

$$c^2 = ca\cos B + cb\cos A \tag{5}$$

여기서 (3)-(4)-(5)하면

$$a^2 - b^2 - c^2 = 2bc\cos A.$$

즉

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

비슷한 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}$$

정리 11 *모든 정수 n에 대해 다음이 성립한다.*

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi + \theta) &= \sin\theta, \\ \cos(2n\pi + \theta) &= \cos\theta, \\ \tan(2n\pi + \theta) &= \tan\theta. \end{aligned}$$

증명. 모든 정수 n에 대하여 각의 크기가 $2n\pi + \theta$와 θ를 나타내는 동경은 일치하므로 주어진 관계식을 얻는다.

정리 12 *다음이 성립한다.*

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta, \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta, \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta. \end{aligned}$$

증명. 각의 크기가 θ와 $-\theta$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름 1인 원과의 교점을 각 각 $P(x, y), P'(x', y')$라 하면 점 P와 P'은 x축에 대하여 대칭이므로 $x' = x, y' = -y$. (그림 9)

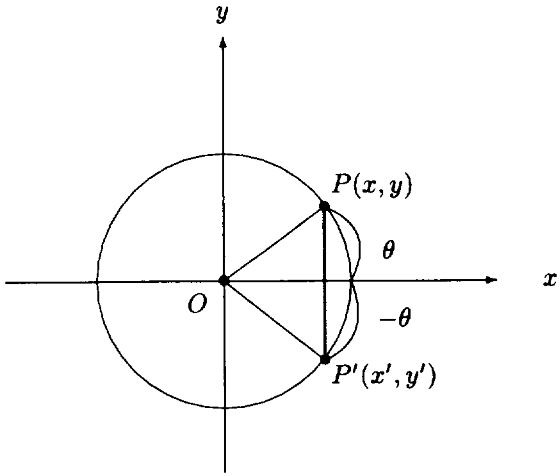

그림 9

따라서

$$
\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= y' = -y = -\sin\theta, \\
\cos(-\theta) &= x' = x = \cos\theta, \\
\tan(-\theta) &= \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta.
\end{aligned}
$$

정리 13

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi+\theta) &= -\sin\theta, \\
\cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta, \\
\tan(\pi+\theta) &= \tan\theta, \\
\sin(\pi-\theta) &= \sin\theta, \\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta, \\
\tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta.
\end{aligned}
$$

증명. 각의 크기가 θ와 $\pi+\theta$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로하

고 반지름 1인 원과의 교점을 각 각 $P(x,y), P'(x',y')$이라 하면 점 P와 P'은 원점에 대하여 대칭이다. (그림 10)

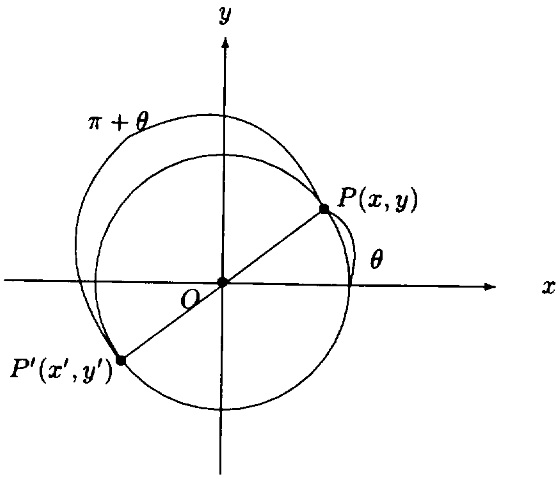

그림 10

$x' = -x, y' = -y$이므로

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\theta) &= y' = -y = -\sin\theta, \\ \cos(\pi+\theta) &= x' = -x = -\cos\theta, \\ \tan(\pi+\theta) &= \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \tan\theta. \end{aligned}$$

위 관계식에서 θ대신에 $-\theta$를 대입하여 각의 크기가 $\pi-\theta$인 삼각함수를 각의 크기가 θ인 삼각함수로 나타내면

$$\begin{aligned} \sin(\pi-\theta) &= \sin\theta, \\ \cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta, \\ \tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta. \end{aligned}$$

정리 14 ($\pi/2+\theta$의 삼각함수)

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/2-\theta) &= \cos\theta, \\
\cos(\pi/2-\theta) &= -\sin\theta, \\
\tan(\pi/2-\theta) &= \cot\theta.
\end{aligned}$$

증명. 각의 크기가 θ와 $\pi/2-\theta$로 나타내는 동경과 O를 중심으로 하고 반지름이 1인 원과의 교점을 각 각 $P(x,y), P'(x',y')$이라 하면 점 P와 P'은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (그림 11)

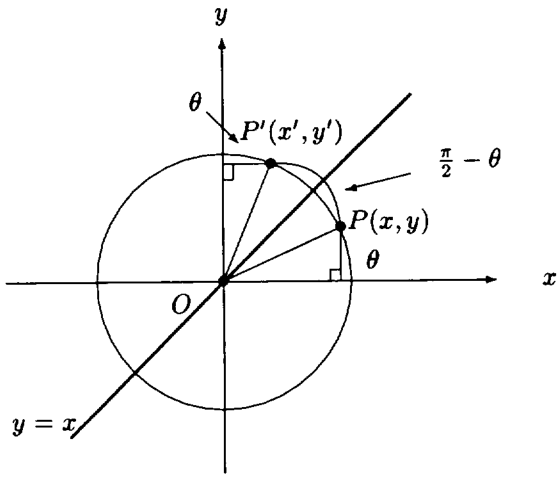

그림 11

따라서

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/2-\theta) &= y' = x = \cos\theta, \\
\cos(\pi/2-\theta) &= x' = y = \sin\theta, \\
\tan(\pi/2-\theta) &= \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta.
\end{aligned}$$

정리 15 (삼각함수의 덧셈정리)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \end{aligned}$$

증명. 좌표평면위에 중심이 O인 단위원과 x축과의 교점을 A라 하자. x축의 양의 부분을 시초선으로 하고 각의 크기가 α, β인 각을 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 P, Q라 한다. (그림 12)

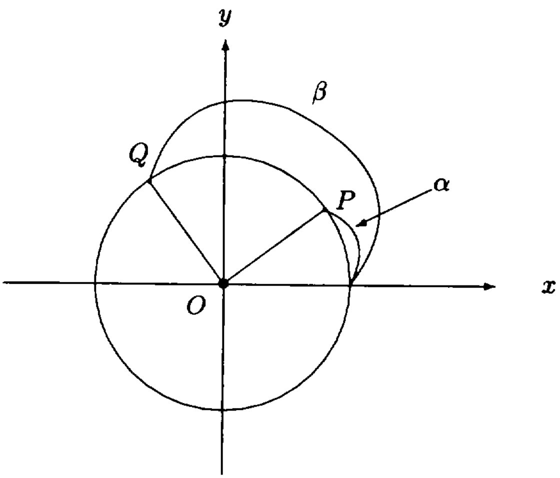

그림 12

이 때 P, Q의 좌표는 각 각

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha), \quad Q(\cos\beta, \sin\beta)$$

이고

$$\angle POQ = \beta - \alpha, \quad \overline{OP} = \overline{OQ} = 1.$$

$\triangle POQ$에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OPOQ}\cos(\angle POQ).$$

따라서 위 식을 전개하면

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos(\beta - \alpha).$$

위식을 전개하면

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

이 식에서 β대신 $-\beta$를 대입하면

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{6}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= -\cos\{(\pi/2 + \alpha) + \beta\} \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)과 (7)를 이용하면

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

따름정리 16 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha, \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha/2) &= \frac{1-\cos\alpha}{2}, \\
\cos^2(\alpha/2) &= \frac{1+\cos\alpha}{2}, \\
\tan^2(\alpha/2) &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}, \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}, \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}, \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2), \\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2), \\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2), \\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2).
\end{aligned}$$

증명. 정리 15을 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

V sine 함수와 cosine 함수의 연속성 및 미분가능성

1 sine 함수와 cosine 함수의 연속성

정의 17 함수 f가 $x=a$ 근방에서 정의되어 있을 때 임의의 양수 ε에 대해 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$이면 반드시

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

가 성립하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다. 그리고 $f(x)$가 실수의 어떤 개구간에서 정의되어 있고 그 개구간의 모든 점에서 연속이면 함수 $f(x)$를 그 개구간에서 연속이라 한다.

보조정리 18 *임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.*

$$|\sin x| \le |x|.$$

증명. 그림 13에서 $\triangle OAB$의 면적 $\le$ 부채꼴 OAB의 면적이므로

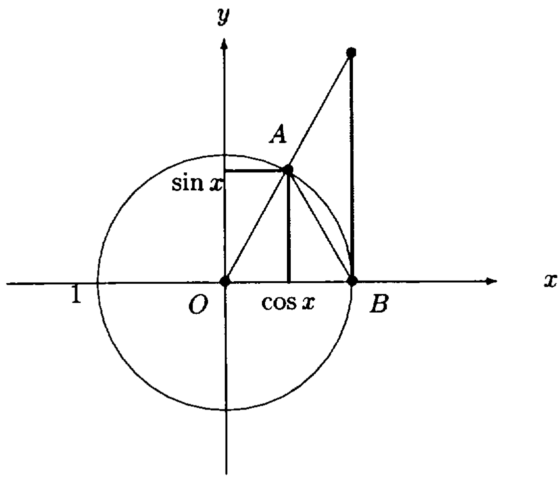

그림 13

$$\left|\frac{1}{2}\sin x\right| \le \left|\frac{1}{2}x\right|.$$

따라서

$$|\sin x| \le |x|.$$

보조정리 19 *임의의 실수 t_1과 t_2에 대하여*

$$\begin{aligned} |\sin t_2 - \sin t_1| &\le |t_2 - t_1|, \\ |\cos t_2 - \cos t_1| &\le |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

증명. 따름정리 16에 의하여

$$\begin{aligned} |\sin t_2 - \sin t_1| &= \left|2\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\sin\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)\right| \\ &\le 2\left|\sin\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)\right| \\ &\le 2\left|\frac{t_1-t_2}{2}\right| = |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

같은 방법으로 다음을 증명할 수 있다.

$$|\cos t_2 - \cos t_1| \le |t_2 - t_1|.$$

정리 20 $\sin x$*와* $\cos x$*는 모든 실수* x*에서 연속인 함수이다.*

증명. 보조정리 19에 의하여 $\sin x$와 $\cos x$는 모든 실수 x에서 연속인 함수이다.

VI sine 함수와 cosine 함수의 미분가능성

정의 21 함수 $f(x)$가 $x = a$ 근방에서 정의되어 있고 다음 극한값이 존재하면 $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 하고 그 극한값을 $f'(a)$로 나타내며 $x = a$에서의 미분계수라고 한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

만일 $f(x)$가 정의역 D의 모든 점에서 미분가능할 때 함수

$$\begin{aligned} f' &: D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{aligned}$$

를 함수 $f(x)$의 x에 대한 도함수라 한다.

보조정리 22 $x = a$의 근방에서 $f(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x), \quad 즉 \ \ \alpha \le \beta.$$

보조정리 23

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

증명.

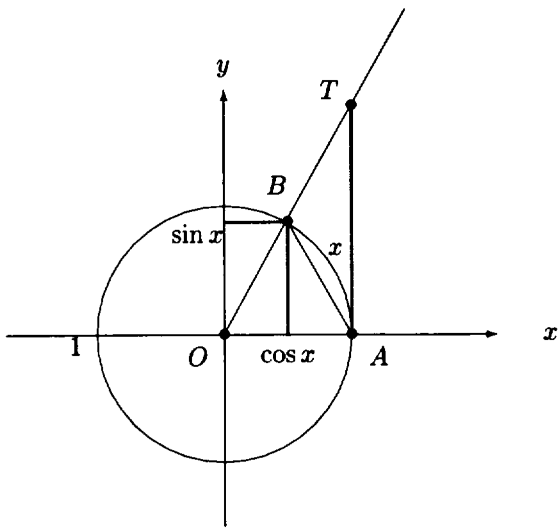

그림 14

중심이 O인 단위원에서 중심각 AOB의 크기를 x, 점 A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선과의 교점을 T라 하면

$$\triangle AOB의\ 넓이 < 부채꼴\ AOB의\ 넓이 < \triangle AOT의\ 넓이$$

이므로

$$\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

따라서

$$\sin x < x < \tan x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

즉,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

cosine 함수는 연속이므로

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

보조정리 22에 의하여

$$1 = \lim_{x\to 0+} \cos x \leq \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

따라서

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

비슷하게

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

임을 증명할 수 있다.

정리 24 *sine 함수와 cosine 함수는 모든 점에서 미분가능하고*

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

증명. $f(x) = \sin x$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin h/2\cos(x+h/2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h/2}{h/2} \cdot \cos(x+h/2) = \cos x.\end{aligned}$$

따라서 sine 함수는 모든 점에서 미분가능하고

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$$

나머지도 같은 방법으로 증명할 수 있다.

VII 결론

이상에서 살펴본 것은 고등학생들이 원리의 이해와 적용에 아주 큰 어려움을 갖고 있는 삼각함수를 시각적으로 재정의하고 삼각함수의 성질, 연속성 및 미분가능성에 대해 시각적으로 고찰하였다.

본 연구에서는 범위를 고등학교 수학 교과과정으로 한정하고 삼각함수의 기본 개념과 원리, 법칙 등을 시각화하여 보다 쉽게 이해시키고 흥미를 유도하는 방안을 검토하였다. 즉 시각적으로 각의 크기 및 삼각함수를 정의하고 나면 삼각함수의 여러가지 성질, 삼각함수의 연속성 및 미분가능성을 단위원주에서 시각적으로 증명할 수 있음을 보였다.

참 고 서 적

[1] 박두일 · 신동선(1995), 교사용 지도서(일반수학), (주)지학사.

[2] 장태환 · 서영태 · 유복동 · 김광환 · 박재명(1996), 공통수학, 동아출판사.

[3] 한국사전연구원, 수학대사전.

[4] 박한식 · 구광조 · 정지호 · 이동수 · 이강섭 · 황선욱(1996), 공통수학, (주)지학사.