연속성과 미분을 이용한 삼각함수 도입과 성질 연구

고 윤 희* · 송 수 언**

목 차

Ⅰ. 서 론
Ⅱ. 본 론
Ⅲ. 결론 및 제언
참고문헌

Ⅰ. 서 론

본 논문에서는 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 충분조건을 최소로 완화하여 삼각함수들을 정의하고 삼각함수의 여러 가지 성질들을 연구하였다. 연구과정에서 다음과 같은 내용들을 참고하였다.

(i) 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족하고 $x=0$에서 미분가능하고 $f'(0)\neq 0$이면, 함수 f는 선형함수가 된다.

(ii) 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족하고 $x=0$에서 연속인 비상수(nonconstant)함수이면, 함수 f는 선형함수가 된다.

(iii) 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$를 만족하고 $f'(0)=0$이면 $f(x)=x^2$이 된다.

(iv) 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족하고 $x=0$에서

* 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수
** 제주여자중학교 교사

미분가능하고 $f'(0)\neq0$이면, 함수 f는 지수함수가 된다.

(v) 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족하고 $x=0$에서 연속인 비상수 함수 f는 지수함수가 된다.

한편 R. Johnsonbaugh와 W. Rudin은 Maclaurin 급수를 이용하여 삼각함수를 도입하고 여러 가지 성질들을 연구하였다. 본 연구과정에서 R. Johnsonbaugh와 W. Rudin이 연구 방법들을 부분적으로 참고하였다.

연구내용 중 제시된 함수가 최소의 양의 근을 갖는 내용을 제외한 대부분의 연구내용들은 연속성과 미분성질을 활용하였기 때문에 고등학교에서 미적분을 학습한 우수 학생들은 충분히 이해할 수 있을 것으로 기대된다. 그러므로 연구내용은 고등학교 수준에서 삼각함수의 성질 연구에 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

본 논문의 본론 제1부에서는 핵심연구과정에서 필요한 선행연구 내용들을 요약하여 제시하였다.

본 논문의 본론 제2부에서는 여러 가지 충분조건들을 만족하는 함수들에 대한 정리를 제시하고 여러 가지 성질들을 연구하였다. 그리고 연구한 함수들이 삼각함수로 정의됨을 보였다. 그리고 핵심 연구과정에서 제시된 충분조건들이 삼각함수 성질을 규정하는 가장 완화된 조건들이 된다는 사실을 비교 분석하였다.

결론 부분에서 본 연구 내용에 대한 요약 및 제언을 하였다.

Ⅱ. 본　론

1. 실수의 완비성, 함수의 연속성과 미분성질

본론 제1부에서는 핵심 연구과정에서 필요한 내용들(실수의 완비성, 수열의 수렴성, 함수의 부동점과 부동점의 수렴범위, 부동점 성질과 극한성질을 이용한 분수함수의 도입, 함수의 연속성과 미분성질 등)을 요약 제시한다.

[공리 1.1] (실수의 완비성 공리) 실수의 집합 R의 부분집합 B가 유계이면, B의 최소상계 $\alpha=supB$와 최대하계 $\beta=infB$가 존재하며, 원소 α, β는 B의 폐포 $\overline{B}$에 속한다.

[정리 1.2] 실수의 집합 R의 부분집합 S가 아래로 유계이고 β가 S의 최대하계 $\beta=infS$이면, β에 수렴하는 수열 $\{s_n\}\subset S$이 존재한다.

[정리 1.3] 함수 $f: R \to R$이 연속이기 위한 필요충분조건은 R 임의의 폐부분집합 F에 대하여 $f^{-}(F)$가 폐집합이다.

[정리 1.4] 실수열 $\{a_n\}$이 단조증가 또는 단조감소인 경우 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 수열 $\{a_n\}$이 유계이다.

[정의 1.5] 임의의 양수 ε에 대하여 자연수 n_0가 존재하여 $m > n \geq n_0$이면 실수열 $\{a_n\}$이 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 의 조건을 만족하는 경우 실수열 $\{a_n\}$을 코쉬수열(Cauchy sequence)라고 한다.

[정리 1.6] 실수 집합 R에서 모든 코쉬수열(Cauchy sequence) $\{a_n\}$은 수렴한다.

[정리 1.7] (중간값의 정리) 연속함수 $f: [a, b] \to R$가 $f(a) < m < f(b)$를 만족하는 경우 $c \in (a, b)$가 존재하여 $f(c) = m$를 만족한다.

[정의 1.8] 함수 $f: [a, b] \to R$가 $f(c) = c$를 만족하는 경우 c를 함수 $f(x)$의 부동점(*fixed point*)이라고 한다.

[정의 1.9] 함수 $f: [a, b] \to R$가 임의의 점 $x_1, x_2 \in [a, b]$에 대하여

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, \ (0 \leq M < 1)$$

를 만족할 때, 함수 f는 $[a, b]$에서 축소함수(contraction mapping)라고 한다.

[정의 1.10] 함수 $f: [a, b] \to R$가 연속이고 $a_0 \in [a, b]$를 선택하여

$$a_1 = f(a_0),\ a_2 = f(a_1), \cdots a_{n+1} = f(a_n), \cdots$$

의 규칙으로 수열 $\{a_n\}$을 구성하는 경우, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 수렴점은 부동점이 된다. 즉

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p,\ p = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to \infty} a_n) = f(p)$$

이 성립한다. $A \subset [a, b]$이고 $a_0 \in A$이면 수열 $\{a_n\}$은 부동점 p에 수렴하고 $a_0 \not\in A$이면 수열 $\{a_n\}$은 p에 수렴하지 않는다. 이 때, 집합 A를 부동점 p의 인력구역(attraction domain)이라고 한다. 즉, 부동점 p의 인력구역에서 초기값을 택하여

$$a_1 = f(a_0),\ a_2 = f(a_1), \cdots a_{n+1} = f(a_n), \cdots$$

의 규칙으로 구성된 수열 $\{a_n\}$은 모두 부동점 p로 수렴한다.

[보기 1.11] 선형함수 $f: R \to R$를 $f(x)=ax+b$, $(|a|<1)$로 정의하는 경우 부동점 $p=\frac{b}{1-a}$은 유일하게 존재하며 p의 인력구역은 전체 실수의 집합 R이 된다. 그 이유는 $f(x)=ax+b$가 축소함수(contraction mapping)이 되어서 임의의 원소 $a_0 \in R$을 선택하는 경우

$$a_1=f(a_0),\ a_2=f(a_1), \cdots a_{n+1}=f(a_n), \cdots$$

수열 $\{a_n\}$은 코쉬수열(Cauchy sequence)이 되고 부동점 $p=\frac{b}{1-a}$로 수렴한다.

[보기 1.12] 함수 $f: R \to R$를 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+1$로 정의하는 경우 함수 f의 부동점은 $\pm\sqrt{2}$이다. 함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+1$, $f(x)=x$를 비교하여 분석하면 부동점 $\sqrt{2}$의 유인구역은 $(-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2})$이고, $-\sqrt{2}$의 인력구역은 한원소 집합 $\{-\sqrt{2}\}$이 된다. 인려구역을 구하는 과정에서는 수열의 단조증가 구간과 부동점을 중심으로 미분계수 절대값이 1보다 작은 구간을 고려한다.

[보기 1.13] 함수 $f: R-\{0\} \to R$를 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$로 정의할 때, 함수 f의 부동점은 $\pm\sqrt{2}$이다. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$와 $f(x)=x$를 비교분석하면 부동점 $\sqrt{2}$의 인력구역은 $(0,\ \infty)$이고 부동점 $-\sqrt{2}$의 인력구역은 $(-\infty,\ 0)$이 된다.

부동점 개념은 수학의 여러 분야에서 중요한 역할을 한다. 그리고 다음 절에서 도입되는 함수들의 부동점의 성질들을 연구하게 될 것이다. 부동점 개념이 중요한 역할을 하는 분수함수를 도입하는 과정을 소개하기로 한다. 증명과정은 [5]를 참고하였다.

[정리 1.14] 함수 $f: (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$가 $f(x)=\frac{1}{x}$가 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(af(b))=f(a)b$가 성립한다.

(ii) $\lim_{x \to \infty} f(x)=0$.

(증명)

($\Rightarrow$) 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$는 (i),(ii)조건을 만족한다.

($\Leftarrow$) $f(1)>0$이므로 $p=\frac{1}{f(1)}$이라 놓으면, $f(1f(p))=f(1)p=1$이 된다. 즉 적어도 하나의 양수 x_0가 존재하여 $f(x_0)=1$을 만족한다. 그런데 $f(x)=1$이라 놓으면 $f(1)=f(1f(x))=f(1)x$가 된다. 그러므로 $x=1$이 된다. 즉, $f(x)=1$을 만족하는 x는 오직 $x=1$인 경우에 한한다.

한편, $f(a)=a$, $f(b)=b$라 놓는다. 즉, a, b를 함수 f의 부동점이라고 하면 $f(ab)=f(af(b))=f(a)b=ab$가 된다. 그러므로 a가 함수 f의 부동점이면 모든 양의 정수 n에 대하여 a^n도 함수 f의 부동점이 된다. 즉, $f(a^n)=a^n$이 된다. 만약 $a>1$이면 $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} f(a^n)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$$

가 되어서 (ii)의 조건을 만족하지 못한다. 그러므로 $f(a)=a$이면 $0<a\le 1$이 되어야 한다. 임의의 양수 x에 대하여 $f(xf(x))=xf(x)$이므로 $xf(x)$는 함수 f의 부동점이 된다. 그러므로 $xf(x)\le 1$이 된다. 즉, $f(x)\le\frac{1}{x}$를 만족한다. 만약 a가 함수 f의 부동점이라고 하면

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{a}f(a)\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)a,$$

즉 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$가 된다. 따라서 a가 함수 a의 부동점이면 역수 $\frac{1}{a}$도 부동점이 된다. 임의의 양수 x에 대하여 $xf(x)$가 함수 f의 부동점이 되므로 $\frac{1}{xf(x)}$가 함수 f의 부동점이 된다. 즉 $\frac{1}{xf(x)}\le 1$과 $f(x)\ge\frac{1}{x}$를 만족한다. 그러므로 $f(x)=\frac{1}{x}$가 된다.

[정리 1.15] (평균값의 정리) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분가능하면 $c\in(a, b)$가 존재하여 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\{f(b)-f(a)\}g'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)$$

[정리 1.16] (Taylor 급수 정리) 함수 f가 a근방에서 무한히 미분가능하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{(x-a)^n}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a^*)=0$, (a^*는 x와 a의 사이의 적당한 수)이면 함수 f는

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$으로 나타낼 수 있다.

[정리 1.17] 함수 $y=f(x)$가 미분방정식 $y''=-y$를 만족하는 경우 미분방정식의 해는 $y=f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$로 주어진다. 여기서 C_1, C_2는 임의의 상수이다.

2. 삼각함수 도입과 삼각함수 성질 연구

본론 제2부에서는 핵심정리들을 제시하고 정리내용들을 증명한다.

[정리 2.1] 항등적으로 0이 아닌 함수 $P, Q: R \to R$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건들을 만족한다고 가정하자.

(i) $P(x-y)=P(x)Q(x)-Q(x)P(y)$

(ii) $Q(x-y)=Q(x)Q(y)+P(x)P(y)$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x}=1$

그러면 함수 $P(x)$, $Q(x)$는 다음의 성질들을 만족한다.

(1) 임의의 실수 x에 대하여, $P(-x)=-P(x)$, $Q(-x)=Q(x)$이다.

(2) $P'(0)=1$이다.

(3) 함수 Q는 $x=0$에서 연속이다.

(4) $Q'(0)=0$이다.

(5) $P'(x)=Q(x)$이다.

(6) $Q'(x)=-P(x)$이다.

(증명)

(1) (i)식에서 $x=y$라 놓으면

$$P(0)=P(x)Q(x)-P(x)Q(x)=0$$

가 된다. 그리고 (i)식에 $y=0$를 대입하면

$$P(x)=P(x-0)=P(x)Q(0)-P(0)Q(x)=P(x)Q(0)$$

이 된다. 그런데 $P(x)$는 항등적으로 0가 아니므로 $Q(0)=1$을 만족한다. (i)식에 $x=0$을 대입하면

$$P(-y)=P(0-y)=P(0)Q(y)-Q(0)P(y)=-P(y)$$

가 된다. 그러므로 함수 P는 기함수가 된다.

한편, (ii)식에 $x=0$을 대입하면

$$Q(-y)=Q(0-y)=Q(0)Q(y)+P(0)P(y)=Q(y)$$

를 만족한다. 그러므로 함수 Q는 우함수가 된다.

(2) (iii)식에서

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x-0}=P'(0)$$

가 된다.

(3) (i)식에 $x=y$를 대입하면

$$1=Q(0)=Q(x-x)=Q(x)Q(x)+P(x)P(x)=\{Q(x)\}^2+\{P(x)\}^2$$

이 된다. 그런데 $P(x)$가 $x=0$에서 미분가능이므로 $P(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0}P(x)=P(0)=0$가 된다. $1=\{Q(x)\}^2+\{P(x)\}^2$이므로 $Q(x)$도 $x=0$에서 연속이며 $\lim_{x\to 0}Q(x)=Q(0)=1$이 된다.

(4) $\{Q(x)\}^2+\{P(x)\}^2=1$이므로 $Q(x)=\pm\sqrt{1-\{P(x)\}^2}$이 된다. 그런데 $Q(0)=0$ 이므로 $x=0$근방에서는 $Q(x)=\sqrt{1-\{P(x)\}^2}$ 이 된다. 그러므로

$$Q'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)-Q(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\{P(x)\}^2}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\{P(x)\}^2}{(\sqrt{1-\{P(x)\}^2}+1)x}=-\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x}\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{(\sqrt{1-\{P(x)\}^2}+1)}=-1\cdot 0=0$$

이 된다.

(5)

$$P'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P(x)Q(h)+Q(x)P(h)-P(x)}{h}$$

$$=P(x)\lim_{h\to 0}\frac{Q(h)-1}{h}+Q(x)\lim_{h\to 0}\frac{P(h)}{h}=P(x)Q'(0)+P'(0)Q(x)$$

$$=Q(x)$$

(6)

$$Q'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Q(x)Q(h)-P(x)P(h)-Q(x)}{h}$$

$$=Q(x)\lim_{h\to 0}\frac{Q(h)-1}{h}-P(x)\lim_{h\to 0}\frac{P(h)}{h}=Q(x)Q'(0)-P(x)P'(0)$$

$$=-P(x)$$

[정리 2.2] 함수 $Q(x)$가 정리 2.1의 조건들을 만족하는 경우, $Q(p)=0$를 만족하는 최소의 양수 p가 존재한다.

(증명)

<방법1> 정리 2.1에 의하여 함수 $Q(x)$는 모든 실수에서 모든 양의 정수 n에 대하여 n계 도함수들이 존재한다. 따라서 Taylor 급수정리에 의하여 함수 $Q(x)$는 다음과 같이 급수로 나타낼 수 있다.

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

그러므로

$$Q(2)=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}+\frac{2^8}{8!}-\frac{2^{10}}{10!}+\cdots$$
$$=1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}-\frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{56}\right)-\cdots$$
$$-\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1-\frac{2^2}{(4n-1)4n}\right)-\cdots$$
$$<1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}=-\frac{1}{3}$$

이 된다. 그러므로 부등식 $Q(2)<0<Q(0)$을 얻을 수 있다. 그러므로 중간값의 정리에 의하여 양의 수 m이 0과 2사이에 존재하여 $Q(m)=0$를 만족한다. 이 때, 집합 $A=Q^{-1}(0)\cap(0,\infty)$를 고려하자. 따라서 $m\in A$이고 집합 A는 아래로 유계되어 있다. 실수의 완비성 공리에 의하여 집합 A의 최대하계 $p=\inf A$가 존재한다. 따라서

$$p\in\overline{A}=\overline{Q^{-1}(0)\cap(0,\infty)}\subset Q^{-1}(0)\cap[0,\infty)$$

이 되므로 p는 $Q(p)=0$를 만족하는 가장 작은 양수가 된다.

<방법2> $Q(x)=0$를 만족하는 양수가 존재하지 않는다고 가정하자. $Q(0)=1>0$이므로 모든 양수 x에 대하여 $Q(x)>0$이 된다. 정리 2.1-(5)에 의하여 $P'(x)=Q(x)$이므로 $P(x)$는 $(0,\infty)$에서 증가함수가 된다. $P(0)=0$이므로 임의의 양수 x에 대하여 $P(x)>0$이 된다. 양수 x_0를 선택하자. 이 때,

$$\infty=\lim_{t\to\infty}P(x_0)(t-x_0)\le\int_{x_0}^{t}P(u)du=[-Q(u)]_{x_0}^{t}=Q(x_0)-Q(t)\le 2$$

이 되어서 모순이 된다. 따라서 적어도 하나의 양수 x_0가 존재하여 $Q(x_0)=0$를 만족한다. 이 때, 집합 $A=Q^{-1}(0)\cap(0,\infty)$를 고려하자. 집합 A는 아래고 유계되어 있으므

로 최대하게 $p = infA$가 존재한다. 그리고 정리 1.2에 의하여 수열 $\{a_n\} \subset A$가 존재하여 $\lim_{n \to \infty} a_n = p$를 만족한다. 따라서

$$\lim_{n \to \infty} Q(a_n) = Q(p) = 0$$

이 된다. 그러므로 p는 $Q(p) = 0$를 만족하는 가장 작은 양수가 된다.

[참고 2.3] 정리 2.2 증명과정에서 p는 1과 2사이에 존재한다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 Taylor 급수전개식에 의해 모든 $x \in [0,\ 1]$에 대하여 $Q(x) > 0$을 만족한다. 그리고 $Q(2) < 0$이 된다.

[정리 2.4] 함수 $\alpha : R \to R$가 $\alpha(x) = Q(x)$이 되는 필요충분조건은 다음 세 가지가 된다.

(i) $\alpha(x)$는 모든 실수 x에 대하여 2계 도함수를 갖는다.

(ii) $\alpha''(0) = -1$이다.

(iii) 임의의 실수 x, y에 대하여 $\alpha(x+y) + \alpha(x-y) = 2\alpha(x)\alpha(y)$가 성립한다.

(증명)

($\Rightarrow$) $\alpha(x) = Q(x)$라고 하자. 이 때, 정리 2.1에 의하여

$\alpha(x-y) = Q(x-y) = Q(x)Q(y) + P(x)P(y) = \alpha(x)\alpha(y) + P(x)P(y)$와

$\alpha(x+y) = Q(x-y) = Q(x)Q(y) - P(x)P(y) = \alpha(x)\alpha(y) - P(x)P(y)$

가 성립한다. 그러므로

$$\alpha(x+y) + \alpha(x-y) = 2Q(x)Q(y) = 2\alpha(x)\alpha(y)$$

가 된다. 그리고 $\alpha'(x) = Q'(x) = -P(x)$이고 $\alpha''(x) = -P'(x) = -Q(x)$가 된다. 따라서 $\alpha''(0) = -Q(0) = -1$이 성립한다. 그리고 $Q(x)$가 모든 실수에서 2계도함수를 가지므로 $\alpha(x)$는 모든 실수에서 2계도함수를 갖는다.

($\Leftarrow$) (iii)식에 $y = 0$을 대입하면 $2\alpha(x) = 2\alpha(x)\alpha(0)$이 된다. $\alpha(x)$는 항등적으로 0가 아니므로 $\alpha(0) = 1$이 된다. (iii)식을 y에 대하여 미분하면

$$\alpha'(x+y) - \alpha'(x-y) = 2\alpha(x)\alpha'(y) \text{ - - - - - - - - - - ①}$$

이 된다. ①식에 $y = 0$을 대입하면 $0 = 2\alpha(x)\alpha'(0)$이 된다. 그러므로 $\alpha'(0) = 0$가 성립된다. ①식을 y에 대하여 미분하면

$$\alpha''(x+y) + \alpha''(x-y) = 2\alpha(x)\alpha''(y) \text{ - - - - - - - - - ②}$$

이 된다. ②식에 $y = 0$을 대입하면 $2\alpha''(x) = 2\alpha(x)\alpha''(0) = -2\alpha(x)$가 성립된다. 그러므로

$$\alpha''(x) = -\alpha(x) \text{ - - - - - - - - - - - ③}$$

을 얻을 수 있다.

한편, 함수 $U(x)$와 $V(x)$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$U(x) = \alpha(x)P(x) + \alpha'(x)Q(x) \text{ ------------- ④}$$

$$V(x) = \alpha(x)Q(x) - \alpha'(x)P(x) \text{ ------------- ⑤}$$

이 때,

$$U'(x) = \alpha'(x)P(x) + \alpha(x)P'(x) + \alpha''(x)Q(x) + \alpha'(x)Q'(x)$$

$$= \alpha'(x)P(x) + \alpha(x)Q(x) - \alpha(x)Q(x) - \alpha(x)P(x) = 0$$

와

$$V'(x) = \alpha'(x)Q(x) + \alpha(x)Q'(x) - \alpha''(x)P(x) - \alpha'(x)P'(x)$$

$$= \alpha'(x)Q(x) - \alpha(x)P(x) + \alpha(x)P(x) - \alpha'(x)Q(x) = 0$$

가 성립된다. ④에 $x=0$을 대입하면 $U(0)=0$가 된다. 그러므로

$$U(x) = \alpha(x)P(x) + \alpha'(x)Q(x) = 0 \text{ ---------- ⑥}$$

을 얻을 수 있다.

그리고 ⑤식에 $x=0$을 대입하면 $V(0)=1$이 되므로

$$V(x) = \alpha(x)Q(x) - \alpha'(x)P(x) = 1 \text{ -------- ⑦}$$

을 얻을 수 있다. ⑦식의 양변에 $Q(x)$를 곱하면

$$Q(x) = \alpha(x)\{Q(x)\}^2 - \alpha'(x)P(x)Q(x) = \alpha(x)\{1 - \{P(x)\}^2\} - \alpha'(x)P(x)Q(x)$$

$$= \alpha(x) - P(x)\{\alpha(x)P(x) + \alpha'(x)Q(x)\} = \alpha(x)$$

이 되어서 증명이 끝난다.

[정리 2.5] 함수 $\beta: R \to R$가 $\beta(x) = P(x)$가 되기 위한 필요충분조건을 다음의 세 가지가 된다.

(i) 함수 β는 모든 실수에서 3계도함수를 갖는다.

(ii) $\beta'''(0) = -1$이 성립한다.

(iii) 모든 실수 x, y에 대하여 $\beta(x+y) + \beta(x-y) = 2\beta(x)\beta'(y)$를 만족한다.

(증명)

($\Rightarrow$) $\beta(x) = P(x)$라 놓으면 정리 2.1에 의해 $\beta(x)$는 모든 양의 정수 n에 대하여 n계도함수를 갖는다. 그리고 $\beta'''(x) = P'''(x) = -Q(x)$이므로

$\beta'''(0) = -Q(0) = -1$이 된다. 그리고 정리 2.1에 의해

$$\beta(x+y) = P(x+y) = P(x)Q(y) + Q(x)P(y) = \beta(x)Q(y) + Q(x)\beta(y)$$

와

$$\beta(x-y)=P(x-y)=P(x)Q(y)-Q(x)P(y)=\beta(x)Q(y)-Q(x)\beta(y)$$

이 성립한다. 그러므로 두 식을 더하면

$$\beta(x+y)+\beta(x-y)=2\beta(x)Q(y)=2\beta(x)P'(y)=2\beta(x)\beta'(y)$$

을 얻을 수 있다.

($\Leftarrow$) (iii)식에 $y=0$을 대입하면 $2\beta(x)=2\beta(x)\beta'(0)$이 된다. 따라서 $\beta'(0)=1$이 된다. (iii)식을 y에 대하여 미분하면

$$\beta'(x+y)-\beta'(x-y)=2\beta(x)\beta''(y) \text{ --------- ⑧}$$

을 얻는다. ⑧식에 $y=0$을 대입하면 $0=2\beta(x)\beta''(0)$이 된다. 그러므로 $\beta''(0)=0$이 성립한다. ⑧식을 y에 대하여 미분하면

$$\beta''(x+y)+\beta''(x-y)=2\beta(x)\beta'''(y) \text{ --------- ⑨}$$

을 얻는다. ⑨식에 $y=0$을 대입하면

$$2\beta''(x)=2\beta(x)\beta'''(0)=-2\beta(x)$$

즉

$$\beta''(x)=-\beta(x) \text{ -------- ⑩}$$

이 성립한다.

한편, 함수 $A(x)$와 $B(x)$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$A(x)=\beta(x)P(x)+\beta'(x)Q(x) \text{ ------ ⑪}$$

$$B(x)=\beta(x)Q(x)-\beta'(x)P(x) \text{ ------ ⑫}$$

이 때,

$$\begin{aligned}A'(x)&=\beta'(x)P(x)+\beta(x)P'(x)+\beta''(x)Q(x)+\beta(x)Q'(x)\\&=\beta'(x)P(x)+\beta(x)Q(x)-\beta(x)Q(x)-\beta(x)P(x)=0\end{aligned}$$

와

$$\begin{aligned}B'(x)&=\beta'(x)Q(x)+\beta(x)Q'(x)-\beta''(x)P(x)-\beta'(x)P'(x)\\&=\beta'(x)Q(x)-\beta(x)P(x)+\beta(x)P(x)-\beta'(x)Q(x)=0\end{aligned}$$

이 성립한다. ⑪식에 $x=0$을 대입하면

$$A(0)=\beta(0)P(0)+\beta'(0)Q(0)=1$$

이 된다. 그러므로

$$A(x)=\beta(x)P(x)+\beta'(x)Q(x)=1 \text{ ------ ⑬}$$

이 성립한다. 그리고 ⑫식에 $x=0$을 대입하면

$$B(0)=\beta(0)Q(0)-\beta'(0)P(0)=0$$

이 된다. 그러므로

$$B(x)=\beta(x)Q(x)-\beta'(x)P(x)=0------⑭$$

이 성립한다. ⑬식에 양변에 $P(x)$를 곱하면

$$P(x)=\beta(x)\{P(x)\}^2+\beta(x)P(x)Q(x)=\beta(x)\{1-\{Q(x)\}^2\}+\beta'(x)P(x)Q(x)$$

$$=\beta(x)-Q(x)\{\beta(x)Q(x)-\beta'(x)P(x)\}=\beta(x)$$

이 성립한다.

[따름정리 2.6]

(i) $P(x)Q(x)=\frac{1}{2}\{P(x-y)+P(x+y)\}$

(ii) $P(x)P(y)=\frac{1}{2}\{Q(x-y)-Q(x+y)\}$

(iii) $Q(x)Q(y)=\frac{1}{2}\{Q(x-y)+Q(x+y)\}$

[정리 2.7] 양수 p가 $Q(p)=0$를 만족하는 최소의 양수일 때 함수 $P(x)$와 $Q(x)$는 $4p$의 주기를 갖는다.

(증명)

<방법1> 정리 2.1에 의하면

$$Q(x+y)+Q(x-y)=2Q(x)Q(y)------ⓐ$$

얻을 수 있다. ⓐ식에 $y=p$를 대입하면

$$Q(x+p)+Q(x-p)=2Q(x)Q(p)=0 \text{ 즉 } Q(x+p)=-Q(x-p)---ⓑ$$

이 성립한다. ⓑ식으로부터 $Q(x+2p)=-Q(x)$와 $Q(x+4p)=-Q(x+2p)$을 얻을 수 있다. 그러므로

$$Q(x+4p)=-Q(x+2p)=-\{-Q(x)\}=Q(x)$$

이 성립한다. 즉, 함수 $Q(x)$의 주기는 $4p$가 된다.

한편, 정리 2.1에 의하면

$$P(x+y)=P(x)Q(y)+Q(x)P(y)-----ⓒ$$

을 얻을 수 있다. ⓒ식에 $y=4p$을 대입하면

$$P(x+4p)=P(x)Q(4p)+Q(x)P(4p)-----ⓓ$$

이 성립한다. 그런데 $1=Q(0)=Q(4p)$이고 $\{P(4p)\}^2+\{Q(4p)\}^2=1$이므로

$P(4p)=0$가 된다. ⓓ식으로부터

$$P(x+4p)=P(x)Q(4p)+Q(x)P(4p)=P(x)$$

이 성립한다.

<방법2> $Q(p)=0$이고 $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2=1$이므로 $P(p)=\pm1$이 된다. 그런데 구간 $(0,\ p)$에서 $P'(x)=Q(x)>0$이므로 $P(p)=1$이 성립한다. 따라서

$$Q(2p)=\{Q(p)\}^2-\{P(p)\}^2=-1$$

이 성립한다. 그리고

$$P(2p)=2P(p)Q(p)=0\text{과}\quad Q(4p)=\{Q(2p)\}^2-\{P(2p)\}^2=(-1)^2=1$$

을 얻을 수 있다. 그리고 $P(4p)=2P(2p)Q(2p)=0$이 성립한다. 따라서

$$P(x+4p)=P(x)Q(4p)+Q(x)P(4p)=P(x)$$

와

$$Q(x+4p)=Q(x)Q(4p)-P(x)P(4p)=Q(x)$$

이 성립한다.

[정리 2.8] 만약 $0<\alpha<\beta<p$이면

$$P(\beta)-P(\alpha)<\beta-\alpha<\frac{P(\beta)}{Q(\beta)}-\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

의 부등식이 성립한다.

(증명)

평균값의 정리에 의하여 $r\in(\alpha,\ \beta)$가 존재하여

$$P(\beta)-P(\alpha)=(\beta-\alpha)\ P'(r)=(\beta-\alpha)Q(r)<\beta-\alpha$$

이 성립한다. 그리고 함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$에 평균값의 정리를 적용하면 $q\in(\alpha,\ \beta)$가 존재하여

$$\frac{P(\beta)}{Q(\beta)}-\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}=(\beta-\alpha)\frac{Q^2(q)+P^2(q)}{Q^2(q)}=(\beta-\alpha)\frac{1}{Q^2(q)}>(\beta-\alpha)$$

가 성립한다. 그러므로 부등식

$$P(\beta)-P(\alpha)<\beta-\alpha<\frac{P(\beta)}{Q(\beta)}-\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

이 성립한다.

[정리 2.9] $Q(r)=r$을 만족하는 $r\in(0,\ p)$이 유일하게 존재한다.

(증명)

함수 $F(x)=Q(x)-x$를 생각하자. 이 때, $F(0)=Q(0)-0=1>0$과 $F(1)=Q(1)-1<0$을 만족한다. 중간값의 정리에 의해 $r\in(0,\ 1)$가 존재하여 $F(r)=Q(r)-r=0$ 즉 $Q(r)=r$을 만족한다.

r이 유일하다는 것을 보이기로 하자. 임의의 실수 a_0을 선택하여 $Q(a_0)=a_1$, $Q(a_1)=a_2, \cdots a_{n+1}=Q(a_n), \cdots$이라 놓자. 그러면 $Q(x)$의 그래프 성질 $-1\le Q(x)\le 1$에 의해 모든 양수 n에 대하여 $a_n\in[-1,\ 1]$의 조건이 성립한다. 그리고 실수 x가 $|x|\le 1$이면

$$|Q'(x)|\le Q'(-1)=P(1)<1$$

의 조건을 만족한다. 여기에서 평균값의 정리를 이용하면 함수 $Q(x)$는

$[-1,\ 1]$에서 축소함수가 된다. 그리고 함수 $Q(x)$에 대하여 평균값의 정리를 반복해서 적용하면 다음의 부등식이 성립한다.

$$|a_{n+1}-r|=|Q(a_n)-Q(r)|\le P(1)|a_{n-1}-r|\le\{P(1)\}^2|a_{n-2}-r|$$
$$\le\cdots\le\{P(1)\}^n|a_0-r|$$

그러므로

$$0\le \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-r|\le \lim_{n\to\infty}\{P(1)\}^n|a_0-r|=0$$

즉 $\lim_{n\to\infty}a_n=r$이 된다. 따라서 r은 유일하다. 즉, $Q(x)$는 유일한 부동점 r을 갖는다. 그리고 부동점 r의 인력구역(attraction domain)은 실수 집합 R이 된다.

[정리 2.10] 함수 $P(x)$의 유일한 부동점은 0이다.

(증명)

함수 $P(x)$는 구간 $[-p,\ p]$에서 증가하며, $[-p,\ 0)\cup(0,\ p]$에서 $|P'(x)|<1$의 조건을 만족한다. 그리고 $G(x)=x-P(x)$라 놓으면 $G(p)=p-P(p)=p-1>0$이 된다. 또한 $G(-p)=-p-P(-p)=-p+1<0$이 된다. 그리고 $P(0)=0$이므로 0은 부동점이 된다. 그리고 $[-p,\ p]$에 다른 부동점 q가 존재한다고 가정하면

$$\frac{P(q)-P(0)}{q-0}=\frac{q-0}{q-0}=P'(r)=1,\ (\ r\in(0,\ q)\ )$$

이 된다. 그런데 $[-p,\ 0)\cup(0,\ p]$에서 $|P'(x)|<1$이므로 모순이 된다. 그러므로 $[-p,\ p]$에서 $P(x)$의 부동점은 오직 하나 0이 존재한다.

한편, 임의의 실수 a_0를 선택하여

$$P(a_0)=a_1,\ P(a_1)=a_2,\ \cdots, P(a_n)=a_{n+1},\cdots$$

로 수열을 택하면 수열의 모든 항 a_n은 폐구간 $[-1, 1]$에 포함된다. 그리고 $a_1>0$이면 수열 $\{a_n\}$은 단조감소하고 유계이므로 수렴한다.

즉 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} P(a_n) = P(\lim_{n\to\infty} a_n)$이 되어서 수렴값은 부동점 0이 된다. 그러므로 모든 수열은 0으로 수렴한다. 그리고 $a_1<0$이면 수열 $\{a_n\}$은 단조증가이고 유계이므로 수렴한다. 그러면 수렴값은 부동점이 되어 0가 된다. 그리고 부동점 0의 인력구역(attraction domain)은 실수 집합 R이 된다.

[보기 2.11] 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$는 두 개의 부동점 $-1, 1$을 갖는다. 이 경우 초기값 $a_0>0$, $(\neq 1)$을 택하면 수열

$$\{a_n \mid f(a_n)=a_{n+1},\ n=1,2,\cdots\}$$

은 진동하는 양수의 수열이 된다. 그리고 초기값 $a_0>0$, $(\neq -1)$을 택하는 경우

$$\{a_n \mid f(a_n)=a_{n+1},\ n=1,2,\cdots\}$$

은 진동하는 음의 수열이 된다. 따라서 부동점 1의 인력구역은 한원소 집합 $\{1\}$이고 부동점 -1의 인력구역은 한원소 집합 $\{-1\}$이 된다.

[참고 2.12] 정리 2.1에 의해 $P(0)=0$, $P'(0)=1$의 조건을 갖는 2계 선형미분방정식 $P''(x)=-P(x)$를 얻을 수 있다. 그러므로 선형미분방정식의 해법에 의해 일반해

$$P(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

를 구할 수 있다. 그러므로 $P(0)=C_1=0$와 $P'(0)=C_2=1$이 되므로

$$P(x)=\sin x$$

가 된다.

[참고 2.13] 정리 2.1에 의해 $Q(0)=1$, $Q'(0)=0$의 조건을 갖는 2계 선형미분방정식 $Q''(x)=-Q(x)$를 얻을 수 있다. 그러므로 선형미분방정식의 해법에 의해 일반해

$$Q(x)=D_1\cos x+D_2\sin x$$

를 구할 수 있다. 따라서 $Q(0)=1$, $Q'(0)=0$의 조건을 이용하여

$$Q(x)=\cos x$$

가 된다.

[정의 2.14] 함수 $P(x)$와 $Q(x)$가 정리 2.1의 조건을 만족하는 경우

$$P(x)=\sin x, \qquad Q(x)=\cos x, \qquad \tan x=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

$$\cot x=\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad \sec x=\frac{1}{Q(x)}, \qquad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{P(x)}$$

로 정의한다.

아래 제시되는 참고 내용들을 통해 정리 2.1에 제시된 조건들이 삼각함수를 정의하는 완화된 조건들이 된다는 사실을 보일 수 있다. 정리 2.1의 조건을 고려하게된 동기는 삼각함수의 가감법과 지수함수와 선형함수의 정의하는 조건들인 $x=0$ 에서의 연속성과 미분가능성의 성질들이다.

[참고 2.15] 항등적으로 0이 아닌 함수 $P, Q: R \rightarrow R$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건들을 부과하기로 하자.

(i) $P(x-y)=P(x)Q(x)-Q(x)P(y)$

(ii) $Q(x-y)=Q(x)Q(y)+P(x)P(y)$

(iii) $\lim_{x \to 0}\frac{Q(x)-1}{x}=0$

이 경우 (iii)의 조건으로부터 $\lim_{x \to 0}\frac{P(x)}{x}=1$의 조건을 유도할 수 없다.

왜냐하면 $\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2=1$에서 $P(x)=\pm\sqrt{1-\{Q(x)\}^2}$을 얻을 수 있다. 이 경우 $\lim_{x \to 0}\sqrt{1-\{Q(x)\}^2}=0$가 되어서 $P'(0)$을 구할 수가 없다. 따라서 $P(x)$와 $Q'(x)$을 구할 수가 없다.

[참고 2.16] 항등적으로 0이 아닌 함수 $P, Q: R \rightarrow R$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건들을 부과하자.

(i) $P(x-y)=P(x)Q(x)-Q(x)P(y)$

(ii) $Q(x+y)=Q(x)Q(y)-P(x)P(y)$

(iii) $\lim_{x \to 0}\frac{P(x)}{x}=1$

이 경우에 (ii)식으로부터 $Q(-x)=Q(x)$라는 조건을 유도할 수 없다. 위의 함수가 삼각함수의 조건들을 만족하기 위해서 (iv) $Q(-x)=Q(x)$의 조건을 추가해야 할 것이다.

[참고 2.17] 항등적으로 0이 아닌 함수 $P, Q: R \rightarrow R$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음

조건들을 부과하자.

(i) $P(x+y)=P(x)Q(x)+Q(x)P(y)$

(ii) $Q(x-y)=Q(x)Q(y)+P(x)P(y)$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x}=1$

이 경우 (i)식으로부터 $P(-x)=-P(x)$의 조건을 유도할 수 없다. 위의 함수가 삼각함수의 조건들을 만족하기 위해서 (iv) $P(-x)=-P(x)$의 조건을 추가해야 할 것이다.

[참고 2.18] 항등적으로 0이 아닌 함수 $P, Q: R\to R$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건들을 부과하자.

(i) $P(x+y)=P(x)Q(x)+Q(x)P(y)$

(ii) $Q(x+y)=Q(x)Q(y)-P(x)P(y)$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x}=1$

이 경우 (i)식으로부터 $P(-x)=-P(x)$의 조건을 유도할 수 없다. 그리고 (ii)식으로부터 $Q(-x)=Q(x)$의 조건을 유도할 수 있다. 위의 함수가 삼각함수의 조건들을 만족하기 위해서 (iv) $P(-x)=-P(x)$ 과 (v) $Q(-x)=Q(x)$의 조건들을 추가해야 할 것이다.

Ⅲ. 결 론 및 제언

선형함수, 지수함수, 분수함수 등의 성질을 이용하고 삼각함수의 가감법을 고려하여 최소의 충분조건들을 부과하여 삼각함수를 도입하고 여러 가지 성질들을 연구하였다.

본론 1부에서는 핵심연구과정에서 필요한 선행연구결과들인 실수의 완비성 성질, 연속함수의 성질, 부동점(fixed point) 정의, 분수함수의 성질, 부동점의 인력구역(attraction domain), 함수의 미분성질(평균값 정리, Taylor 정리, 2계 선형미분방정식 해법 등)을 요약 제시하였다.

본론 2부에서는 삼각함수에 관한 주요 정리들을 제시하고 증명하였다. 증명과정에서 본론 1부에서 제시된 내용들을 참고하였다. 그리고 증명과정에서 구체성을 제시하고 다양한 방법들을 제시하였다. 증명과정에서 이용된 내용들을 중 많은 부분은 고등학교 미분적분학 수준의 내용을 활용하여 증명하였다. 그리고 우리가 삼각함수를 정의하기 위해 제시한 충분조건들이 삼각함수의 가감법을 고려할 때 가장 완화된 조건이 된다는 사실을 제시하였다.

우리가 제시한 연구내용을 확대하는 경우, 지수함수의 지수부분의 비선형 형태로 제시

되는 지수함수의 성질들을 연구할 수 있다. 그리고 함수의 부동점의 수렴 및 발산조건을 포함하는 여러 가지 성질들을 일반화시킬 수 있을 것으로 기대되며 수열의 수렴값들을 효과적으로 구하는 방법을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강행고외 6인(2001), 고등학교 수학(10-나), 동화사

강형식(1997), 삼각함수의 지도법, 제주대학교 교육대학원

문경천(1997), 차분방정식의 해의 형태에 관한 연구, 제주대학교 교육대학원

양영오(2003), 최신해석학, 청문각

우무하외 7인(1994), 수학올림피아드 학습교재, 대한수학회

대학수하교재편찬위원회(2003), 미분적분학, 청문각

R. Johnsonbaugh외 1인(1981), Foundations of Mathematical Analysis, Marcel Dekker, INC

W. Rudin(1976), Priciples of Mathematical Analysis, McGRAW-HILL

<Abstract>

The Properties Of Trigonometric Functions Using Continuity And Differentiation

Youn-hee Ko · Soo-Eon Song

In this thesis, we study the properties of a linear function and an exponential function in order to obtain weak conditions to introduce the trigonometric functions. Also we define the trigonometric functions using continuity and differentiation, and study the properties of the trigonometric functions.