두개의 不變理論에 대한 量子力學的 考察

洪性樂・朴奎殷・金健鎬

A Study on two Invariance Principles in Quantum Mechanics

Hong Sung-rak. Park Gyoo-eun. Kim Kun-ho

Summary

There are some invariance principles in quantum mechanics. They are space translation invariance, space rotation invariance, time reversal invariance, Galilean invariance and charge conjugation. Among them, the space translation invariance and space rotation invariance are especially important. in this paper we sought the unitary operators governing the two abcve mentioned invariance transfomaticns, and the two principles led to the conservation law of linear momentum and angular rmomentum.

I. 序 論

量子力學에는 몇가지 不變性(Invariance Principle 이 있다. 그 중에서도 空間移動不變(Space translation invariance)과 空間廻轉不變(Space rotation invariance)은 特別히 重要한 不變理論이다. 本論文에서는 이 두가지의 不變性에 대해서 量子力學的인 側面에서 考察하고 이 두 原理가 總線運動量 保存原理와 角運動量 保存原理에 이른다는 것을 밝히고저 한다. 歷史的으로는 Kermmer *at al.* (1959) 과 Van Dam(1966) 等이 이에 대하여 試圖한 적이 있고 Wigner와 Chern (1966) 等의 論文들이 一般的인 不變論에 대한 諸問題들을 다루고 있다. 그러나 여기서는 먼저 空間移動에 關한 公理的 體系에서 出發하여이 두不變性을 滿足하는 演算子를 決定하고자 한다.

一般的으로 空間移動 演算子(Space translational operator)란 狀態函數 $\psi(r)$에 대하여 $T_s\psi(r)=\psi(r+\delta r)$이 成立하는 演算子 T_s를 생각할 수 있다. 미소한 變位 δr에 대하여

$$T_s\,\psi(r)=\psi(r+\delta r)$$
$$\approx\psi(r(+\delta r\cdot\nabla\psi(r)$$

임이 成立해야 한다. 그런데

$$P=-i\hbar\nabla$$

이므로

$$T_s\,\psi(r)=\psi(r)+\frac{i}{\hbar}\,\delta r\cdot P\psi(r)$$
$$=(1+\frac{i}{\hbar}\,\delta r\cdot P)\psi(r)$$

이 된다. 따라서

$$T_s=1+\frac{i}{\hbar}\,\delta r\cdot P$$

가 됨을 알 수 있다. 같은 方法으로 空間廻轉 演算子(Space rotaticnal operator)란 狀態函數 $\psi(r)$에 대해서 $R_s\psi(r)=\psi(r+\delta\phi\times r)$이 成立하는 演算子 R_s라 생각할 수 있다. 微小한 角變位 $\delta\phi$에 대해서

$$R_s\psi(r)=\psi(r+\delta\phi\times r)$$
$$\approx\psi(r)+\delta\phi\times r\cdot\nabla\psi(r)$$
$$=(1+\delta\phi\times r\cdot\nabla)\psi(r)$$
$$=(1+\delta\phi\cdot r\times\nabla)\psi(r)$$

그런데

$$L=-i\hbar\,\nabla$$

이므로

$$R_s\psi(r)=(1+\frac{i}{\hbar}\,\delta\phi\cdot L)\psi(r)$$

이 된다. 따라서

$$R_s=1+\frac{i}{\hbar}\,\delta\phi\cdot L$$

가 됨을 알 수 있다. 有限한 空間移動과 空間廻轉에 關한 演算子는 위에서 求한 T_s와 R_s를 反復的으로 適用함으로써 얻을 수 있다. (Anderson 1971, Tinkham 1964) 즉

$$T_s = \lim_{\delta r \to 0} T_\delta \frac{s}{\delta r}$$

$$= \lim_{\delta r \to 0} (1 + \frac{i}{\hbar} \delta r \cdot P)^{\frac{s}{\delta r}}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} s \cdot p}$$

$$R\phi = \lim_{\delta\phi \to 0} R_\delta^{\frac{\phi}{\delta\phi}}$$

$$= \lim_{\delta r \to o} (1 + \frac{i}{\hbar} \delta\phi \cdot L)^{\frac{\phi}{\delta\phi}}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} \phi \cdot L}$$

인데 에기서 T_s와 $R\phi$는 각각 空間移動과 空間廻轉에 關係하는 演算子들이다.

Ⅱ. Space Translation Invariance

量子力學에서 Schrödinger 方程式의 解인 狀態函數 $|\psi(t)>$에 대한 運動量 演算子와 位置演算子의 期待値는

$$\langle P_I \rangle = \langle \psi(t) | P_I | \psi(t) \rangle \qquad (1\text{—}1)$$

$$\langle X_I \rangle = \langle \psi(t) | X_I | \Psi(t) \rangle \qquad (1\text{—}2)$$

이다 .물론 $\Psi(t)$는 規格化되었으므로 $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1$을 滿足하며 (1—1), (1—2)식의 P_I와 X_I는 嚴密한 時間從屬性이 없는 새로운 演算子이다. 지금

$$H(P_I, X_I) | \Psi(t) > = i\hbar \frac{d}{dt} | \Psi(t) > \qquad (1\text{—}3)$$

인 Schrödinger 方程式의 모든 解에 대하여 空間移動 (Space translation)된 狀態의 解인

$$| \Psi'(t) > = U(a) | \Psi(t) > \qquad (1\text{—}4)$$

가 存在한다면 이는 다음의 3가지 性質을 滿足해야 한다. 즉 이들은

$$\langle \Psi'(t) | \Psi'(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle \qquad (1\text{—}5)$$

$$\langle \Psi'(t) | X_I | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | X_I + a | \Psi(t) \rangle$$
$$= \langle \Psi(t) | X_I | \Psi(t) \rangle + a \qquad (1\text{—}6)$$

$$\langle \Psi'(t) | P_I | \Psi'(t) \rangle = \langle \Psi(t) | P_I | \Psi(t) \rangle \qquad (1\text{—}7)$$

인데 이때 $U(a)$ 가 모든 系들을 同一한 量만큼 變化시키므로 이들 系사이의 本質的인 關係에는 變化가 없다. 특히 狀態 $|\Phi_1>$에서 $|\Psi_1>$으로 記述되는 系를 發見할 確率인 $|\langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle|^2$은 $|\langle U(a)\Phi_1 | U(a)\Psi_1 \rangle|^2$과 같아야 하는데 이 $|\langle U(a)\Phi_1 | U(a)\Psi_1 \rangle|^2$은 變換된 狀態 $U(a)|\Phi_1>$ 에서 $U(a)|\Psi_1>$으로 記述되는 變換된 系를 發見할 確率이다.

Wigner의 定理에 따르면

$$U(a)[C_1|\Phi_1> + C_2|\Phi_2>] = C_1U(a)|\Phi_1> + C_2U(a)|\Phi_2> \qquad (1\text{—}8)$$

$$U(a)[C_1|\Phi_1> + C_2|\Phi_2>] = C_1^*U(a)|\Phi_1> + C_2^*U(a)|\Phi_2> \qquad (1\text{—}9)$$

를 滿足하는데 여기서 C_1^*와 C_2^*는 C_1과 C_2의 複素共軛을 의미한다. (1—8)식의 $U(a)$는 線型演算子(Linear operator)이고 (1—9)식의 $U(a)$는 反線型演算子 (Antilinear operator)이다. 또 (1—8)식의 $U(a)$는 unitary 演算子이고 (1—9)식의 演算子는

antiunitary 演算子이다. unitary 演算子는

$$U^\dagger(a)U(a) = U(a)U^\dagger(a) = 1 \qquad (1\text{—}10)$$

$$U^\dagger(a) = U^{-1}(a) \qquad (1\text{—}11)$$

를 滿足하는데 여기서 +는 Hermitian adjoint를 表示하고 −1은 逆을表示한다. 따라서 (1—4)식, (1—6)식과 (1—7)식은

$$U^\dagger(a)X_I(a) = X_I + a \qquad (1\text{—}12)$$

$$U^\dagger(a)P_IU(a) = P_I \qquad (1\text{—}13)$$

로 表現할 수 있고 더우기

$$[U(a_1)U(a_2)]^\dagger X_I[U(a_1)U(a_2)]$$
$$= U^\dagger(a_2)U^\dagger(a_1)X_IU(a_1)U(a_2)$$
$$= U^\dagger(a_2)(X_I + a_1)U(a_2)$$
$$= X_I + a_1 + a_2 \qquad (1\text{—}14)$$

가 되므로 우리는

$$U(a_1)U(a_2) = U(a_1 + a_2) \qquad (1\text{—}15)$$

가 成立함을 알 수 있다. 類似한 方法으로 一般性의 상실없이 $U(o)$는 恒等演算子 I와 같이 둘 수 있다. 그런데 unitay 演算子는 S를 Hermitian 演算子라 할 때

$$U = e^{is} \qquad (1\text{—}16)$$

로 表示할 수 있으므로 (1—15)식과 $U(0) = I$라는 事實을 利用하여

$$U(a) = e^{-\frac{i}{\hbar} a \cdot D} \qquad (1\text{—}17)$$

로 쓸 수 있다. 演算子 D는 無限小變分을 取함으로써 쉽게 찾을 수 있으며 우리는 이 演算子 D가 다음 交換關係式을 滿足함을 證明할 수 있다.

$$[D_i, X_{Ii}] = -i\hbar\delta_{ii}' \qquad (1\text{—}18)$$

$$[D_i', P_{Ii}] = 0 \qquad (1\text{—}19)$$

따라서 Hermitian 演算子인 D를 系의 全運動量 演算子로 잡아도 矛盾이 없을 것이다. 즉

$$D = \sum_{I=1}^{n} P_I = P_T \qquad (1\text{—}20)$$

이다. 따라서 $U(a)$는

$$U(a)=\lim_{n\to\infty}[U(\frac{a}{n})]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}[1-\frac{i}{\hbar}\frac{a}{n}P_T]^n$$

$$=e^{-\frac{i}{\hbar}P_T\cdot a} \qquad (1\text{—}21)$$

로 表現해도 좋다. 지금 (1—4)식의 變換된 狀態가(1—3)식의 Schrödinger 方程式의 解가 되느냐를 알기 위하여 (1—3)식의 양변에 $U(a)$를 곱하고 $U^{+}(a)U(a)=1$을 $|\Psi(t)>$의 왼쪽에 넣으면

$$[U(a)H(P_I, X_I)U^{-1}(a)]U(a)|\Psi(t)>=i\hbar\frac{d}{dt}U(a)|\Psi(t)> \qquad (1\text{—}22)$$

가 된다. 따라서

$$U(a)H(P_I, X_I)U^{-1}(a)=H(P_I, X_I-a, t)=H(P_I, X_I, t) \qquad (1\text{—}23)$$

이다. 또는

$$[U(a), H]=0 \qquad (1\text{—}24)$$

여 되어 空間移動不變에 대한 要求는 滿足되었다.

Ⅱ. Space Rotation Invariance

量子力學에서 空間廻轉不變이란 (1—3)식으로 表現되는 Schrödinger 方程式의 모든 解에 대하여

$$|\Psi'(t)>=R(\hat{n}, \theta)|\Psi(t)> \qquad (2\text{—}1)$$

로 記述되는 空間廻轉된 解가 存在하여 이것이 Vector 算演子 V(例를들면 X, P, L, S)의 期待値를 $\hat{n}$方向으로 θ만큼 廻轉시킬 수 있는 것을 말한다. 물론 이때의 變換된 狀態 $\Psi'(t)$는

$$\langle\Psi'(t)|\Psi'(t)\rangle=\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle \qquad (2\text{—}2)$$

$$\langle\Psi'(t)|V|\Psi'(t)\rangle=R\hat{n}\theta(\langle\Psi(t)|V|\Psi(t)\rangle)$$
$$=\langle\Psi(t)|R\hat{n}\theta(V)|\Psi(t)\rangle \qquad (2\text{—}3)$$

를 滿足해야 한다. $R(\hat{n}\theta)$가 unitary 演算子라야 하므로

$$R^{+}(\hat{n}, \theta)VR(\hat{n}, \theta)=R_{\hat{n}\theta}(V) \qquad (2\text{—}4)$$

가 된다. $\hat{n}$에 대해 Q_1과 Q_2의 두번의 繼續的인 廻轉은

$$R^{+}(\hat{n}, \theta_2)[R^{+}(\hat{n}, \theta_1)VR(\hat{n}, \theta_1)]R(\hat{n}, \theta_2)$$
$$=[R(\hat{n}, \theta_1)R(\hat{n}, \theta_2)]^{+}V[R(\hat{n}, \theta_1)R(\hat{n}, \theta_2)]$$
$$=R^{+}(\hat{n}, \theta_1+\theta_2)VR(\hat{n}, \theta_1+\theta_2)$$
$$=R\hat{n}, \theta_1+\theta_2(V) \qquad (2\text{—}5)$$

가 되고 따라서

$$R(\hat{n}, \theta_1)R(\hat{n}, \theta_2)=R(\hat{n}, \theta_1+\theta_2) \qquad (2\text{—}6)$$

이다. R의 定義에 따라서 一般性의 상실없이 $R(\hat{n}, \theta)$은 恒等演算子 I와 같게 두어도 좋다. (2—6)식의 群特性은 이제 無限小의 廻轉으로부터 有限廻轉에 대한 R의 構成을 許容한다. $\hat{n}$에 대해서 $\delta\theta$로 無限小 廻轉을 行했을 경우에 우리는 $\delta\theta$에 關한 一次近似로

$$R(\hat{n}, \delta\theta)=I-\frac{i}{\hbar}\delta\theta\hat{n}\cdot J \qquad (2\text{—}7)$$

로 두자. 그런데 $R(\hat{n}, \theta)$가 Unitary이므로 $J(J_x, J_y, J_z)$는 Hermitian 演算子임을 알 수 있다. 이제

$$(R+VR)_j=\{1+\frac{i}{\hbar}\delta\theta\hat{n}\cdot J\}V_j\{1-\frac{i}{\hbar}\delta\theta\hat{n}\cdot J\}$$
$$=V_j+\frac{i}{\hbar}\delta\theta\sum_{k=1}^{3}n_k[J_k, V_j]$$
$$=V_j+\delta\theta(\hat{n}\times V)_j$$
$$=V_j+\delta\theta\sum_{k,m}\epsilon_{jkm}n_k V_m \qquad (2\text{—}8)$$

이 되는데 여기서 ϵ_{jkm}은 完全反對稱인 系에 대한 3階 Levi Civita 密度이다. 즉

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (i, j, k:\text{cyclic})\\ -1 & (i, j, k:\text{anticyclic})\end{cases} \qquad (2\text{—}9)$$

J_i와 Vector 演算子의 成分 V_i 사이의 交換關係는 (2—8)식으로부터 나온다.

$$[J_i, V_j]=i\hbar\sum_k\epsilon_{ijk}V_k \qquad (2\text{—}10)$$

인데 이것을 利用하면 다음 關係가 導出된다.

$$\{[J_i, J_j], V_k\}=i\hbar\sum_m\epsilon_{ijm}[J_m, V_k] \qquad (2\text{—}11)$$

그리고 V_k가 임의의 Vector 演算子이므로

$$[J_i, J_j]=i\hbar\sum_k\epsilon_{ijk}J_k \qquad (2\text{—}12)$$

여기서 J_i들은 Vector演算子의 成分들이다. 따라서 J_i와 全角運動量 演算子와는 同一한 交換關係를 滿足한다. 그러므로 J대신에 L을 써도 좋다. $\hat{n}$方向에 대한 θ의 有限한 廻轉에 대해서는

$$R(\hat{n}, \theta)=\lim_{N\to\infty}(1-\frac{i}{\hbar}\hat{n}L\frac{\theta}{N})^N \qquad (2\text{—}13)$$

$$=e^{-\frac{i}{\hbar}L\cdot\hat{n}\theta}$$

를 얻을 수 있다. $\Psi(t)$가 (1—3)식의 Schrödinger 方程式의 解라 할 때(2—1)식의 $\Psi(t)$도 Schrödinger 方程式의 解가 된다는 Hamiltonian H에 대한 條件을 決定하기 위해 (1—4)식의 양변에 R을 作用시켜 보자

$$[R\,H(P_I, X_I)R^{-1}]R|\Psi(t)>=i\hbar\frac{d}{dt}R|\Psi(t)> \qquad (2\text{—}14)$$

여기서 $R^{-1}R=I$가 導入되었다 .그러면

$$R\,H(P_1, X_1)R^{-1} = H(P_1, X_1) \qquad (2-15)$$

또는

$$[R, H] = 0 \qquad (2-16)$$

이 立되되어 空間廻轉不變條件은 滿足되었음을 알 수 있다.

Ⅳ. 結論 및 論議

우리는 (1—21)식에서 구한 演算子 U(a)와 (2—13)식에서 구한 $R\hat{n}, \theta$ 가 각각 空間移動不變과 空間廻轉不變에 이른다는 것을 證明했다.

끝으로 (1—24)식과 (2—16)식에서 각각 線運動量保存原理와 角運動量 保存原理가 導出됨을 證明하자. 單純化하기 위해 一次元만을 생각한다. $\Psi(x)$가 energy 固有値 E에 속하는 H의 固有函數라면 空間移動不變에 依하여 $\Psi(x+\epsilon)$도 같은 energy에 속하는 固有函數이다 따라서

Schrödinger 方程式은

$$H\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$H\Psi(x+\epsilon) = E\Psi(x+\epsilon)$$

인데 무한소 變分을 取하면

$$\Psi(x\epsilon) = \Psi(x) + \epsilon \frac{i}{\hbar} P\Psi(x)$$

가 되므로 따라서

$$H\Psi(x) + \epsilon \frac{i}{\hbar} HP\Psi(x) = E\Psi(x) + \epsilon \frac{i}{\hbar}$$

$$PE\Psi(x) = H\Psi(x) + \epsilon \frac{i}{\hbar} PH\Psi(x)$$

이다. 또는 다른 表現으로는

$$[P, H] = 0$$

이 되므로 系의 運動量은 空間移動에 대하여 保存된다. 같은 方法으로 우리는(2—16)식에서

$$[L, H] = 0$$

을 얻을 수 있는데 이것을 廻轉不變 Hamiltonian에 대한 角運動量의 保存原理를 말하는 것이다.

以上에서 우리는 空間移動과 廻轉에 關한 演算子를 찾아서 이들 演算子方程式이 保存原理에 대응하는 演算子임을 알 수 있었다.

Ⅴ. 摘 要

量子力學에는 몇가지 不變理論이 있는데 그것은 空間移動不變, 空間廻轉不變, 時間反轉不變, Galilean 不變 그리고 荷電共軛變換 等이 있다.

이 중에서 空間移動不變과 空間廻轉不變은 量子力學에서 特別한 重要性을 갖는 것이다. 本論文에서는 앞에서 說明된 不變變換理論을 끌어낼 수 있는 유니터리 演算子를 찾아내고 線運動量과 角運動量이 保存됨을 證明하였다.

References

Anderson, 1971. Modern physics and quantum mechnics. W. B. Saunders Co. 254.

Chern, B. 1966. Invariance principles in classical and quantum mechanics. Rev Mod. Phys. 254.

Dam, H. V. and E. P. Wigner. 1966. Invariance principle. Rev. Mod. Phys. 37: 595.

Kemmer, N., J.C. Polkinghorne and D. L. Pursey. 1959. Invariance in elementary particle physics. Rept. Prog. Phys. 22:336.

Tinkham, M. 1964. Group theory and quantum mechanics. McGraw-Hill Book Co. 95.

Wigner, E. P, Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra. Academic Press Inc., New York, Chaps. 26.