線型變換에 의하여 變型된 圖形의 面積 또는 體積의 硏究

姜 永 植* · 高 鳳 秀**

The Study of Area or Volume of Manifolds Mapped by Linear Transformations

Kang, Young-Sik · Ko, Bongsoo

Abstract

In this thesis, the comparison of area or volume of manifolds mapped by linear transformations is studied. Especially, the volume of 3-dimensional manifolds mapped by linear transformation and the area of 2-dimensional manifolds mapped by diagonal matrix are studied.

緖 論

中學校 敎科書에 圖形의 變換이란 커다란 單元 아래 變換, 合同變換, 닮음變換들이 다루어진 때가 있었다. 合同變換에서는 變型된 圖形과 變型되기 前 圖形의 面積(또는 體積)들은 변하지 않는다. 그러나 닮음變換에서는 變型된 圖形과 變型되기 前 圖形의 面積(또는 體積)들은 변한다. 더욱이 "닮은圖型의 面積의 比는 닮음比의 제곱과 같다." 또 "닮은 두

* 한림종합고등학교
** 제주대학교 사범대학 수학교육과

立體圖形의 表面積의 比는 닮음比의 제곱과 같고 體積의 比는 닮음比의 세제곱과 같다." 여기서 다음과 같은 疑問點이 發生한다.

疑問點 : 두 圖形의 닮음比는 없고 單純히 座標에 의한 變換만 알 수 있을 때 두 圖形의 面積(또는 體積)의 變化는 알 수 있을까?

高鳳秀 敎授(Ph. D)의 言及에 따른다면 現在까지 많은 數學者들이 위의 疑問點을 解決하려고 努力하고 있으며, 微分幾何學的 立場에서 多變數 函數의 微分과 重積分을 利用하여 一般的인 微分可能한 變換에 의하여 變型된 圖形의 面積(또는 體積)을 積分 形態로 表現하고 있다는 事實을 알 수 있다. 그러나 函數를 積分한다는 事實은 굉장히 까다롭기 때문에 積分을 하지 않고 두 圖形의 面積을 비교할 수 있다는 事實은 數學的으로도 커다란 意味를 가지며 이러한 分野의 硏究는 未來에도 繼續할 만한 價値가 있다고 역시 言及한다. 特히 微分幾何學에서 가우스 函數(GAUSS MAP)에 의하여 2-次元 微分可能 多樣體上의 圓이 射影되었을 때 變化된 圓의 面積과 變換되기 이전의 圓의 面積의 比들의 極限값이 多樣體의 曲率(CURVATURE)을 나타낸다.

本 論文에서는 視覺的으로 人間의 思考로 느낄 수 있는 部分인 平面圖形과 立體圖形들의 어떤 線型變換(LINEAR TRANSFORMATION)에 射影되었을 때 面積의 變化, 表面積의 變化, 體積의 變化를 硏究한다. 硏究하는 데 必要한 주된 數學的 內容들은 行列(MATRIX)과 行列式(DETERMINENT)과 極限槪念(CONCEPT OF LIMIT)들을 使用한다. 使用되는 內容들이 아주 初步的인 數學的 內容들이기 때문에 中學校 또는 高等學校 數學學習 現場에서 본 論文의 內容을 약간의 技巧를 使用하면 쉽게 紹介할 수 있다고 본다. 合同變換과 닮음變換은 線型變換의 아주 特別한 境遇이므로 본 硏究의 目的에 대한 意義를 中學校 또는 高等學校 數學 學習內容 중에서 圖形의 變換에 대한 內容을 多變數 函數의 微分과 積分 理論을 使用하지 않고 中學生 혹은 高等學生들이 쉽게 理解할 수 있는 事實들을 利用하여 部分的으로 擴張하는 것으로 한다.

本 論文의 第一章에서는 本 論文에서 使用되는 數學的인 定義 및 定理들을 紹介한다.

本 論文의 第二章에서는 3-次元 유클리디안 空間(EUCLIDEAN SPACE)上에서 體積을 갖는 圖形이 어떤 線型變換(LINEAR TRANSFORMATION) 3 × 3 行列(MATRIX)에 의하여 寫像되었을 때 두 圖形의 體積의 變化의 比를 얻는다. 여기서 使用되는 證明方法은 一般的인 n-次元 유클리디안 空間(EUCLIDEAN SPACE)上에서 n-次元 體積을 갖는 圖形을 線型變換 n × n 行列에 의하여 射影(MAPPING)되었을 때의 體積의 變化의 比를 얻는 데도 어려움 없이 適用이 可能하다.

本 論文의 第三章에서는 2-次元 유클리디안 空間上에서 面積을 갖는 圖形이 3 × 2 行

列에 의하여 3-次元 유클리디안 空間上으로 射影되었을 때 面積의 變化의 比를 얻는다. 이 結果를 利用하여 3-次元 유클리디안 空間上에서 2-次元 多様體(MANIFOLD)를 3 × 3 行列에 의하여 3-次元 유클리디안 空間上으로 射影되었을 때의 그 多様體의 面積의 變化를 硏究한다. 여기서 使用된 證明方法으로 一般的인 n-次元 유클리디안 空間上에서 2-次元 多様體를 n × n 行列에 의하여 射影된 多様體와 서로 面積을 比較할 수 있다.

第一章 數學的인 定義와 定理들

本 論文에서 n과 N은 自然數이다.

n-次元 (유클리디안) 空間은 可能한 모든 點(x_1, x_2,…, x_n)들의 集合으로서 〔여기서, x_i는 實數(REAL NUMBER)〕 덧셈

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

스칼라 곱(SCALAR PRODUCT)

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$$

內積(INNER PRODUCT)

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \cdots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

이 定義되고, 덧셈과 스칼라 곱에 의하여 벡터 空間(VECTOR SPACE)〔參考文獻 3〕이 되며 標準基底(STANDARD BASIS)〔參考文獻 3〕

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

를 갖는다. 그 空間을 一般的으로 R^n이라고 表示한다.

R^n의 部分集合 D의 한 點 x가 D의 內部點(INTERIOR POINT)이라는 定義는 x에 充分히 가까운 모든 點들이 D에 包含된다. 그리고 D의 內部(INTERIOR)는 D의 모든 內部 點들로 이루어진 集合이다.

3-次元 空間上의 두 點(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)에 대하여 다음 記號를 定義한다.

$$|(a_1, b_1, c_1) \wedge (a_2, b_2, c_2)| = [(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

n-次元 유클리디안 空間에서 2-次元 多様體는 국소적으로(LOCALLY) 2-次元 유클리디안 空間이다. 〔參考文獻 1〕

〔基本定理 1〕 線型函數 $L : R^n \rightarrow R^n$은 標準基底에 따른 $n \times n$ 行列로 表示된다. 〔參考文獻 3〕

이러한 까닭에 그 行列의 行列式을 L의 行列式이라고 부른다.

〔基本定理 2〕 두 個의 正方形 行列의 곱에 대한 行列式은 각각의 行列式의 곱과 같다. 〔參考文獻 3〕

〔基本公式 1〕 原點을 하나의 꼭지점으로 갖는 四面體의 체적은 (1/6)과 원점이 아닌 꼭지점들로 이루어진 行列의 行列式의 絶對値와의 곱이다. 〔參考文獻 4〕

〔基本定理 3〕 基底를 變換하여 나타나는 線型函數 L의 行列은 標準基底에 따른 行列과 유사(SIMILAR)하다. 따라서 行列式의 값은 변하지 않는다. 〔參考文獻 3〕

第2章 3×3 行列에 의하여 體積을 갖는 圖形을 變型시킬 때

本 章에서 주된 關心은 3-次元 유클리디안 空間上에서 3-次元 體積을 갖는 圖形을 3×3 行列에 의하여 射影될 때, 射影된 圖形과 射影되기 이전의 圖影의 體積의 比를 行列의 基本 性質, 行列式의 基本 性質 그리고 極限 槪念만을 사용하여 다음 定理에서 구한다.

〔定理1〕 有界集合 D를 3-차원 유클리디안 空間上에서 體積을 갖는 圖形이라고 하고, 함수 $L : R^3 \rightarrow R^3$은 線型變換이라 한다. 그러면

$$L(D)\text{의 體積} = |L\text{의 行列式}| \times \{D\text{의 體積}\}$$

(證明) L이 線型變換이므로 제 1 장의 基本定理 1에 의하여 標準基底(STANDARD BASIS)에 관한 行列로 表現 可能하다. 그 行列 A를 다음과 같이 表現된다고 假定한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

集合 D는 體積을 갖는 有界集合이므로 有限個의 四面體의 體積들을 사용하여 D의 內部와 外部로부터 近似的으로 D의 體積을 計算할 수 있다. 이러한 까닭에 우선 D가 四面體인 경우에 定理1의 結果를 證明한다.

(境遇 1) D가 四面體이고 한 꼭지점이 原點에 있을 때 다른 3개의 꼭지점을 $P_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = 1, 2, 3$이라고 한다. 그 3개의 꼭지점을 이용하여 다음 行列 U를 만든다.

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

第一章에 있는 四面體의 體積을 구하는 基本公式 1 에 의하면 集合 D의 體積은 다음과 같이 計算된다.

(1) ……………… D의 體積 = (1/6) × |(U의 行列式)|

線型變換 L은 四面體 D를 原點을 하나의 꼭지점으로 하는 다른 四面體 D′ 으로 對應시킨다. 만약 나머지 꼭지점들을 $P'_j = (x'_j, y'_j, z'_j)$이라고 하면 그 3개의 꼭지점을 利用하여 다음 行列 U′ 을 얻는다.

$$U' = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 \end{bmatrix}$$

$L(P_j) = P'_j$, $j = 1, 2, 3$이므로, 다음 行列方程式을 얻는다.

$$U' = AU$$

第一章에 있는 正方形 行列들의 곱에 대한 行列式은 각각의 行列式의 곱과 같다는 基本定理 2 에 의하여 다음 等式을 걷는다.

(2) ……………… (U′의 行列式) = (A의 行列式) × (U의 行列式)

式 (1)과 (2)에 의하여,

(3) ……………… D′의 體積 = (1/6) × |(U′의 行列式)|

= (1/6) × |(A 行列式) × (U의 行列式)|

= |(A의 行列式)| × (D의 體積)

여기서 D의 4個의 꼭지점이 모두가 原點이 아닌 境遇는 D를 平行移動시켜서 4個의 꼭지점 중 어느 하나를 原點이 되도록 만들 수 있다. 平行移動에서는 體積이 변하지 않으므로 위의 公式 (3)이 一般的인 四面體에 대하여도 成立한다.

(경우 2) 集合 D가 四面體가 아닐 때

集合D가 有界集合이므로 임의의 自然數 N에 대하여 N個의 四面體 D_j ($j = 1, 2, \cdots,$

N) 가 다음 條件을 滿足하면서 存在한다.

$$(D_j \text{ 의 内部}) \cap (D_i \text{ 의 内部}) = \phi, \quad (i \neq j)$$

$$D_i \cap D \neq \phi, \quad (i \neq 1, 2, \cdots, N)$$

N이 無限히 커짐에 따라 D_i 들의 體積중 가장 큰 數가 영으로 接近한다.

極限의 槪念으로 體積을 定義할 때 集合 D의 體積은 다음과 같다.

$$D\text{ 의 體積} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(D_i\text{ 의 體積})$$

따라서

(4) ………………

$$\begin{aligned}&(A\text{의 行列式}) \times (D\text{의 體積})\\ &= (A\text{의 行列式}) \times \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(D_i\text{ 의 體積})\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}[(A\text{의 行列式}) \times (D_i\text{ 의 體積})]\end{aligned}$$

行列 A에 의하여 四面體 D_i 는 四面體 D_i' 으로 射影되므로, 境遇 1 의 結果를 利用하면,

$$\begin{aligned}&(A\text{의 行列式}) \times (D\text{의 體積})\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(D_i'\text{ 의 體積})\end{aligned}$$

N이 無限大로 接近함에 따라 四面體 D들의 體積 중 가장 큰 數가 영으로 接近하므로, 境遇 1 의 結果를 利用하면 四面體 D_i' 들의 體積 중 가장 큰 數도 역시 영으로 接近한다. 따라서 極限에 立脚한 面積의 定義에 의하여 본 定理의 結果인 다음 等式을 얻는다.

$|(A\text{의 行列式})| \times (D\text{이 體積}) = (D'\text{의 體積}) = (L(D)\text{의 體積})$.

(證明 끝)

〔參考 1 〕 위의 定理 1 을 살펴보면 線型函數 L (또는 行列 A)의 幾何學的 意味를 알 수 있다. 만약 A의 行列式이 영이면 體積을 갖는 有界集合 D에 대한 射影 L(D)의 體積은 영이다. 이 事實로부터 線型函數 L(또는 行列 A)은 體積을 갖는 圖形들을 어떤 曲面 (SURFACE) 또는 曲線 또는 한 點으로 射影시킨다는 事實을 類推解釋이 된다.

〔參考 2 〕 위의 定理 1 의 證明過程에서 線型函數 L에 대한 行列 A의 表現을 標準基底를 利用한 行列表現을 使用하였다. 一般的으로 유클리디안 空間上의 基底를 變型하면 行列의 表示도 變型된다. 그렇다면 定理 1 의 結果가 變型될 것 같지만, 第一章의 基本定理 2 와

基本定理 3을 利用하면 定理1의 結果는 변하지 않음을 알 수 있다.

〔參考3〕 위의 定理1 表現에서 集合 D는 有界集合이라고 한정하였지만, 事實上 證明過程에서 보면 集合 D가 有界가 아니더라도 體積을 갖기만 하면, 無限個의 四面體들을, 즉 임의의 自然數 N에 대하여 體積이 1/N보다 적은 無限個의 四面體들을 利用하면, 體積이 陽數이므로 合(SUMMATION)과 極限記號를 서로 位置를 變更시킬 수 있으므로, 定理1의 結果를 마찬가지로 얻을 수 있다.

第3章 3×3 行列에 의하여 體積을 갖는 圖形을 變換시킬 때

本 章에서 주된 關心은 3-차원 유클리디안 空間上에서 2-차원 多樣體를 3×3 行列에 의하여 射影될 때, 射影된 多樣體와 射影되기 이전의 多樣體의 面積의 比를 行列의 基本 性質, 그리고 極限槪念만을 사용하여 硏究한다.

우선 2-차원 유클리디안 空間上에서 面積을 갖는 도형을 3×2 行列에 의하여 射影되었을 때 面積의 變化의 比는 다음 定理에서 얻는다.

〔定理2〕 有界集合 D를 2-차원 유클리디안 空間上에서 面積을 갖는 圖形이라고 하고, 函數 $L : R^2 \rightarrow R^3$은 線型變換이라 한다. 그리고 그 線型變換은 다음과 같은 行列 表現을 갖는다고 한다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

그러면

$$L(D)\text{의 面積} = (D\text{의 面積}) \times |(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|$$

(證明) 2-차원 상의 有界集合 D의 面積은 有限個의 直四角形들의 面積들을 이용하여 D의 面積을 內部와 外部로부터 近似的으로 計算할 수 있다. 그런 까닭에 우선 D가 直四角形인 경우에 定理 2의 결과를 證明한다.

(경우1) 直四角形 D의 한 꼭지점이 原點에 있을 때

四邊形 D의 꼭지점들을 (0,0), (a,0), (0,b), (a,b)라고 하자. 線型變換 L은 四變形

D를 平行四邊形 L(D)로 대응시킨다. 平行四邊形 L(D)의 꼭지점은 (0,0,0), $a(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $b(a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $a(a_{11}, a_{21}, a_{31})+b(a_{12}, a_{22}, a_{32})$임을 알 수 있다. 그리고 四邊形 D의 面積은 $|ab|$ 이다. 또 平行四邊形 L(D)의 面積은 $|a(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge b(a_{12}, a_{22}, a_{32})|$ 임을 알 수 있다. 따라서,

(5) ……………… $$L(D)\text{의 面積} = |ab|\,|(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})| = (D\text{의 面積}) \times |(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|$$

參考的으로 直四角形 D의 꼭지점들이 모두 原點이 아닌 경우에도 식 (5)가 성립한다. 왜냐하면 直四角形 D를 꼭지점들 중 어느 하나가 原點이 되도록 平行移動시켰을 경우에 面積은 변하지 않는다.

〔境遇 2〕 有界集合 D가 直四角形이 아닐 때

圖形 D가 有界集合이므로 임의의 自然數 N에 대하여 N個의 直四角形 D_i가 다음 條件을 滿足하면서 存在한다.

$(D_i\text{의 內部}) \cap (D_j\text{의 內部}) = \phi$, $(i \neq j)$

$D_i \cap D \neq \phi$, $(i=1, 2, \cdots, N)$

自然數 N이 無限大로 接近함에 따라 D_i의 面積들 중 가장 큰 數가 영으로 接近한다.

面積의 定義에 의하여,

$$D\text{의 面積} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(D_i\text{의 面積})$$

따라서,

$$\begin{aligned}&(D\text{의 面積}) \times (|(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|)\\ &= [\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(D_i\text{의 面積})] \times (|(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}[(D_i\text{의 面積}) \times (|(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|)]\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}[L(D_i)\text{의 面積}].\end{aligned}$$

自然數 N이 無限히 커짐에 따라, 直四角形 D_i의 面積들 중 가장 큰 數가 無限히 작아지

고 式(5)에 의하여 平行四邊形 $L(D_i)$의 面積들 중 가장 큰 數도 無限히 작아진다. 따라서 面積의 定義에 의하여,

$$L(D)\text{의 面積} = (D\text{의 面積}) \times (|(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \wedge (a_{12}, a_{22}, a_{32})|)$$

(證明 끝)

다음 例題들은 中學校 數學學習 敎室과 高等學校 數學學習 敎室에서 實驗的으로 問題를 解決하도록 學習者들을 誘導할 수 있는 問題들이다.

〔例題 1〕 (中學校 水準에서 解決하도록 誘導할 수 있는 問題)
面積이 1인 圖形을 다음 關係式에 의하여 變換된 圖形의 面積을 구하여라.

$$X' = 2X$$
$$Y' = 2Y$$

(答) 우선 위의 變換은 닮음變換이 아니므로 變型된 圖形과 變型되기 이전의 圖形의 面積의 比는 中學校 水準으로 解決하기는 어렵다. 그러나 關係式에서 誘導되는 行列과 行列式을 說明하고 面積의 定義를 說明하면 定理 1의 結果에 의하여 答은 6이라는 것을 理解시킬 수 있다고 본다.

〔例題 2〕 (高等學校 水準에서 解決하도록 誘導할 수 있는 問題)
面積이 1인 圖形을 다음 關係式에 의하여 變換된 圖形의 面積을 구하여라.

$$\begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y \\ Z' = X + Y \end{cases}$$

(答) 關係式에서 誘導되는 行列과 行列式을 說明하고, 3-次元 空間上에서 平行四邊形의 面積을 구하는 公式과 面積의 定義를 說明하면 高等學校 水準에서 定理 2를 利用하여 面積의 比는 1 : 7이라고 理解시킬 수 있다고 본다.

〔參考〕 定理 2의 結果를 利用하여, 3-次元 空間上에서 2-次元 多樣體를 射影行列 (PROJECTION MATRIX)과 交換可能한 3×3 對角行列 (DIAGONAL MATRIX)에 의하여 射影되었을 때, 射影되기 이전의 多樣體의 面積과 射影된 多樣體의 面積을 比較硏究한다. 간단한 推論에 의하여 그 面積들의 比도 역시 定理 1처럼 비슷한 公式을 얻을 수 있으리라 생각될 수도 있다. 그러나 다음의 例를 보면 그러하지 않다는 事實을 알 수 있다.

〔例題〕 다음과 같은 線型變換

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

에 의하여 合同인 두 三角形을 寫像시켰을 境遇에 寫像된 두 三角形들은 다른 面積들을 가질 것이다. 즉 이러한 事實은, 위의 面積의 變化는 線型變換에 의해서도 從屬되지만, 三角形의 놓여있는 位置에도 支配를 받는다는 事實을 알 수 있다.

〔定義〕 3-次元上의 2-次元 多樣體 M이 다음 條件을 滿足하면 嗜好多樣體 (ATTRACTIVE MANIFOLD)라고 부른다.

(i) XY-平面과 垂直으로 만나는 임의의 直線과 多樣體 M은 기껏해야 한 點에서 만난다.

(ii) YZ-平面과 垂直으로 만나는 임의의 直線과 多樣體 M은 기껏해야 한 點에서 만난다.

(iii) ZX-平面과 垂直으로 만나는 임의의 直線과 多樣體 M은 기껏해야 한 點에서 만난다.

〔例題〕 3-次元上에서 임의의 平面은 嗜好多樣體라고 부를 수 있다.

〔定義〕 3-次元 空間上에서 3×3 射影行列은 다음과 같이 定義한다.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

〔定義〕 3-次元 空間上에서 3×3 對角行列은 다음과 같은 모양을 가진 3×3 行列들이라고 定義한다.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

〔參考〕 行列들의 곱셈 演算上에서 위의 射影行列들과 對角行列들은 서로 交換(COMMUTATIVE) 可能하다는 事實은 간단히 計算하여 보면 알 수 있다. 本 論文 이하에서 P_1, P_2, P_3는 射影行列로 본다.

〔補助定理〕 3-次元 空間上의 임의의 平行四邊型 S의 面積은 다음과 같이 表現 可能하다.

$$S\text{의 面積} = [(P_1(S)\text{의 面積})^2 + (P_2(S)\text{의 面積})^2 + (P_3(S)\text{의 面積})^2]^{\frac{1}{2}}$$

(證明) 平行四邊形 S의 꼭지점들 중 하나는 原點에 있다고 假定하고, 原點과 인접한 나머지 꼭지점을 각각 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)라고 하자. 平行四邊形의 面積을 구하는 公式에 의하여 그 面積은 다음과 같이 表現된다.

$$S\text{의 面積} = [(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

여기서, $P_1(S)$는 꼭지점을 原點과 $(a_1, b_1, 0)$과 $(a_2, b_2, 0)$를 갖는 平面四邊形이 된다. 따라서 그 面積은 $|a_1b_2 - a_2b_1|$ 이다. 마찬가지 방법으로 $P_2(S)$와 $P_3(S)$의 面積도 각각 $|a_1c_2 - a_2c_1|$, $|b_1c_2 - b_2c_1|$ 으로 계산된다. 따라서, 각각을 윗식에 대입하면 補助定理의 結果를 얻을 수 있다. 平行四邊形의 꼭지점들 중 어느 하나도 原點이 아닌 경우에도, 하나의 꼭지점을 原點으로 平行移動시킬 수 있다. 平行移動은 射影行列에 의하여 面積이 변하지 않으므로, 一般的인 平行四邊形인 경우에도 윗식이 成立한다. (증명 끝)

〔定理 3〕 3-次元 空間上에서 有界의 2-차원 多樣體 S가 嗜好多樣體라고 하자. 그리고 A를 다음과 같은 對角行列이라고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad abc \neq 0$$

그러면 다음 等式이 成立한다.

$$[A(S)\text{의 面積}]^2 \leq [bc(P_3(S)\text{의 面積})]^2 + [ac(P_2(S)\text{의 面積})]^2 + [ab(P_1(S)\text{의 面積})]^2$$

(證明) 2-次元 多樣體가 有界이므로 有限個의 平行四邊形들의 面積을 사용하여 다양체 S의 面積을 近似的으로 計算할 수 있다. 그러므로, 임의의 자연수 N에 대하여 N개의 平行四邊形 D_i가 다음 條件을 만족하면서 存在한다.

$$(D_i\text{의 內部}) \cap (D_j\text{의 內部}) = \phi, \quad (i \neq j)$$

$$D_i \cap S \neq \phi \quad (i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N)$$

自然數 N이 無限大로 커짐에 따라 D_i들의 面積들 중 가장 큰 수가 영으로 접근한다.

자연수 N이 무한대로 커짐에 따라 D_i들은 S로 접근한다.

여기서, 面積의 定義에 의하여

$$〔S의\ 面積〕^2 = 〔\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (D_i 의\ 面積)〕^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} 〔\sum_{i=1}^{N} \{〔P_1(D_1)의\ 面積〕^2 + 〔P_2(D_i)의\ 面積〕^2 + 〔P_3(D_i)의\ 面積〕^2\}〕^2 \leqq 〔P_1(S)의\ 面積〕^2 + 〔P_2(S)의\ 面積〕^2 + 〔P_3(S)의\ 面積〕^2$$

반면에, 行列 A가 逆可能行列이므로, A(S)도 역시 嗜好多樣體가 된다.

따라서,

$$〔A(S)의\ 面積〕^2 \leqq 〔P_1(A(S))의\ 面積〕^2 + 〔P_2(A(S))의\ 面積〕^2 + 〔P_3(A(S))의\ 面積〕^2$$

$$= 〔A(P_1(S))의\ 面積〕^2 + 〔A(P_2(S))의\ 面積〕^2 + 〔A(P_3(S))의\ 面積〕^2$$

그리고,

$$A(P_1(S))의\ 面積 = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} 〔A(P_1(D_i)의\ 面積〕$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} 〔|ab|(P_1(D_i)의\ 面積〕$$

$$= |ab| \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} 〔P_1(D_i)의\ 面積〕$$

$$= |ab| 〔P_1(S)의\ 面積〕$$

마찬가지로, 다음과 같은 등식들도 成立함을 알 수 있다.

$$A(P_3(S))의\ 面積 = |bc| 〔P_3(S))의\ 面積〕$$

$$A(P_2(S))의\ 面積 = |ca| 〔P_2(S))의\ 面積〕$$

따라서, 제곱하여 서로 더하면 定理 3의 結果를 얻는다. (證明 끝)

〔따름定理〕 2-차원 多樣體가 有限個의 嗜好多樣體의 合으로 表現 可能하다면 定理3의 等式을 合이 들어있는 式으로 변형 가능하다.

〔參考〕 本 論文에서는 對角行列에 의해서만 變型된 2-차원 多樣體의 面積의 變化의 比를 硏究하였다. 對角行列이 아닌 경우에 또는 射影行列과 交換 可能하지 않는 경우에도 硏究하여 볼 만한 價値가 있다고 본다.

〔例題〕 3-차원 空間上에서 表面積이 π인 공을 다음 關係式에 의하여, 變換될 때, 變換된 도형의 表面積은 어떠한가?

$$\begin{cases} X' = 2X \\ Y' = -2Y \\ Z' = -2Z \end{cases}$$

위의 變換은 닮음變換은 아니다. 그러나 特別히 變型되는 圖形이 原點이 中心인 경우에는 닮은 圖形이 된다. 定理3 또는 따름定理에 의하면 변형된 圖形의 表面積은 $\sqrt{3}\pi^2$ 보다 작다.

結 論

3-次元 空間上에서 線型變換 또는 3×3 行列에 의하여 體積을 갖는 圖形을 變換시켰을 때, 變換된 圖形의 體積은 行列의 行列式의 絶代値와 變換되기 이전의 圖形의 體積의 곱이다.

3-次元 空間上에서 對角行列(逆可能)에 의하여 面積을 갖는 圖形을 變換시켰을 때, 變換된 圖形의 面積은 射影行列들을 이용한 合으로 表現 可能하다.

3-次元 空間上에서 一般的인 行列(逆可能이고 射影行列과 交換可能함)들에 의하여 面積을 가진 圖形을 變換시켰을 때 變換된 도형의 面積을 射影行列들을 利用하여 表現 可能한지 여부는 未解決이다.

中學校, 高等學校 數學敎材 單元, 圖形의 硏究에서 寫像, 寫像의 效果, 面積, 體積 등의 數學的 意味와 變化를 學習者에게 理解시킬 수 있다고 본다.

參 考 文 獻

〔1〕 W. M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd Ed., Academic Press, 1986.

〔2〕 C, Buck, Advanced Calculus, McGraw-Hill, 1978.

〔3〕 D. T. Finkbeiner, Ⅱ, Introduction to Matrices and Linear Transformations, 2nd Ed., W. H. Freeman and Company, 1966.

〔4〕 E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 5th Ed., John Wiley and Sons, 1983.