科學敎育, 10, 79~94, 1993
Journal of Science Education
10, 79~94, 1993

인플레이션 우주의 초기값

강동식* · 강정우*

The Initial Values of Inflation Model

Kang, Dong-Shik and Khang, Jeong-Woo

Abstract

Using the action written in Einstein conformal frame, and the Vilenkin's tunneling boundary condition and the Hartle-Hawking's no boundary condition, we obtain the wave functions of the universe in a semiclassical region. From the probability distribution obtained from those wave functions the initial values of scalar field and matter field are investigated.

Following the Vilenkin's boundary conditon, the initial value of scalar field, $G\phi \sim (G^2 V_{max})^{1/(2-n)}$, the initial value of matter field is such that $V(x) \sim V_{max}$, where G is the Newton's gravitational constant, $V(x)$ is the potential. When the values of fields are such above, the inflation is most probable. On the other hand, following the Hartle-Hawking's no boundary condition, the initial value of scalar field, $\Phi \sim \Phi_{max}$, the initial value of matter field x is such that $V \sim V_{min}$. In general the energy density of the false vacuum $\rho_F \sim 10^{14}$ GeV and $V_{min} < \rho_F$, therefore the Hartle-Hawking's no boundary condition is not appropriate for determining the initial values of fields for sufficient inflation.

* 제주대학교 사범대학 과학교육과

제1장 서 론

양자 우주론(quantum cosmology)은 우주를 파동함수로 기술한다. 이 파동함수로부터 우주가 어떤 형태로 생겨나서 어떻게 진화해 나가는가를 기술하고자 하는데 그 목적이 있으나 현재 정확한 이론이 나오고 있지 않다. 따라서 기존의 Einstein의 중력이론을 양자화시켜서 파동함수를 구하는 방법을 사용하고 있으나 〔1〕, Einstein 이론은 에너지가 Planck 에너지보다 큰 경우, 척도인자(scale factor)가 Planck 길이보다 작은 경우에도 이 이론이 적용되는지는 아직 미지수다. 많은 연구자들이 이들 영역에서는 Einstein이론이 적용이 안되며 초현이론(Superstring theory)〔2〕이나 초중력이론(Supergravity theory)〔3〕이 이 영역의 현상들을 설명해 줄 것으로 기대하고 있다. 하지만 이들 이론들은 아직 여러가지 문제점들 때문에 물리현상을 설명하는데에는 적용되고 있지 못하고 있다. 결국은 Planck 에너지보다 작거나, Planck 길이보다 큰 영역에서는 Einstein의 중력이론에 근사식을 사용해서 파동함수를 구하게 된다. 이 중력이론을 양자화시켜서 나오는 방정식이 Wheeler−DeWitt 방정식(이하 WD방정식) 〔1, 4〕으로 이 방정식을 만족시키는 파동함수를 구하기 위해서는 다른 모든 경우와 같이 경계조건이 필요하다.

지금까지 제안된 경계조건으로 Vilenkin의 "무에서부터 우주 생성"(creation from nothing) 가설과〔5〕 Hawking−Hartle의 "무경계"(no boundary) 가설〔6〕 두 가지가 있다. Vilenkin의 가설은 우주는 고전적 시공간이 존재하지 않는 그러한 진공에서 우주가 탄생해서 양자도약(quantum tunneling)을 거쳐 팽창하여 어느 시점에서는 다시 수축해서 특이점(singular)이 되는 우주를 기술한다. 반면 Hawking과 Hartle의 경계조건은 우주에 대한 기술이 경계가 없는 조밀한(compact) 시공간 다양체(manifold)를 허수 시간계에서의 역사의 총합(sum over history)이론〔7〕을 이용해서 파동함수를 구하는 것으로 고전적으로 허용된 영역(계의 에너지가 포텐셜 에너지보다 큰 영역)에서 팽창과 수축하는 파동함수가 선형 결합된 형태로 나타난다. 이러한 경계조건을 이용하여 얻어낸 파동함수를 가지고 확률밀도를 구하여 물리적 변수들이 어떤 값을 취할 때 어떤 현상이 일어날 확률이 가장 큰가 하는 조건부 해석(conditional interpretation)을 가하게 된다〔8〕.

이 논문에서는 일반화된 JBD 이론(generalized JBD theory)〔9〕을 토대로 해서 파동함수를 구하고 그 파동함수로부터 확률밀도를 취해서 인플레이션 우주가 여러 장(field)들의 어떤 초기값들에서 일어날 확률이 가장 큰가에 대해서 알아본다. 인플레이션 우주〔10〕는 물리 변수들이 임의값에서도 무조건 발생하는 것이 아니라〔11〕 변수들이 어떤 범위의

값을 취할 때에 일어나는 현상이고 양자우주론의 목적들 중의 하나가 이러한 초기값들을 예측하는데 있다. Vilenkin의 경계조건을 만족하는 확률밀도로부터 scalar장의 초기값은 포텐셜의 최대값의 함수로 표시되고, 물질장의 초기값은 포텐셜이 최대가 될 때의 값으로 이 경우 인플레이션이 일어날 확률이 가장 크다. Hawking과 Harele의 경계조건을 만족하는 확률 밀도에서는 scalar장의 값이 최대일때, 그리고 포텐셜 값을 최소가 되도록 하는 물질장의 값에서 인플레이션이 일어날 확률이 최대가 된다.

이 논문에서 Einstein의 중력이론을 표준 Hamiltonian 형식화에 입각해서 WD 방정식을 구하고 minisuperspace에서[1, 4] WKB근사적 방법을 이용, 파동함수를 두개의 경계조건에 따라서 구하고 이 파동함수들을 이용하여 확률밀도를 정의하여, 다시 확률밀도로부터 인플레이션이 잘 일어날 수 있는 σ와 χ의 초기값 및 알맞은 형태의 포텐셜들에 대해서 알아본다.

제 2 장 Hamiltonian 형식화

Jordan 계[12]에서 일반화된 JBD 작용은 다음과 같다:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \frac{1}{16\pi}(\Phi \tilde{R} - \frac{\omega}{\Phi} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \Phi^n \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\chi} \partial_\nu \chi - \Phi^m \tilde{V}(\tilde{\chi}) \right. \tag{2-1}$$

여기서 $\tilde{g}_{\mu\nu}$는 시공간 계량텐서, $\tilde{g}$는 시공간 계량텐서의 행렬식, $\tilde{R}$는 곡률 스칼라(curvature), ω는 매개변수로서 관측에 의하면 500보다 큰 수치를 취하며, Φ는 JBD스칼라 장, n과 m은 상호작용의 정도를 나타내는 매개변수, $V\chi$는 포텐셜 에너지이다. 작용 S에서 n이 영이면 물질장 $\tilde{\chi}$는 계량텐서 $\tilde{g}_{\mu\nu}$로 주어지는 시공간에서 측지선을 따라 운동하며 JBD스칼라장 Φ는 중력장과 비정상적 상호작용을 한다. 약한 중력하에서 작용은 질량이 없고 스핀이 2인 중력장 방정식을 도출해야 하는데 위에 주어진 작용으로부터는 올바른 중력장 방정식이 얻어지지 않는다[12]. 계량텐서 $\tilde{g}_{\mu\nu}$를 등각 변환시키고 변환인자를 곡률 스칼라와 상호작용을 표현하는 JBD스칼라장을 흡수하도록 택하므로서 작용을 Einstein 등각계에서의 작용으로 바꿀 수 있다.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\sigma} g_{\mu\nu}, \qquad \Phi = \frac{1}{G} e^{-2\alpha\sigma} \tag{2-2}$$

여기서 $e^{2\alpha\sigma}$는 변환인자로 σ는 확장장, α는 매개변수, G는 Newton의 중력상수와 같은 값을 갖는다. σ를 확장장이라 하는 이유는 σ를 일정한 값 만큼 변환시켰을 때 계량텐서가 일정하게 확장된다는데 있다. 식(2-2)의 변환 하에서 작용(2-1)은

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - e^{-P\sigma}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - e^{-Q\sigma}V(\chi)\right\} \tag{2-3}$$

와 같이 되며,

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G}{2\omega+3}, \quad \chi = G^{n/2}, \quad \hat{V} = G^m V$$
$$P = (n-3)2\alpha, \quad Q = (m-2)2\alpha \tag{2-4}$$

로 각각 치환하였다.

등각변환 하에서는 물리법칙이 불변이므로 작용(2-1)과 작용(2-3)은 동등하다. 하지만 약한 중력장하에서 이론을 근사시킬때 작용(2-3)은 올바른 중력장을 기술하므로 Einstein 계를 물리적인 계로 볼 수 있다. 작용(2-3)에서는 JBD 스칼라장 Φ에 대응되는 확장장 σ가 중력장과 정상적 상호작용을 하며 n=0, 또는 $P=-6\alpha$일 경우에도 χ장은 비정상적 상호작용을 하게 된다. 따라서 작용(2-3)은 물질장과 비정상적 상호작용, 확장장과는 정상적 상호작용을 하는 표준 Einstein-Hilbert작용이 되며 이 작용을 토대로 Hamiltonian 형식화를 시도한다.

2. 1. 파동함수

양자 우주론은 인플레이션이 성공적으로 일어날 수 있는 σ와 χ의 초기값에 대한 정보를 제공해 준다. 이 말은 곧 σ와 χ의 임의의 값에서 모두 인플레이션이 일어나지 않는다는 말과 같다[11]. 양자 우주론에서 우주는 2절에서 언급했던 대로 superspace에서 정의 되는 파동함수 Ψ에 의해 기술된다. 이 파동함수 Ψ가 만족시키는 방정식을 Wheeler-DeWitt 방정식이라 하며 시간 매개변수 t의 재정의에 따른 이론의 불변성을 나타내는 구속조건의 양자화된 형태이다. 일반적인 경우 superspace 내의 모든 좌표를 고려해서 이 방정식을 풀기는 매우 어렵고 따라서 시공간이 균일하고 등방적이라는 가정하에 문제를 단순화 시켜 고찰하는게 현재의 추세이다. 균일하고 등방적 우주에서는 무한 차원이

superspace가 유한차원의 minisuperspace가 되고 결국 장이론(field theory)이 양자역학으로 환원된다. minisuperspace에서 닫힌(closed) 우주의 경우, 계량 텐서와 곡률 스칼라는

$$ds^2 = l^2\{-Ndt^2 + a^2(t)\,d\Omega_3^2\}, \tag{2-5}$$

$$R = \frac{6}{l^2}\left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}}{N^2 a} + \frac{1}{a^2}\right) \tag{2-6}$$

로 주어진다. 여기서 경과함수 N은 시간에 무관하도록 선택했으며 ℓ은 나중에 편리를 위해서 도입한 상수이다. 균일하고 등방적 우주에서는 σ, χ 장도 공간 좌표에 무관하므로 작용(2-3)은

$$\begin{aligned} S = \int dt \Big\{ & \frac{3}{8\pi G}\left(-a\frac{\dot{a}^2}{N} + Na\right) + \frac{a^3}{2N}\dot{\sigma}^2 \\ & + \frac{a^3}{2N}e^{-P\sigma}\dot{\chi}^2 - e^{-Q\sigma}\frac{a^3}{2\pi^2}NV(\chi)\Big\} \end{aligned} \tag{2-7}$$

과 같이 된다. 여기서 $l^2=1/2\pi^2$으로 택했고 척도인자 a의 t에 대한 2차 미분은 부분적분을 이용하여 제거했다. 시간 매개변수 t의 재정의에 의해 N값을 결정할 수 있으므로 N은 Lagrange 미정계수가 되고 이점은 작용에 N의 t 도함수가 없다는 점에서도 알 수 있다. N에 대한 변분을 취하고 결과식에서 N=1인 척도(gauge)를 사용하면 다음과 같은 구속조건이 얻어진다:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) - \dot{\sigma}^2 - e^{P\sigma}\dot{\chi}^2 & \\ - \frac{1}{\pi^2}e^{-Q\sigma}V(\chi) = 0. & \end{aligned} \tag{2-8}$$

식(2-7)으로부터 a, σ, χ의 공액운동량 Π_a, Π_σ, Π_χ를 각각 구하면

$$\Pi_a = -\frac{3}{4\pi G}\frac{a\dot{a}}{N}, \quad \Pi_\sigma = \frac{a^3}{N}\dot{\sigma}, \quad \Pi_\chi = \frac{a^3}{N}e^{P\sigma}\dot{\chi} \tag{2-9}$$

가 얻어지며, 이 식들을 각각 a, σ, x에 대한 표현으로 바꾸고 식(2-8)에 대입하면

$$\frac{4\pi G}{3}\frac{\Pi_a^2}{a} + \frac{3}{4\pi G}a - \frac{\Pi_\sigma^2}{a^3}$$

$$- \frac{e^{-P\sigma}}{a^3}\Pi_\chi^2 - \frac{a^3}{\pi^2}e^{-Q\sigma}V(\chi) = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

와 같이 된다. 양자화를 위해서 공액운동량의 연산자 표현
$\Pi_a = -i\partial/\partial_a$, $\Pi_\sigma = -i\partial/\partial\sigma$, $\Pi_\chi = -i\partial/\partial x$를 대입하고 파동함수 Φ에 연산시키면 바로 WD 방정식이 얻어진다. 식(2-10)의 첫번째항에서 a와 π_a가 곱해진 형태이므로 연산자 π_a를 어떤 순서로 배열해야 하는 문제가 생긴다. 이러한 문제를 "연산자 순서 문제(operator ordering problem)"라 하여 아직까지 해결되고 있지 않다. 이점을 고려해서 WD방정식을 써보면

$$\Big\{ -(a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \gamma a\frac{\partial}{\partial a})$$

$$+ \frac{3}{4\pi G}(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + e^{-P\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}) + U\Big\}\Psi = 0 \qquad (2\text{-}11)$$

이 되며 γ는 "연산자 순서 문제"를 나타내는 결정되지 않은 상수이고 U는

$$U \equiv (\frac{3}{4\pi G})^2 a^4 (1 - \frac{4G}{3\pi}a^2 e^{-Q\sigma} V(x)) \qquad (2\text{-}12)$$

를 나타낸다. WD방정식을 만족하는 파동함수 Ψ는 a, σ, x의 함수이고 Ψ는 minisuperspace 위에서의 함수이므로 이 경우 minisuperspace는 3차원 다양체가 된다. 그리고 변수들이 취할 수 있는 범위는 각각 $0 < a < \infty$, $-\infty < \sigma$, $x < \infty$이고 minisupersace의 경계는 각각 $a = 0$, $\infty|\sigma|$, $|x| = \infty$가 된다. 양자우주론에서 $a = 0$, $|\sigma|$, $|x| < \infty$와 같이 유한한 값을 취하는 경계점은 고전 우주론과는[13] 달리 특이점으로 보지 않는다[5, 6]. 이 경계점에서 우주가 일정한 파동함수 값을 갖고 시작되었다는 관점을 택하고 있다. 그이외의 경계는 모두 특이점에 해당한다. 따라서 $a \to 0$이고 $|\sigma|$, $|x|$

가 유한한 값일 때 $\partial\Psi/\partial\sigma$, $\partial\Psi/\partial x$는 영이 되어야 한다(방정식이 정칙조건임). 인플레이션 모델에서 급팽창이 오래 지속되기 위해서 포텐셜이 아주 완만하게 변하는 것을 요구하고 있다[14]. 따라서 $e^{-Q\sigma}V(x)$가 완만하게 변하는 경우 파동함수 Ψ는 σ와 x에 따라서 거의 변하지 않게 되고 σ, x미분을 WD방정식에서 생략할 수 있다. 물론 포텐셜이 완만하게 변하지 않는 경우는 이를 미분을 고려해야 한다. 따라서 WD 방정식은 다음과 같이 다루기 쉬운 형태를 취한다:

$$(-a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}-\gamma a\frac{\partial}{\partial a}+U)\Psi=0. \tag{2-13}$$

이 방정식은 포텐셜 에너지가 U이고 에너지 고유치가 영인 Schroedinger 파동방정식 형태이다. 복잡한 형태의 U로 인해 일반적인 경우에 이 방정식의 해를 구할 수 없다. 하지만 근사적 방법을 써서 근사해를 구해보면 연산자 순서 문제로 인해 나타나는 γ는 파동함수의 진폭에 a의 멱으로 나타내고 진폭에는 또한 지수함수 형태가 γ에 관계없는 항이 나타난다. 따라서 근사적 해가 타당성을 갖는 영역에서는 γ를 임의로 선택해도 파동함수에 큰 영향을 미치지 않는다. 이는 WKB근사식에서 (다른 근사법에서도 마찬가지임) 척도인자 a는 고전적 변수이고 σ, x는 양자변수임을 가정 했을 때 a와 Π_a사이에는 불확정성 관계가 거의 성립하지 않고 따라서 연산자순서 문제가 발생하지 않는 사실과 관계가 있다. WKB근사법에 의해서 γ가 σ와 x의 초기 조건을 결정하는데 (아래에서 논의) 거의 영향을 끼치지 않으므로 γ값을 임의로 선택해서 (2-13)방정식을 정확히 풀기로 한다. 곧

$$\gamma=-1,\quad \beta=\frac{3}{4\pi G},\quad y=\frac{4G}{3\pi}e^{-Q\sigma}V(x),$$
$$\xi=\xi_0(1-a^2y) \tag{2-14}$$

와 같이 치환하면 방정식(2-13)는 다음과 같다:

$$(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\xi)\Psi(\xi)=0. \tag{2-15}$$

이 미분 방정식은 Airy방정식으로, $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$와 같은 해를 갖는다[34]. 따라서 파동함수 $\Psi(\xi)$는 이들 해의 선형 결합으로

$$\Psi(\xi) = c_1 A_i(\xi) + c_2 B_i(\xi) \qquad (2\text{-}16)$$

와 같이 주어지고 계수 c_1과 c_2와는 경계조건에 의해 구해진다. 양자우주론에서 경계조건은 두 가지가 제시되고 있다. 하나는 Hawking과 Hartle이 제시한 "무경계(no boundary)" 가설이고[6] 다른 하나는 Vilenkin이 고찰한 "무에서부터 양자 터널링(quantum tunneling from nothing)" 가설이다[5, 16]. Hawking과 Hartle(이하 HH)의 무경계가설은 경계조건이 없다는 경계조건으로서 일종의 자기 충족적 우주론에 해당한다. HH가설에서는 우주의 파동함수는 조밀한 Euclidean 기하에 대해 역사의 총합(sum over history)을 행하므로써 구해진다. HH 경계조건을 이용해서 구한 파동함수는 척도인자 a의 모든 구간에서 실수가 되며 특히 고전적으로 허용된 영역에서는 팽창하는 우주와 수축하는 우주의 파동함수가 선형 결합된 형태로 나타나고 고전적으로 금지된 영역에서는 척도인자 a가 영에 접근함에 따라서 파동함수 진폭은 작아진다[5]. 여기에서 팽창하는 우주 또는 수축하는 우주란, 우주의 파동함수에 척도인자의 공액 운동량 연산자를 가하여 나오는 고유치가 음의 값을 갖느냐 또는 양의 값을 갖느냐에 의해서 결정된다. Π_a의 고유치가 음의 값인 경우 a는 $-\Pi_a$에 비례하므로 $a>0$이 되어 팽창하는 경우이고, 양의 값인 경우는 $a<0$이 되어 수축하는 우주에 대한 파동함수가 된다. 반면에 Vilenkin의 경계조건에서는 우주는 진공에서 생성되어 팽창하다가 다시 특이점으로 수축하는 파동함수를 나타내며 고전적으로 금지된 영역에서는 척도인자 a가 회귀점에 가까울수록 진폭이 작아지며 고전적으로 허용된 영역에서는 팽창하게 우주를 나타낸다.

이들 경계조건에 공통되는 점이 있는데 $a \to 0$일 때 Ψ는 일정한 값을 갖는다는 사실이다[4]. 성공적 인플레이션이 일어나기 위한 초기조건을 구하기 위해서는 $a \to 0$일 때 Ψ는 일정한 값을 갖는다는 조건과 고전적으로 허용되는 영역에서의 파동함수가 HH경우에는 팽창 수축 함수의 결합, Vilenkin의 경우에는 a가 작을 때 (회귀점보다는 큰) 팽창하는 함수라는 조건으로 충분하다[5, 6]. 이는 인플레이션이 양자터널을 한 후에 거짓진공 상태로 들어가서 급팽창을 하기 때문이다. 이제까지의 논의를 요약하면 다음과 같다:

i) HH 경계조건

Ψ = 일정 : $a \to 0$

Ψ = 팽창, 수축 함수가 선형 결합된

실수함수 : $a > a_t$ (2-17)

ii) Vilenkin 경계조건

Ψ = 일정 : $a \to 0$

Ψ = 팽창함수 : $a > a_t$ (2-18)

여기서 a_t는 회귀점에서의 척도인자 값이다. 두 경계조건에 공통되는 $a \to 0$일 때 Ψ= 일정 하다는 조건을 이용하면 파동함수(2-16)는

$$\Psi = \frac{A_i(\xi) + d_1 B_i(\xi)}{A_i(\xi_0) + d_1 B_i(\xi_0)} \tag{2-19}$$

로 주어진다. 여기서 d_1은 각각의 경계조건에서 두번째 조건에 의해 결정되는 상수이고, 규격화 상수는 생략했다. 계수 d_1을 결정하기 위하여 $Ai(\xi)$와 $Bi(\xi)$의 점근적 근사식을 이용한다. a가∞일 때 ξ는 $-\infty$가 되고 Ref. [15]에 따르면

$$\begin{aligned} A_i(\xi) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\xi)^{1/4} \sin\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], \\ B_i(\xi) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\xi)^{1/4} \cos\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \tag{2-20}$$

이다. $Ai(\xi) + iBi(\xi)$인 경우, 즉 $d_1 = i$이면

$$\Psi \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\xi)^{1/4}\, i\, \exp\left\{-i\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right\} \tag{2-21}$$

가 되고 $(\Pi a\Psi/\Psi)/\Psi \sim -\xi_0 y a(-\xi)^{1/2}$로서 고유치가 음이 된다.

sine함수와 cosine함수는 $e^{+''}$와 $e^{-''}$형태의 선형결합이므로 그자체로 수축, 팽창하는 경우를 모두 담고 있으므로 $d_1 = 0$로 하면 고전적으로 허용된 영역에서 HH의 두번째 경계조건을 만족하게 된다. 따라서 HH 경계조건을 만족하는 파동함수 Ψ_H는

$$\Psi_H = \frac{A_i(\xi)}{A_i(\xi_0)} \tag{2-22}$$

이고, Vilenkin의 경계조건을 만족시키는 파동함수 Ψ_T는

$$\Psi_T = \frac{A_i(\xi) + iB_i(\xi)}{A_i(\xi_0) + iB_i(\xi_0)} \tag{2-23}$$

과 같이 주어진다. 이들 파동함수를 가지고 인플레이션을 잘 일으킬 수 있는 초기조건을 제시할 수 있는 파동함수는 Ψ_H인가 또는 Ψ_T인가를 알아보기로 한다.

2. 2. 확률분포

파동함수로부터 확률분포(또는 확률밀도)를 결정하는 문제는 아직까지 해결되고 있지 않다[8, 17]. 양자역학 또는 양자장론에서는 확률밀도를 결정하는데 문제가 없고 단지 해석의 문제만 남아 있다. 현재 통용되는 해석은 Copenhagen 해석으로[18] 확률 붕괴와 같은 문제에 대해 해석을 내리지 못하고 있다. 이 해석에 따르면 관측 대상과 관측자는 분리되어 있으며 관측 대상은 양자적으로 취급되고 관측자는 고전 역학으로 기술된다. 하지만 우주론의 경우에는 관측대상에 관측자도 포함되어 있으므로 이러한 기술에는 난점이 있다. 또한 확률밀도를 정의하기 위해서는 시간이 정의되야 하며, 특정한 시간에 다른 물리 변수들이 어떤 값 또는 범위의 값을 갖기 위한 확률을 계산한다. 하지만 우주를 기술하는 파동함수 Ψ는 시간 t의 함수가 아니므로 양자역학에서처럼 간단히 확률밀도가 정해지지 않는다. 양자역학에서는 확률밀도를 파동함수의 절대값이 제곱으로 정의하며[17] 양자장론, 그 중에서 Klein-Gordon 이론에서는[19] 확률밀도류 중에서 시간성분을 확률밀도로 한다. 두 경우 모두 확률은 시간에 대해 보존되나 Klein-Gordon 이론에서는 음의 값을 취할 가능성이 생긴다. 하지만 Dirac의 반입자설로 확률밀도가 음의 경우도 설명이 된다. 양자우주론에서는 양자역학에서처럼 파동함수의 절대값의 제곱으로 확률밀도를 정의하면 그 양은 보존되지 않는다. 반면 Klein-Gordon 이론에서 처럼 시간에 해당하는 변수를 적절히 택해서 확률밀도중에서 시간 성분을 확률밀도로 취하는 경우 음의 값을 가질 가능성이 생기며 이 음의 값은 일반적으로 해결이 불가능하다.

그러나 우주를 기술하는 파동함수는 어떤 경계 조건을 만족해야 하며 그러한 조건을 만족하는 파동함수들에서는 확률밀도류의 시간 성분이 음의 값을 취하지 않게 되는 경우가 있으며, Vilenkin의 경계조건을 만족시키는 파동함수가 이러한 경우에 해당된다.

후자의 정의를 택해서 Ψ_H와 Ψ_T를 이용하여 확률밀도를 구한다. WD 방정식(2-11)에서 Klein-Gordon 이론에서 같은 방법으로 공액 파동함수 Ψ^*를 곱하고, 식(2-11)에 복소공액을 취하고 Ψ를 왼쪽에서 곱한 다음 그 차이를 계산하면

$$\partial_a j^a + \partial_0 j^0 + \partial_X j^X = 0 \tag{2-24}$$

이 되고, j^a, j^σ, j^x 는 아래와 같이 정의된다:

$$j^a = \frac{i}{2} a^\gamma (\Psi^* \partial_a \Psi - \Psi \partial_a \Psi^*), \tag{2-25}$$

$$j^\sigma = -\frac{i}{2} \beta a^{\gamma-2} (\Psi^* \partial_\sigma \Psi - \Psi \partial_\sigma \Psi^*), \tag{2-26}$$

$$j^x = -\frac{i}{2} \beta e^{P\sigma} a^{\gamma-2} (\Psi^* \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \Psi^*) \tag{2-27}$$

와 같은 형태의 확률 밀도류를 얻게 된다. 이 셋 중에서 시간 성분을 정하기 위해 먼저 시간의 역할을 하는 변수를 찾아내야 한다. 근사식을 적용할 수 있는 영역에서, 정확히 말하자면 척도인자 a가 Planck길이($\sim 10^{-33}$㎝)보다 크고, 포텐셜 에너지 $e^{-Q\sigma}V x$가 Planck에너지 ($\sim 10^{19}$ GeV)의 4승보다 작은 영역에서 척도인자 a를 시간 변수로 볼 수 있다. 어떤 변수가 시간을 나타내는 변수가 되기 위해서는 시간 매개 변수 t의 증가함수가 되야 한다[20]. 팽창하는 우주를 기술하는 파동함수에서는 척도인자 a가 증가함수이므로 우주가 팽창하는 동안은 척도인자 a를 시간변수로 여길 수 있다. 물론 σ와 x도 시간 매개 변수의 증가함수이면 시간변수로 사용될 수가 있으나 여기에서는 a를 택하기로 하자. 이 경우 j^a를 적절히 규격화 시켜서 확률밀도로 취할 수 있다. 말하자면 j^a는 특정한 "시간" a에서 σ와 x에 대한 확률분포가 되는 것이다. 근사적 영역에서 파동함수는 γ에 따라 크게 달라지지 않으므로 $\gamma=-1$로 취하고 Ψ_H를 대입하면 Vilenkin의 확률밀도 J^a_T는

$$\begin{aligned} j^a_T &= \frac{i}{2a} (\Psi^*_T \partial_a \Psi_T - \Psi_T \partial_a \Psi^*_T) \\ &= \frac{1}{\pi} (2q\beta^2)^{1/3} \{ A_i^2(\zeta_0) + B_i^2(\zeta_0) \}^{-1} \end{aligned} \tag{2-28}$$

이 된다. 이 식에서 Wronskian $A'_i B_i - A_i B'_i = 1/\pi$를 사용했다. 근사식을 적용할 수 있는 영역에서 식(2-28)를 해석하기 위해 $e^{-Q\sigma}V(x)$가 Planck 에너지 4승보다 작을 경우 즉 $\xi_0 \gg 1$일 때에만 국한시켜 고려하기로 한다. $A_i(\xi_0)$와 $B_i(\xi_0)$의 점근적 근사식은[15]

$$A_i(\xi_0) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\xi_0)^{-1/4} \exp[\frac{2}{3}(\xi_0)^{3/2}],$$
$$B_i(\xi_0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\xi_0)^{-1/4} \exp[\frac{2}{3}(\xi_0)^{3/2}] \qquad (2\text{-}29)$$

이 되고 이들을 식(2-28)에 대입하면

$$j_T^a \sim \beta \exp(-\frac{2\beta}{3y}) \quad ; \quad \beta \gg 2y \qquad (2\text{-}30)$$

와 같다. 이식에서 보는 것처럼 Vilenkin의 경계조건을 만족하는 파동함수들에 대해서는 확률밀도 J^a_T는 음의 값을 갖지 않는다.

식(2-30)을 σ, x로 다시 쓰면

$$j_T^a \sim (\frac{3}{4\pi G}) \exp(-\frac{3e^{Q\sigma}}{8G^2V}) \quad ; \quad e^{Q\sigma} \gg G^2V \qquad (2\text{-}31)$$

처럼 표현되고 이식에서 인플레이션을 잘 일으키는 σ, x에 대한 초기 조건을 구할 수 있다. x가 고정되어 있는 경우 $e^{Q\sigma} \sim G^2V$일때 J^a_T는 최대가 되고 반면 σ가 고정되어 있는 경우 V가 최대일 때 J^a_T는 가장 크다. V가 위로 유한한 경우 V의 최대값에서 J^a_T는 가장 크며 위로 한계가 없는 V에 대해서는 무한대의 V값에서 J^a는 최대가 된다. 하지만 V가 Planck질량이 4승보다 큰 값을 갖는 경우 Planck에너지보다 큰 값일 때 인플레이션이 일어날 확률이 크다는 암시를 제공해 준다. 따라서 $x \sim x_{max}$, $e^{Q\sigma} \sim G^2V_{max}$일 때 높은 확률을 가지고 인플레이션이 일어난다. 여기서 V_{max}는 V의 최대치이며 x_{max}는 V가 V_{max}일 때의 x값이다. σ의 초기값을 Φ로 표현하면 $\Phi^{2-m} \sim G^2V_m/G^{2-m}V_m$ 또는 $\Phi \sim (G^2V^m)^{1/(2-m)}/G$로서 이 값에서 시작하여 인플레이션이 끝날 때 현재의 Planck에너지 밀도의 제곱값이 된다. 따라서 초기값은

$$\Phi(t_b) \sim M_P^2(t_0)\left(\frac{V_{max}}{M_P^4(t_0)}\right)^{\frac{1}{2-m}} \qquad (2\text{-}32)$$

HH의 무경계 경계조건을 이용해서 확률밀도를 구하고 위의 결과들과 비교해 보자. HH 경계조건을 만족시키는 파동함수에서는 a a_i보다 큰 경우, 말하자면 고전적으로 허용된 영역에서는 (2-20)식에서 보듯이 $A_i(\xi_0)$는 $e^{i\theta}$와 $e^{-i\theta}$의 형태로 실수함수가 되며 따라서 HH의 확률밀도 j^a는 영이 된다. 하지만 인플레이션은 우주가 급팽창하는 상태를 나타내고

있으므로 확률이 큰 인플레이션을 위한 초기값을 알아보기 위해서는 팽창우주만 고려하면 된다. 팽창우주에만 국한 시킨다면, 확률밀도 j^a에서 $e^{\pm i \phi}$형태의 함수는 Wronskian을 취한 결과 지수함수가 아닌 형태로 기여를 한다. 따라서 파동함수 Ψ_H의 분모에 $A_i(\xi_0)$함수가 지배적인 역할을 한다. 근사식을 적용할 수 있는 영역, $e^{Q\phi} \gg G^2V$, 에서 $A_i(\xi_0)$에 대한 근사식 (2-29)식을 사용하면

$$j_H^a \sim \exp\left(\frac{2\beta}{3y}\right) \qquad ; \ \beta \gg 2y \tag{2-33}$$

로서 σ와 χ로 표현하면

$$j_H^a \sim \exp\left(\frac{3e^{Q\sigma}}{8G^2V}\right) \qquad ; \ e^{Q\sigma} \gg G^2V \tag{2-34}$$

과 같이 되며 Vilenkin의 파동함수로 부터 구한 확률밀도와는 다른 결과를 보여준다. (2-34)식에서는 지수함수의 인자가 +부호이다. χ가 고정되어 있으면 $e^{Q\sigma}$가 최대일 때 j^a_H가 가장 크고 σ가 정해졌을 때 포텐셜이 최소일 때 j^a_H는 최대가 된다. 고전적으로 허용된 영역이 존재하기 위해서는 V>0이 되어야 하고 따라서 V~0일 때 j^a_H는 가장 크게 된다 (무한대). 하지만 이 경우 규격화문제가 생길 수도 있다.

이상에서 보듯이 j^a_T와 j_H의 경우 σ(또는 Φ)와 χ 초기값에 대해 전혀 다른 결과를 보여준다. j^a_H에서 V~0가 될 때의 χ 값에서 인플레이션이 일어날 확률이 높은 반면 초기 에너지밀도 ρ_F~V가 영이면 인플레이션이 일어나지 않는다. 따라서 성공적인 인플레이션에 대한 초기값은 j^a_T에서 구한 결과가 설득력이 있다.

이러한 결과로 부터 우주를 기술할 수 있는 파동함수로서 Ψ_T는 적당하고 Ψ_H는 적절하지 않다는 결론을 내릴 수는 물론 없다. 인플레이션의 초기조건에 대한 정보를 제공하는 데는 Ψ_T가 적절한 반면 우주의 벌레구멍(wormhole)이나 우주상수(cosmological constant)가 거의 영에 가깝다는 이유등을 설명하는 데는 Ψ_H가 보다 효율적임을 보여주는 연구가 많이 나오고 있다[21].

제 3 장 결 론

일반화한 JBD이론은 기존의 많은 인플레이션 모델들이 해결할 수 없었던 문제들에 해답을 제공했다. 이 이론에 따르면 스칼라장 Φ가 물질장 χ와 상호작용을 하며 그 형태는

작용(2-1)에 나타나 있다.

기존의 광역팽창 이론에서 문제시되었던 ω값에 대한 제한조건이 상호작용을 결정하는 인자 m의 적절한 선택에 의해서 실험치 $\omega>500$을 만족하도록 조정이 된다. 또한 척도인자가 멱함수 형태로 되기 위해서 스칼라장 Φ는 매개변수 t의 증가함수가 되어야 하고 이 경우 $m<2$인 조건이 성립해야 한다.

인플레이션에 대한 Φ와 σ의 초기값을 구하기 위해 우주의 파동함수를 구할 때 두 가지 제안을 사용하게 된다. 하나는 Vilenkin의 "무에서 부터 양자도약"이라는 경계조건이다. 이 경우 파동함수는 고전적으로 허용된 영역에서 팽창하는 파동함수이어야 한다. 다른 하나는 Hawking 과 Hartle의 "무경계 조건"으로서 경계조건이 없다는 경계조건을 써서 파동함수를 구하는데, 그 파동함수는 고전적으로 허용된 영역에서 팽창, 수축하는 선형결합된 형태가 된다.

파동함수에서 확률밀도를 정의하는데는 Klein-Gordan이론에서처럼 확률밀도의 시간성분을 확률밀도로 했다. 이 경우 시간이라 함은 고전적으로 허용된 영역에서 단조로이 증가하는 변수를 말하며 척도인자 a가 이러한 변수가 된다. 따라서 확률밀도류 j^{α}를 적절히 규격화 시켜 확률밀도로 볼 수 있다. WKB 근사식을 써서 Wheeler-DeWitt방정식의 해를 각각의 경계조건을 만족시키도록 해서 구하면 식(2-19), (2-20)이 된다. Vilenkin의 파동함수 Ψ_T를 써서 나타낸 j^{a}_{T}로 부터 물질장 x는 $V(x)$가 최대가 될 때의 x값, Φ의 초기값은 식(2-32)로 주어질 때 인플레이션이 일어날 확률이 가장 크다.

Hawking-Hartle의 파동함수 Ψ_H를 사용한 j^{a}_{H}에서는 반대로 $V\sim0$이 되는 x의 값, Φ^{2-n}이 가장 큰 값일 때 높은 확률로 인플레이션이 일어난다. 하지만 인플레이션이 일어나기 위해서는 참 진공의 에너지 밀도 (≈0)보다 큰 값의 에너지 밀도를 갖는 거짓 진공 상태에서 x가 있어야 되므로 Ψ_H는 인플레이션을 위한 초기의 정보를 제공하지 못하고 있다.

〈참 고 문 헌〉

1. B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160, (1967) 1113; L. Z. Fang and Z. C. Wu, Int. J. Mod. Phys. A1, (1986) 887
2. M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) Vol 1 and Vol 2.
3. Alvarez-Gaume and P. Nelson, in Supersymmetry, Supergravity and Superstring 86 (World Scientific, Singapore, 1986).
4. J. J. Halliwell, in Quantum Cosmology and Baby Universes. Vol 7, Jerusalem Winter School For Theoretical Physics, eds. S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran and S. Weinberg (World Scientific, Singapore, 1991); and Ref. 14.
5. A. Vilenkin, Phys. Lett. B117, (1982) 25; Phys. Rev. D27, (1983) 2848; Nucl. Phys. B252, (1985) 141; Phys. Rev. D33, (1986) 3560.
6. J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D28, (1983) 1960; S. W. Hawking, Nucl. Phys. B239, (1984) 257; J. B. Hartle, in High Energy Phys. 1985 : Proceeding of the Yale Summer School, eds. M. J. Bowick and F. Gursey.
7. R. F. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill Book Comparry, 1965).
8. S. W. Hawking and D. N. Page, Nucl. Phys. B298, (1988) 789.
9. R. Holman, E. W. Kolb and Y. Wang, Phys. Rev. Lett. 65, (1990) 17; R. Holman, E. W. Kolb, S. Vadas and Y. Wang, Phys. Rev. D43, (1991) 995; 43, (1991) 3883, T. Darmour, G. W. Gibbons and C. Gundlach, Phys. Rev. Lett. 64, (1990) 123.
10. A. H. Guth, Phys. Rev. D23, (1981) 347; A. D. Linde, Phys. Lett. B108, (1982) 389; A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, (1982) 1220; D. La and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 62, (1989) 376; Phys. Lett. B220, (1989) 375.
11. V. A. Belinsky, Phys. Lett. B155, (1985) 232; T. Piran and R. Williams,

Phys. Lett. B163, (1985) 331.
12. P. Jordan, Nature, 15, (1949) 637; C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. 124, (1961) 925; Y. M. Cho, Phys. Rev. Lett. 68, (1992) 3133.
13. A. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
14. K. A. Olive, Phys. Rep. 190, (1990) 307.
15. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1970).
16. S. del Campo and A. Vilenkin, Phys. Lett. B224, (1989) 45; Phys. Rev. D40, (1989) 668.
17. S. W. Hawking and D. N. Page, Nucl. Phys. B264 (1986) 185; J. J. Halliwell, Phys. Rev. D38, (1988) 2468; T. Christodoulakis and J. Zanelli, Nuovo Cimento. B93, (1986) 1.
18. H. P. Stapp, Am. J. Phys. 40, (1972) 1098.
19. J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, NewYork, 1965).
20. T. Banks, Nucl. Phys. B249, (1985) 332; K. V. Kuchar, in Proceedings of the Osgood Hill Meeting on Conceptual Problems in Quantum Gravity, eds. A. Ashtekar and J. Stachel (Birkhauser, Boston, 1989).
21. S. Coleman, Nucl. Phys. B310, (1988) 643; S. Giddings and A. Strominger, Nucl. Phys. B321, (1988) 481.