초등교육연구, 제15집
The Journal of Elementary Education Research
Vol. 15, Feb. 2011 : pp. 51~74.

초기대수 학습 자료 개발

-초등학교 5학년을 중심으로-

Development about Early Algebra Learning Materials

강 동 석*

< 국문 초록 >

방정식의 도입이 2007 개정 교육과정에서 중학교 1학년 단계로부터 6-나 단계로 이동됨에 따라 초등수학에서 다루어지는 초기대수(early algebra)에 대한 연구의 필요성이 제기되었다.

이에 본 연구에서는 제7차 교육과정의 4-가 단계에서 6-나 단계 사이의 교과서 활동을 Küchemann의 문자 사용 유형에 의해 초기대수적 관점으로 분석해 본 결과 유형1과 유형3의 낮은 문자 이해 수준에 해당하는 유형이 많았고 유형4, 유형5, 유형6은 발견하기 어려웠다.

따라서, 6학년으로 이동되는 문자 x를 학습하기 전에 초기대수의 다양한 문제를 접해보고, 이를 해결하는 사고과정의 경험을 제공하기 위하여 초기대수를 활용한 자료를 개발하고자 한다. 이를 위해 대수적 사고 요소를 분석하고 초기대수적 사고를 학습할 수 있도록 지도 자료를 개발하였다.

이러한 자료를 통해 방정식에 대한 개념을 더 명확하게 인지할 뿐 아니라 패턴과 일반화를 통한 추론 활동으로 대수 학습과도 쉽게 연계할 수 있는 기초를 다지게 될 것이다.

*** 주제어: 초기대수, 문자 사용 유형, 문자 이해 수준, 대수적 사고 요소**

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

제7차 교육과정에서 중학교 과정으로 다루었던 '미지수를 x로 나타내기'와 '간단한 방정

* 서광초등학교 교사 (dskangpal@empal.com)

식 풀기'가 2007 개정 교육과정(이하 개정 교육과정)에서는 초등학교 6학년으로 이동한다. 이것은 초등 교육과정에서 미지수에 대한 학습 가능성을 제시함과 동시에 초등학교 수학과에서 미지수에 대한 기본적인 개념과 그 바탕이 되는 대수 교수-학습에 대한 연구의 필요성을 내포하고 있다.

이에 대해 강소희, 방정숙(2008)은 오늘날 문자의 도입과 함께 시작되는 학교대수는 초등수학에서 중등수학으로의 이행에서 가장 큰 장애요인이 되고 있다. 지금까지 산술과 대수를 초등과 중등과정으로 그 내용을 구분하여 지도해온 결과 학교대수를 학습하는 과정에서 많은 문제점들이 발생되었는데, 이는 산술과 차별화된 대수의 본질에 기인하는 것으로, 문자와 식, 방정식에서의 구문론적 측면을 강조하는 것만으로 해결될 수 없다. 이에 최근 학교대수와 관련된 연구에서는 대수적 사고에 대한 논의가 집중적으로 다루어지고 있으며 (우정호, 김성준, 2007) '초기대수'(early algebra)가 그 하나라고 하였다.

김성준(2003a)은 'early algebra'를 '초기대수'로 번역하였다. 이것은 초등대수(elementary school algebra)와 구분되는 것으로, 초등대수는 초등학교에 한정되어 다루어지는 대수를 의미하는 반면, 초기대수는 초등학교라는 장소보다 그 시기에 더욱 초점을 둔다. 곧, 초기대수는 기존의 대수 교육보다 앞서 이루어지는 대수 교육을 의미하며, 그 주제는 기호화보다 대수적 사고(추론) 측면에 중심이 있다.

이러한 측면에서 미지수 x에 대한 학습준비과정인 초기대수 교육의 필요성이 대두되고 있으며 나아가 초등학교 교과서에서 다루어지고 있는 문자 사용 유형을 살펴보고 다양한 문자 사용 유형의 자료를 제작하여 학생들에게 접하게 함으로써 체계적인 대수적 사고 요소 계발이 이루어져야 한다.

김성준(2003a)은 초등학교 산술 단계에서 다룰 수 있는 대수적 사고 측면을 산술 학습에서 지도함으로써, 이후 대수 학습에서 학생들이 갑작스럽게 경험하는 어려움을 덜어주며 동시에 산술과 대수 간의 연결을 원활하게 하려는 목적에서 초기대수를 학교수학에 도입해야 함을 제안하고 있다. 여기서 초기대수는 중등과정에서 학습하는 문자와 기호를 그대로 도입하는 것이 아니며, 중등대수와 관련된 요소를 그 수준에 맞추어 추론 측면에서 강조하는 것을 말한다. 따라서 초기대수에서 주장하는 것은 초등 단계에서 대수를 가르치는 것이 대수와 관련된 사고(추론)측면을 개발하려는 것이며, 산술과 대수를 이어주는 연결 고리를 산술에서부터 찾으려는 것이라고 보았다.

이러한 관점에서 4-가 단계에서 6-나 단계까지의 교과서에서 제시되고 있는 문자의 사용 유형을 분석해 보아야 할 것이다.

이러한 교육과정의 변화와 산술과 대수의 연결성 측면에서 초기대수와 관련한 다양한 사

고를 경험해 봄으로 해서 초기대수의 도입 및 접근성을 원활하게 하기 위해 제7차 교육과정 4-가 단계에서 6-나 단계까지의 교과서와 익힘책을 문자 사용 유형에 따라 분석해 보고 다양한 유형의 문제를 제시하여 대수적 사고 요소를 강조하는 초기대수적 관점의 자료를 제안하려고 한다.

따라서 본 연구에서는 제7차 교육과정상에서 제시된 문자 사용 유형을 살펴봄으로써 개정 교육과정에서 초등으로 이동되는 미지수를 x로 나타내기와 간단한 방정식 풀기, 이를 통해 그 필요성이 재기된 초기대수 간의 연결성을 분석해 보고, 이를 바탕으로 5-가와 5-나 단계에서 활용할 수 있는 다양한 대수적 사고 요소를 포함하는 문자 사용 유형의 자료를 제작하는데 그 목적이 있다.

2. 연구 문제

가. 초기대수와 관련된 초등학교 수학 교육과정 내용을 분석한다.

나. 초등학교 4-가 단계부터 6-나 단계 교과서 및 수학익힘책에 수록되어 있는 문자 사용 유형을 분석한다.

다. 5-가, 5-나 단계를 중심으로 초기대수적 관점에서 다양한 문자 사용 유형을 활용한 자료를 개발한다.

3. 연구 방법 및 절차

가. 연구 대상 : 제7차 교육과정 5-가, 5-나 단계 수학 교과서

나. 연구 기간 : 2009년 3월~2010년 3월

다. 연구 절차

1) 제7차 교육과정 및 개정 교육과정 분석

초등학교 제7차 교육과정 및 개정 교육과정 해설서의 내용을 비교·분석하여 초기대수와 관련되어 개정되는 학습 내용을 알아보고 초등학교에서의 산술적 수학 내용과 대수적 학습 요소의 관련성을 분석한다.

2) 4-가 단계에서 6-나 단계에 있는 수학 교과서 및 익힘책의 문제들을 유형별로 분석

초등학교 교과서 분석을 통해 4-가 단계에서 6-나 단계까지 수학책과 수학익힘책에 나

타난 문자 사용 유형의 실태를 파악하고 5-가, 5-나 단계의 문자 사용 유형을 단원별로 분석하여 자료 개발의 시사점을 추출한다.

3) 초기대수 관점에서 다양한 유형의 활용 자료 개발

초기대수 관점에서 5-가 및 5-나 단계에서 활용할 수 있는 다양한 유형의 활용 자료를 개발한다.

4. 연구의 제한점

가. 2007 개정 교육과정에서는 미지수를 x로 나타내기와 간단한 방정식 풀기가 6학년으로 이동되는데 이는 중학교에서 방정식 학습에 기본 바탕이 되므로, 초등수학에서는 초기대수적 접근이 필요하다. 따라서, 본 연구에서는 4-가 단계에서 6-나 단계까지의 교과서와 익힘책을 초기대수적 관점에서 분석하고, 초기대수적 관점에서 제7차 교육과정 5-가 단계와 5-나 단계에 한정하여 활용할 수 있는 자료를 개발하고자 한다.

나. 교과서표에 제시되는 빈 칸은 본 연구에서는 문자로 취급하지 않았다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 제7차 교육과정 및 2007 개정 교육과정 분석

앞에서 언급하였듯이, 2007 개정 교육과정(이하 개정 교육과정)에서는 미지수를 x로 나타내기와 간단한 방정식 풀기 내용을 초등학교 6학년에서 지도하도록 하였다.

형식적 조작기에 다루어졌던 방정식 내용이 구체적 조작기로 이동함에 따라서 발생할 수 있는 문제점과 대수적 사고 요소에 대한 어려움을 최소화하기 위해서, 또한 중학교 교육과정에서 문자와 식, 함수 영역으로 범주와 비중이 확대되는 대수와의 연계성 측면에서도 초기대수와 그에 따른 대수적 사고 요소를 미리 접해보는 경험은 이후 대수학습에 대한 완충 역할을 할 수 있다. 따라서 미지수 x의 도입 이전에 초기대수에 대한 계획적이고 체계적인 교육과정이 필요하며 대수적 사고 요소들을 내포하고 있는 다양한 문자 사용 유형을 접해보기 위해 초기대수와 관련된 자료의 개발이 시급하다.

개정 교육과정에서는 문자와 식, 규칙성과 함수로 나누어졌던 두 영역이 '규칙성과 문제

해결'로 통합되어 운영하게 된다. 하지만 이것은 그 비중이 감소해서 통합되는 것은 아니다.

개정 교육과정의 초등학교 영역은 기존의 '문자와 식' 영역이 사라지고, 그에 해당하는 내용이 '규칙성과 문제해결' 영역으로 통합되었다. … 규칙을 찾는 활동은 우리가 미래를 예상하고 추측하는 데 중요하며, 수학적으로는 함수를 이해하는 기초가 된다. 또 문제해결은 문제 상황을 이해하고, 여러 가지 해결 전략을 활용하여 해결 방법을 모색하고, 그 문제를 해결해 나가는 일련의 과정으로 볼 수 있다. 문제해결은 제4차 교육과정에서부터 강조된 것처럼 생활 속에서의 수학적 문제를 해결하는 능력이 중요함을 인식하고 그 능력을 기르기 위한 훈련의 일환으로 강조되는 부분이다(교육과학기술부, 2008).

이처럼 규칙성과 문제해결능력이 중요함을 다시 강조하고 있다. 또한 규칙성과 문제해결 영역은 중학교에 들어서면 문자와 식과 함수 영역으로 5개 영역 중에 2개 영역을 차지하리만큼 큰 비중을 차지하고 있다. 따라서 이러한 영역 통합과 중학교 교육과정의 영역 확장은 초등학교에서 초기대수에 대한 교육의 필요성과 함께 대수적 사고 요소의 중요성을 인식시켜 준다.

또한 초등학교와 중학교의 연계성 측면에서도 중학교에서 큰 비중으로 다루고 있는 문자와 식, 함수의 기본바탕이 되는 초기대수에 대한 개념 정립은 이후 학습에도 많은 영향을 미칠 것을 예측할 수 있다.

이에 대해서 제7차 교육과정에 비추어 개정 교육과정의 초등학교 각 영역별, 학년별 내용을 살펴보면 <표Ⅱ-1>과 같다.

<표Ⅱ-1> 초등학교 각 학년별 규칙성과 문제해결 영역 내용 체계표(김동인, 2009)

학교급 / 학년 / 영역	초등학교		
	1학년	2학년	3학년
규칙성과 문제해결	·규칙적인 배열에서 규칙 찾기 ·자신이 정한 규칙에 따라 배열하기 ·100까지의 수 배열표에서 규칙 찾고 말하기 ☞ 추가(의사소통 능력 강화) ·□를 사용한 식 ·실제로 해보기, 그림 그리기, 식 만들기 등으로 문제를 해결하기	·다양한 변화의 규칙 찾기 ·수 배열에서 규칙 찾고, 규칙에 따라 수 배열하기 ·곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기 ·미지수 구하기 ·식 만들기 ·규칙 찾기, 거꾸로 풀기 등으로 문제를 해결하기 ☞ 문제해결방법이 바뀜 : 표만들기에서 규칙찾기로(난이도에 따라 학년간 문제해결방법 조정)	·규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸미기 ☞ 옮기기에서 밀기로 용어 수정(정확한 용어 사용) ·표 만들기, 예상과 확인 등으로 문제 해결하기 ☞ 문제해결방법이 바뀜 : 규칙찾기에서 표만들기로(난이도에 따라 학년간 문제해결방법 조정)

영역 \ 학년 \ 학교급	초등학교		
	4학년	5학년	6학년
규칙성과 문제해결	·다양한 변화 규칙을 수로 나타내고 설명하기 ·규칙을 추측하고 말이나 글로 표현하기 ·규칙적인 무늬 만들기 ☞ 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기 및 밀기, 뒤집기, 돌리기를 이용하여 무늬 만들기(초5에서 이동, 난이도 조정, 학습량 감축) ·규칙과 대응 ·단순화하기, 논리적 추론 등으로 문제를 해결하기 ·문제해결 과정 설명하기	·비와 비율 ☞ 초6에서 이동 (타교과와의 연계성 강화) ·하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하기 ·주어진 문제에서 필요없는 정보, 부족한 정보 찾기 ·문제해결의 타당성 검토하기	·방정식 ☞ 미지수를 x로 나타내기, 간단한 방정식 풀이 추가 ·비례식 ·연비와 비례배분 ·정비례와 반비례 ☞ 중1에서 이동(실생활 문제해결력 신장, 타교과 연계성 강화) ·문제해결 방법 비교하기 ·문제의 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기 ·문제해결 과정의 타당성 검토하기

(☞:제7차 교육과정 대비 변경된 부분)

위에서 살펴본 바와 같이 규칙성과 문제해결 영역에서는 규칙성을 찾는 과정이 주를 이루고 있고 다양한 문제해결 전략을 제시하고 있다. 하지만 대수적 사고 요소와 미지수 x를 통한 문제해결 방법은 비단 한 영역에서만 살펴볼 수 있는 것은 아니다. 초등수학의 모든 영역에서 다룰 수 있는 요소이기 때문이다. 따라서 본 연구는 초등학교 수학 가운에 미지수 x가 도입되기 이전 학년인 제7차 교육과정 5-가, 5-나 단계를 중심으로 전 단원에서 초기대수적 관점에 기초한 대수적 사고 요소들을 추출하여 다양한 문자 사용 유형을 제안하려고 한다.

문제해결에서는 제시된 문제해결 방법만 배우는 것이 아니라 자신만의 문제해결 방법을 생각하여 시도해 보게 한다. 또 문제해결 부분은 문제를 해결했을 때의 자신감을 느끼게 하고, 문제를 해결하기 위한 자발적인 의지를 기르게 하거나, 인내심을 포함한 신념과 태도 기르기에도 적절하다(교육과학기술부, 2008). 결과적으로 개정 교육과정에서 추구하는 규칙성과 문제해결은 규칙성을 찾는 활동을 통해 학생들에게 자신감을 심어주고 성취감을 느끼는 기회를 제공하여 문제 해결에 대한 자발적인 의지가 길러질 수 있기를 기대한다. 또한 문제를 해결하는 과정에서의 인내심과 함께 문제를 해결할 수 있다는 신념, 그리고 다양한 해법을 찾는 활동을 통해 논리적인 수학적 태도가 길러지기를 바란다. 따라서 학생들에게 대수 학습에 대한 동기를 부여하고 창의적인 사고력을 기르기 위해 초기대수에 대한

체계적인 교육이 초등학교에서 이루어져야 한다.

또한 <표Ⅱ-1> 제7차 교육과정과의 비교를 통한 개정 교육과정 내용체계표에서 보여주는 것처럼 개정 교육과정에서는 타 교과와의 연계성 강화, 학습량 감축, 난이도 조정, 정확한 용어 사용 및 의사소통 능력 신장 등의 이유로 많은 학습 내용의 이동과 조정이 있었다. 이 중에서 방정식과 정비례와 반비례가 형식적 조작기에서 논리적인 사고 과정으로 다루어지던 것이 구체적 조작기로 이동하면서 그 교육에 있어 단순히 이동함에 그치는 것이 아니라 감각적이고 물리적인 실물로 다루어야 하는 과제가 더해진 것이다. 따라서 미지수 x의 학습에 앞서서 초기대수에서 미리 다룰 수 있는 미지수와 변수의 문자 사용 유형을 경험하게 하는 것은 학습자에게 매우 중요하다. 따라서 초기대수는 학습자가 중학교에 들어가서 '함수'와 '문자와 식'의 두 영역으로 확장되어 비중이 높아지는 대수 측면의 학습 부담을 덜어주고 초기대수의 구체적인 사고 기회를 제공하는 유의미한 학습으로 받아들여질 것이다.

2. 초기대수 관련 선행연구

김남균, 김은숙(2009)은 전통적으로 대수는 실세계와 연결 짓지 않고 추상적인 수학으로 소개되며 대수의 목적이나 용법을 학습하기 전에 기호조작을 학습하는 것 즉, 대수적 기호화에 초점이 맞추어졌으며, 대수적 사고를 경험하는 것은 소홀히 다루어져 왔다고 밝히면서 한국교육과정평가원(2004)에 따르면 우리나라 학생들이 계산과 대수적 조작 능력을 기르기 위한 지나친 반복 학습으로 인해 수학에 대한 흥미를 잃고, 어렵고 복잡한 계산과 대수적 조작 능력을 요구하는 학교수학으로 인해 수학 학습의 좌절감을 맛보고 있다. 따라서 중학교 수준에서 '문자와 식' 단원을 어려워하고 있을 뿐 아니라 의미 없는 기호조작에 가려 대수적 사고를 경험하지 못하며 이는 '함수' 단원을 어려워하는 현실로 나타나고 있다고 근거를 들어 제시하고 있다.

이러한 측면에서 김은혜(2008)는 대수 교육의 문제점에 대한 해결방안으로 많은 학자들은 '초기 대수'를 언급하고 있다. 즉, 초등에서부터 대수와 관련된 사고(추론) 측면을 개발하려는 것으로 대수를 알고리즘에 따라 형식적으로 지도하는 것에서부터 벗어나고자 하는 것이라고 보았다.

또한 김성준(2003a)은 NCTM의 Standards(2000)에서는 아동들의 대수적 추론을 잠재적으로 기를 수 있는 활동을 초등학교 입학과 동시에 시작해야 한다는 입장을 초등 교육과정 권고에서 분명하게 밝힘으로써, 초기대수 학습의 중요성을 강조하고 있다고 하였다. 또

한 Vergnaud(1988)는 대수 또는 전-대수(pre-algebra)와 관련된 지도를 초등학교 수준에서 시작할 것을 주장하고 있으며, … Bodanskii(1991), Bilto Lima(1996), Schigter(1998) 등의 연구에서 초등학교에서의 대수적 방법이 지도되어야 함을 제시하고 있다고 밝혔다. 그 뿐 아니라 Kaput(2001)은 초기대수와 관련된 대표적인 인물로, 특히 그는 초등수학의 맥락에서 학생들의 능력을 이용해서 대수적 추론을 이끌어내는데 연구의 초점을 두고 있다고 보았다. 또한 김성준은 초기대수는 역사적인 배경에서 보면 문제해결이라는 측면에서 초등수학에서의 지도 가능성을 엿볼 수 있으며, 인식론적으로는 과정 중심적인 산술에서 대상과 그 조작을 강조할 수 있는 초기대수의 논의를 살펴볼 수 있었다. 그리고 심리적으로는 대수의 기호 측면이 아닌 추론을 강조한다고 할 때 피아제의 심리발달단계가 대수 학습에서의 결정적인 조건이 아님을 알 수 있다고 밝히고 있다.

김성준(2003a)은 초등학교 수학 교과서 가운데 4-가부터 6-나까지의 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 초기대수적 관점에서 초등학교 교과서의 특징을 다음과 같이 제시하고 있다.

> 4. 하나의 문제를 다양한 방법으로 해결하면서 보다 효과적인 방법을 찾는 것은 산술과 대수를 연결하는데 도움을 준다. 곧, 산술에서의 방법과 대수에서의 방법을 비교함으로써 대수의 장점을 확인하고, 대수 학습에 동기를 부여할 수 있게 된다. … 다양한 표현을 비교하고 그리고 일반화의 필요성을 이끌어내면서 우리는 '초기대수'와 같은 맥락을 발견할 수 있으며, 그리고 산술과 대수가 초등수준에서부터 사고 측면에서 함께 지도될 수 있는 가능성을 엿볼 수 있을 것이다. (p.324)

이러한 연구 결과로부터 예상과 확인이나 양적 추론 단계에서 문제 푸는 방법 찾기의 풀이를 그칠 것이 아니라 □를 사용하여 식을 세우는 과정을 추가함으로써 학생들에게 일반화의 과정을 경험하고 나아가 변수의 의미를 접해볼 수 있는 계기를 마련해 준다면 이후 대수 학습에서 형식적 알고리즘에서 그칠 수 있는 방정식의 학습과 사고의 관점을 확장시킬 수 있을 것이다.

또한 개정 교육과정에서 초등으로 도입되는 대수의 사고 요소를 분석하고 학교 대수에서 나타나는 대수의 여러 유형을 고려하여 학교 대수 도입 과정을 논의하는데 도움이 될 것이다.

대수 학습에서 비롯되는 과정-대상의 인식에서의 어려움은 산술 학습과 직접적으로 관련되어 있으며, 따라서 산술 학습에서부터 '초기대수'를 통해 문제가 되는 부분을 개선함으로써 대수 도입에서 이와 같은 인식론적 문제를 개선할 수 있을 것으로 기대된다.(김성준, 2003a) 산술에서 사용하는 기호는 문제를 표현하기보다 계산을 위한 도구로 강조되고 있으며, 변화하는 수(또는 양) 사이의 관계를 찾는 문제에서도 특정한 값을 계산하는 것과 같은 질문에 제한되어 있으며, 이렇게 제한된 산술 학습은 대수에서 인식론적 문제를 낳는

원인이 되기 때문이다.

'초기대수'는 이러한 요소를 초등과정에서부터 이끌어내고, 학생들에게서 발견되는 자연스러운 심리적인 과정을 일련의 사고와 추론으로 발달시키는 것을 목적으로 하고 있으며, 이것은 학생들의 심리적인 발달단계를 고려해서 미지수 x의 학습 이전에 대수를 대수적인 사고에서부터 이끌어내기 위한 것으로 볼 수 있다.(김성준, 2003a)

또한 김성준(2003a)은 초기대수에서의 핵심은 대수적 사고(추론)를 통해 초등수학에서부터 대수 지도의 가능성을 마련하는 것으로 곧, 초기대수의 목적은 산술영역에서 제시된 보편적인 문제들에서부터 어떻게 대수적인 요소들을 이끌어내고 이를 통해 산술에서부터 대수 교육을 준비시킬 수 있는가 하는 데 있다고 하였다.

이러한 관점에서 초등수학의 전 영역에 걸친 문제들을 재구성함으로써 초기대수에 대한 다양한 관점을 지도할 수 있으며 이러한 활동은 학습자들에게 양적 추론을 통해 문자에 대한 다양한 사고력과 응용력을 제공할 것이다.

우리나라 초등수학 교과서를 분석하여 초기대수와의 관련성을 살펴보면, 우리의 초등수학에서는 다양한 패턴을 다루고 그리고 양의 산술을 제시함으로써 초기대수의 지도 가능성을 포함하고 있다(김성준, 2003a).

초기대수의 경우 패턴은 양을 도구로 해서 관계를 다루고 있으며, 패턴을 통해 양을 비교하고 그 관계를 발견함으로써 패턴의 구조를 이해하는 것이며, 이것은 초등수학에서부터 주어진 대상을 관계와 함께 다룰 수 있는 기반을 마련하는데 도움을 준다(김성준, 2003a).

이와 같이 학생들에게 주어진 문제의 패턴을 인식하고 규칙을 찾고 일반화하는 일련의 과정을 통해 초기대수에 접근함으로 해서 대수적 접근 방법을 익힐 수 있을 것이다.

패턴에서 시작하여 이를 일반화하는 것은 수학의 구조적 측면에 대한 이해를 바탕으로 한다(Warren, 2001; 김성준, 2003b에서 재인용). 수학에서 그 구조를 안다는 것은 수학적 대상들의 집합을 이해하는 것으로, 다시 말해 대상들 간의 관계와 이러한 대상들의 성질을 이해하는 것을 의미한다. 그리고 이러한 패턴은 대수를 시작하기 이전 단계인 초등 수학에서부터 다루어지고 있으며, 중학교에서 산술, 시각적 패턴, 함수적 상황 등에서 반복되는 학습을 통해 귀납적 일반화를 하면서, 이러한 일반화를 통해 패턴과 그 관계를 이해할 수 있게 된다(김성준, 2003b). 따라서 본 연구에서는 학생들로 하여금 초등학교에서 학습하는 다양한 문제들을 일반화하고, 다양한 풀이방법으로 접근하는 과정을 통해 중학교 함수 학습과 원활하게 연계시킬 수 있는 계기를 제공하고 초기대수의 중요한 요소인 패턴에서부터 그 관계를 인식하고 규칙을 찾아 일반화하는 방법을 통해 초기대수를 지도하도록 자료를 개발하고자 한다.

3. 문자 사용 유형과 문자 이해 수준

초기대수와 대수를 연결짓기 위해서 미지수 x와 수의 연결 측면을 생각해 볼 수 있다. 이러한 측면에서 미지수 x의 도입 이전에 x와 수의 간격을 좁혀줄 수 있는 문자 □의 사용 측면을 생각해 볼 수 있다. 이러한 문자 □는 초등학교 1학년에 도입되어 학습자에게 친숙하고 이후 학습에서 미지수 x와 연결되어 지는 중요한 도구로 여겨진다.

김남희(1997)는 문자의 사용은 대수 학습을 보다 의미 있게 해 나가기 위한 기초이며 대수 학습에 결정적인 역할을 한다. 어떤 문제 상황이나 관계를 문자나 기호를 사용하여 식으로 표현하여 다루는 것은 일반화를 위한 토대가 되는 것은 물론 수학을 학습해 나가는데 필요한 여러 가지 이점을 제공해 준다고 보았다.

대수를 이해하고 행하는 데 있어서 학생들이 겪는 어려움의 주원인은 문자에 대한 좁은 해석에 기인하며(NCTM, 2000) 학생들이 문자의 개념을 잘 이해하지 못하는 이유 중의 하나는 초등학교 수준에서 다루는 문자의 예가 제한적이라는 것이다. 이는 초등학생들이 문자를 일반적인 미지수 또는 패턴의 일반화로 이용하는 활동을 하는 경우가 드물기 때문이다(Baroody & Coslick, 1998; 강소희, 방정숙, 2008에서 재인용).

Küchemann(1981)은 수학에서 나타나는 문자의 다양한 사용법을 분류하려고 시도하였는데 그는 문자에 주어지는 의미에 따라 문제의 해석이나 풀이방법이 달라질 수 있고 실제로 학생들이 문자에 서로 다른 여러 가지 의미를 부여하고 있다고 보았다. (김남희, 1995)

Küchemann(1981)은 대수에서의 문자 사용에 대한 학생들의 이해 수준을 평가하기 위해 문자의 다양한 사용법을 위계적으로 분류하여 6가지 사용 유형으로 설정하였다. 다음 <표 Ⅲ-2>는 문자 사용의 위계적인 성질에 따라 제시된 Küchemann의 문자 사용의 6가지 유형이다.

<표 Ⅱ-2> Küchemann의 문자 사용의 6가지 유형

구분	문자 사용의 특징
유형1	문자를 수치화함 (Letter Evaluated)
유형2	문자를 사용하지 않음 (Letter Not Used)
유형3	문자를 어떤 대상으로 사용함 (Letter Used as an Object)
유형4	문자를 특정한 미지수로 여김 (Letter Used as a Specific Unknown)
유형5	문자를 일반화된 수로 여김 (Letter Used as a Generalized Number)
유형6	문자를 변수로 여김 (Letter Used as a Variable)

일반적으로 유형 1, 2, 3은 문자에 대한 이해 수준이 낮은 경우이다. 문자 사용 유형 1은 처음부터 문자에 수가 할당되어 문자를 수치화하는 경우를 말한다. 즉, 문자에 어떤 조작을 행하지 않고 단순히 문자에 수치를 주게 되는 경우를 말하며 문자 사용 유형 2는 문자를 사용하지 않고 문제를 해결하는 경우를 뜻한다. 문자 사용 유형 3은 문자의 의미를 추상적인 것에서 구체적이고 실재적인 것으로 바꾸어 생각하는 경우로서 문자를 어떤 대상에 대한 약호로 다루는 경우와 문자를 어떤 대상 그 자체를 대신하는 것으로 사용하는 경우를 말한다.

문자 사용 유형 4는 문자를 특정하지만 알고 있지는 않은 수나 대상으로 여기는 경우이다. 문자를 그 값이 알려져 있지는 않지만 특정한 수를 대신하고 있는 것으로 연산 가능한 것으로써 해석하는 경우를 의미한다.

문자 사용 유형 5는 문자를 단 하나의 값이 아니라 일반화된 수로 해석하여 여러 가지 값을 취할 수 있다고 보는 유형이며 문자 사용 유형 6에서 문자는 여러 개의 값으로 이루어진 두 집합 사이에 존재하는 어떤 관계를 나타내는 것을 말한다(강소희, 방정숙. 2008).

Küchemann은 문자 사용의 6가지 유형에 근거하여 학생들의 문자 이해 수준을 4단계로 나누어 설명하고 있다. 이러한 문자의 4가지 이해 수준은 <표 Ⅱ-3>와 같다.

<표 Ⅱ-3> 문자의 4가지 이해 수준

분류	문자 이해 수준
1	대수구문의 이해와 문자식 계산의 불완전한 능력
2	대수적 기호의 사용
3	문자를 미지수로 이해
4	문자를 일반화된 수나 변수로 해석할 수 있는 수준

문자 이해 수준 1은 문자 사용 유형 1, 2, 3에 해당되는 수준으로 대수 구문의 이해와 문자식 계산에 있어서 불완전한 능력을 보이는 수준이며, 문자 이해 수준 2는 수준 1과 마찬가지로 유형 1, 2, 3에 해당되지만 대수 기호를 올바로 사용하고 대수 구문을 바르게 이해하고 있는 수준을 의미한다.

문자 이해 수준 3은 문자 사용 유형 1, 2, 3, 4에 해당되는 수준으로 문제의 구조가 간단한 경우에 한해서 문자를 미지수로 다룰 수 있는 경우를 의미하며, 문자 이해 수준 4는 6가지의 문자 사용 유형에 모두 해당되며 문자를 미지수로 이해하여 사용하기를 요구하면서 구조가 좀 더 복잡한 문제를 다룰 수 있고 문자를 일반화된 수나 변수로 해석할 수 있

는 수준이다.

이러한 문자이해 수준과 문자 유형을 관련지어 표로 나타내면 <표 Ⅱ-4>와 같다.

<표 Ⅱ-4> Küchemann의 문자 이해 수준

사용 / 이해	유형1	유형2	유형3	유형4	유형5	유형6	설명
문자 이해 수준 1	○	○	○				대수구문의 이해와 문자식 계산의 불완전한 능력을 보임
문자 이해 수준 2	○	○	○				대수 기호를 올바로 사용하고 대수 구문을 바르게 이해하고 있음
문자 이해 수준 3	○	○	○	○			문자의 구조가 간단한 경우에 한해서 문자를 미지수로 다룰 수 있음
문자 이해 수준 4	○	○	○	○	○	○	구조가 좀 더 복잡한 문제에서도 문자를 미지수로 다룰 수 있음

초등학교 고학년 시기에는 학생들이 문자가 여러 가지 수를 대신할 수 있다는 생각을 할 수 있어서 대입과 같은 기본 조작이 가능해지기 때문에 전 단계에서 고정된 대상에 대해 사용된 기호 □가 문자 x로 전환되어 도입될 수 있다. 이 때 중요한 것은 미지수로 사용된 문자에 여러 가지 값을 넣어보면서 식의 참, 거짓을 판별해보는 과정 속에서 변수의 변화성을 체험하게 하는 것이다. 문자가 여러 가지 값을 가질 수 있다는 생각으로부터 일반화된 표현을 구성해 보는 것이 가능해지고 학생들은 덧셈의 교환법칙을 □+△=△+□로 표현하는 것을 이해할 수 있다(이 표현은 '임의의'의 의미에 대한 이해가 보다 완전해지는 중학교 단계에 가서 문자로 전환되어 $a+b=b+a$로 제시된다). 이 때 비형식적으로라도 학생들로 하여금 일반화된 표현을 구성해 보도록 하고 일반화된 표현을 다시 특수한 경우에 적용해 보는 과정을 체험시키도록 지도하는 것이 필요하다. 또한 실세계의 변화는 대상에 대한 성질과 그들 사이의 관계에 주목할 수 있는 기회 역시 충분히 주어져야 한다.

4. 대수의 사고 요소 분석

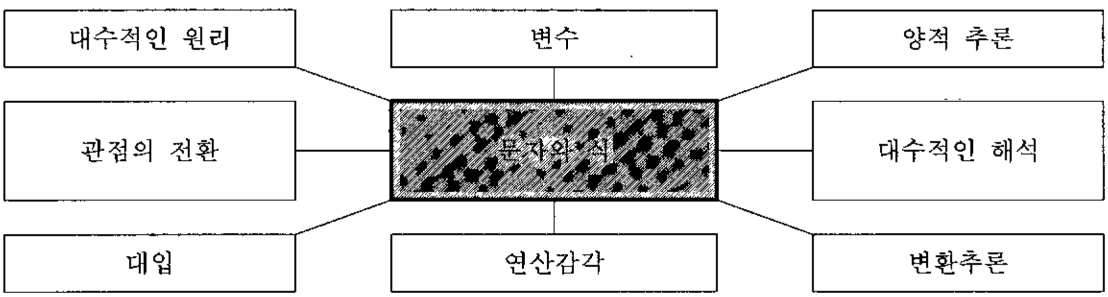
우정호, 김성준(2007)은 학교대수와 관련해서 대수적 사고 요소를 <표Ⅱ-5>와 같이 분석하였는데 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.

<표 Ⅱ-5>대수적 사고와 대수적 사고 요소(우정호, 김성준. 2007)

대수적 사고	대수적 사고 요소	
	문자와 식	방정식
분석적 사고와 비례적 사고		분석적 사고, 비례적 사고
형식 불역의 원리(일반화)	대수적인 원리	
과정-대상의 상호작용	관점의 전환	관계 파악 능력, 가역적 사고
문자 기호에 대한 동적인 해석 능력	변수, 대수적인 해석, 변환추론, 연산감각, 대입	미지수, 대칭성 알아보기 문제해결 도구로 인식하기

가. 문자와 식과 관련된 대수적 사고 요소

여기서 문자와 식과 관련된 대수적 사고 요소들은 [그림Ⅱ-1]와 같은데 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.



[그림 Ⅱ-1] '문자와 식'과 관련된 대수적 사고 요소(우정호, 김성준. 2007)

1) 대수적인 원리: 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산, 관계를 확장하는 것으로, 이것은 수학을 만들어내는 원리일 뿐만 아니라 교수학적인 기능까지 가진다.
2) 변수: 문자와 식에서 변수는 일반화된 수, 다가명사, 변하는 양 등 다양한 의미를 지니게 된다(김남희, 1997).
3) 양적 추론(quantitative reasoning): 수에 대해서 뿐 아니라 문자 기호에 대해서도 동일하게 작용될 수 있으며, 주어진 상황에서 양의 변화를 파악하여 문자와 식으로 나타내는 데에도 중요한 역할을 한다.
4) 대수적인 해석: 문제 상황에서 적합한 문자를 선택하여 주어진 상황을 식으로 표현하

는 것이다.

5) 변환추론(transformation reasoning): 식의 변형을 통해 동치인 식을 이끌어내는 과정에서 요구되는 사고이다. 단순한 구문론 규칙이 아닌 일련의 사고 과정을 거쳐 문자식을 이해하기 위한 것이다.
6) 연산감각(operation sense): 식의 조작에서 사칙 연산과 교환, 결합, 분배법칙 등의 연산법칙과 함께 사용되는 사고 요소이다.
7) 대입: 수를 변수로 대치하면 일반화가 되고, 변수에 수를 대입하면 특수화가 된다. 따라서 대수와 산술 사이의 가역적인 관계를 보여준다.
8) 관점의 전환: 문제에 제시된 조건으로부터 경우에 따라 부분 또는 전체로 문제를 파악하는 것을 포함한다. 패턴과 관계를 문자로 표현할 때 중요한 역할을 하게 된다.

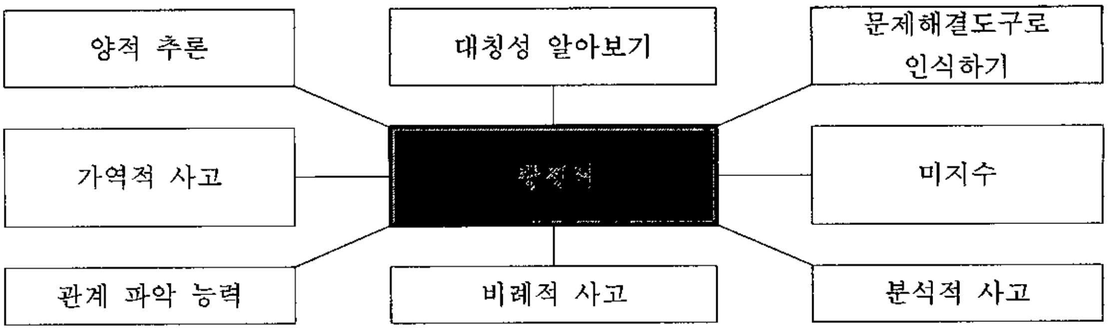
나. 방정식과 관련된 대수적 사고 요소

다음으로 방정식과 관련된 대수적 사고 요소를 아래 [그림Ⅱ-2]와 같이 들고 있다.

1) 양을 비교하는 양적 추론: 양적 추론은 산술에서는 일정한 값에 대해 사고하는 것으로 제한되지만, 대수에서는 양을 대상으로 보고, 관계를 일반화하는 것, 변하는 양과 미지수를 사용하는 것 등에서 광범위하게 적용된다.
2) 대칭성 알아보기: 대수에서는, 산술에서의 과정과 결과를 구분하는 기호라는 인식을 넘어, 등호를 동치 관계, 즉 대칭적인 관계를 나타내는 기호로 파악할 수 있어야 한다.
3) 문제해결도구로 인식하기: 학생들은 문제 상황에 적합한 해결전략을 선택하는 과정에서 방정식을 보다 효과적인 문제해결도구로 인식할 수 있어야 한다.
4) 미지수: 방정식에서 미지수는 방정식의 해를 나타내는 자리지기(placeholder)에 해당하고 수와 문자를 연결하는 미지인 양을 다루는 맥락에서 미지수를 이해할 필요가 있다.
5) 분석적 사고: 분석적 사고는 방정식의 풀이에서 기본적인 사고 요소이다.
6) 비례적 사고: 등식의 성질을 이용한 풀이에는 비례관계를 이용한 추론이 보다 분명하게 드러나고 특히 일차방정식의 경우 비례적 사고는 선형성(linearity)과 함께 방정식의 풀이에서 핵심적인 사고 요소 가운데 하나이다.
7) 관계 파악 능력: 관계를 파악하는 능력은 주어진 조건이나 정보를 다양한 형태로 인식하는 능력을 의미한다(Ameron, 2002; 재인용). 방정식에서 관계를 적절히 파악하기 위해서는 식을 대상으로 보는 능력, 관계를 통해 양을 파악하는 능력, 문제 결정

요소 간의 관계를 파악하는 능력이 요구된다.

8) 가역적 사고: 초등학교의 경우 예상과 확인에서 연산의 순서를 바꾸어서 추론하면서 나타난다.



[그림 Ⅱ-2] '방정식'과 관련된 대수적 사고 요소(우정호, 김성준. 2007)

Ⅲ. 연구의 실제

현재 중학교 1학년에서 처음 다루어지고 있는 미지수 x의 학습이 개정 교육과정에서는 6학년에서 도입되었다. 따라서 제7차 교육과정 교과서에서 초기대수의 문자 사용 유형을 분석하여 다양한 문자 사용 유형의 자료를 개발하는 것은 학습자의 미지수 x 학습에 대한 사전 준비도를 진단하고 대수교육에 대한 사고의 틀을 넓힐 수 있는 유용한 연구가 될 것이다.

1. 4-가 단계에서 6-나 단계 교과서 문자 사용 유형 분석

교과서에 제시되고 있는 문제를 유형별로 분류해 살펴보고자 한다. 현재 개정 교육과정의 4학년 2학기, 5, 6학년 교과서가 아직 개발되지 않았기 때문에 본 연구에서는 제7차 교육과정에 근거한 교과서를 중심으로 교과서 및 익힘책에 실려 있는 문제를 문자 사용 유형에 따라 나누어 살펴보도록 하겠다.

<표 Ⅲ-1> 4-가 단계에서 6-나 단계 교과서 문자 사용 유형별 분석

학년	교과서	문자 사용 유형						비고
		1	2	3	4	5	6	
4	4-가 수학	208	0	18	0	0	0	226
	4-가 수학익힘	682	0	11	0	12	0	705
	4-나 수학	40	24	53	0	0	12	129
	4-나 수학익힘	282	0	66	0	0	22	370
5	5-가 수학	172	4	38	0	1	0	215
	5-가 수학익힘	664	0	22	0	4	0	690
	5-나 수학	201	0	208	0	0	0	409
	5-나 수학익힘	455	0	245	0	4	0	704
6	6-가 수학	218	0	37	2	8	0	265
	6-가 수학익힘	629	0	162	0	0	0	791
	6-나 수학	404	0	8	0	0	3	415
	6-나 수학익힘	612	0	30	0	0	11	653
합 계		잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	0
백분율(%)		81.96	0.50	16.12	0.04	0.52	0.86	100

제7차 초등학교 교과서 4-가 단계에서 6-나 단계까지의 문제를 문자 사용 유형에 따라 분석해 본 결과 위와 같은 결과를 얻을 수 있었다. 이 결과는 초등교사 3인과 초등 교육 전문가 1인이 제7차 교육과정 4-가 단계에서 6-나 단계 사이의 수학 교과서와 익힘책에 수록되어 있는 문제들을 분석하여 Küchemann의 문자 사용 유형에 따라 분류한 것으로 논의한 회의록은 본 논문 <부록2>에 제시하였다.

위의 결과에서 보여지는 것과 같이 초등학교 4-가 단계에서 6-나 단계 사이에서 교과서 및 익힘책에 수록되어 있는 문자 사용 유형은 전체 5,572개의 문자 사용 문항 중에 유형1이 4,567(81.96%)개에 달해 대부분을 차지하고 있었고 그 뒤로 유형3이 898(16.12%)개로 많아 다가이름으로서의 문자 사용 유형이 그 뒤를 이루었다. 반면에, 유형2, 유형4, 유형5, 유형6은 1%도 안되는 비율을 보이고 있어 초등학교 교과서의 문자 사용 유형이 유형1에 극심하게 편중되어 있고 다음으로 유형3에 집중되어 나타났다. 이것은 학생들의 다양한 대수적 사고 요소를 경험하도록 해야 할 초등 교육과정을 단편적이고 획일적으로 만들어 대수적 사고 요소 개발에 큰 걸림돌이 되고 있는 것으로 나타났다. 뿐만 아니라 중등 교육과정에서 배우는 대수와의 연결성 관점에서 중학교의 대수학습에 쉽게 접근할 수 있도록 문자 사용 유형 2, 4, 5, 6과 같은 다양한 문자 사용 유형을 제시해야 함을 시사하고 있다. 따라서, 앞으로의 연구에서는 5-가, 5-나 단계에서 활용가능한 문자유형 관련 자료를 개발하도록 하겠다.

위의 결과에 따라서 교과서에서 제시되는 단원에 따라서 어떤 분포를 보이는지 알아보기

위하여 본 연구 자료 제작 단계인 5-가 단계의 문자 사용 유형을 예시적으로 살펴보면, 제7차 교육과정 교과서에 제시된 단원별로 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 5-가 수학 단원별 문자 사용 유형별 분석

단원	문자 사용 유형						합계	비율 (%)
	1	2	3	4	5	6		
1. 배수와 약수	32	4	0	0	0	0	36	16.74
2. 무늬 만들기	0	0	0	0	0	0	0	0.00
3. 약분과 통분	61	0	0	0	0	0	61	28.37
4. 직육면체	0	0	24	0	0	0	24	11.16
5. 분수의 덧셈과 뺄셈	23	0	0	0	0	0	23	10.70
6. 평면도형의 둘레와 넓이	14	0	14	0	1	0	29	13.49
7. 분수의 곱셈	42	0	0	0	0	0	42	19.53
8. 문제 푸는 방법 찾기	0	0	0	0	0	0	0	0.00
합계	172	4	38	0	1	0	215	
백분율(%)	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	잘못된 계산식	

이러한 분석 결과에서 시사하는 바는 초등학교 5-가 단계에서 5-나 단계에 걸쳐 2018개의 문자 유형이 사용되었는데 이 중에서 13문항을 제외한 2005개의 문자가 유형1과 유형3에 한정되어 사용되었으며 그러한 문자도 문제 푸는 방법 찾기 등의 초기대수의 전략에 따라서 대수적 사고 요소를 기를 수 있는 단원에서는 5-가 0문자, 5-가 익힘책 22문자, 5-나 8문자, 5-나 익힘책 0문자의 사용 유형을 보임으로서 문제 풀기 전략은 사용하지만 일반화하거나 문자 □를 사용하지 않아 6학년에서 미지수 x와 간단한 방정식 풀기의 도입에 많은 어려움을 보일 것이다. 또한 기존의 문제 푸는 방법 찾기에서 다루어졌던 전략들과 간단한 방정식 풀기를 쉽게 연결 짓기 못함으로써 기존 교육과정과 같이 대수에 대한 형식적인 풀이가 되풀이될 수 있다.

따라서 이후 6학년에서 미지수 x의 도입에 앞서 5-가, 5-나 단계 단원에서 다양한 문자 사용 유형을 학습할 수 있도록 자료를 제작하는 것은 유의미한 연구가 될 것이다.

2. 자료 개발의 실제

가. 자료 개발 방향

개정 교육과정에서 초등으로 이동되는 방정식 단원에 대해서 알아보고, 초기대수적 관점에서 제7차 교육과정 4-가 단계에서 6-나 단계에 이르는 교과서와 익힘책을 문자 사용 유형에 따라 분석해 보았다. 이에 따라서 유형1과 유형3에 지나치게 편중되어 있는 교과서의

문자 사용 유형을 확인할 수 보았다.

초등학교 교과서의 문자 사용 유형을 분석해 본 결과 학습자들이 다양한 문자 사용 유형에 의해 대수적 사고 요소를 경험해 보면서 추론 능력과 분석적 사고 및 관계 파악 능력 등의 다양한 사고 요소들을 습득할 수 있도록 다음과 같은 사항을 고려하여 문제를 개발할 필요가 있다.

1) 다양한 문자 사용 유형(일반화, 변수의 성질)을 접해볼 수 있는 자료가 되어야 한다.

2) 다양한 대수적 사고 요소를 제공해 줄 수 있어야 한다.

3) 미지수의 개념과 □와 x를 연결시켜 줄 수 있는 자료가 되어야 한다.

방정식의 풀이와 별개로 자연수와 양의 유리수(분수 및 소수)의 값과 □의 값을 비교하면서 문자와 수를 서로 바꾸어 보는 활동을 통해 수를 일반화하고 나아가 미지수 x와의 관련성을 파악할 수 있다.

4) 초등의 규칙성과 문제해결 영역과 중등의 대수를 연결시켜 줄 수 있는 자료가 되어야 한다.

5) 각 자료마다 자료번호, 관련단원, 5-가, 5-나 분석한 유형과 개발한 유형을 명시했다.

제작한 자료를 학교 현장의 학습활동에서 손쉽게 적용할 수 있도록 프로그램의 처음에 자료번호를 '학년-단계(학기)-단원-자료번호'의 단계로 자료번호를 두어 자료를 사용하는 교사가 찾기 쉽도록 정렬하였으며, 관련단원과 대수적 사고 요소를 두어 자료의 사용 시기와 사용 목적을 정리하여 <표Ⅲ-3>과 같이 분류 틀을 제시하였다.

또한 교과서에서 제시된 자료를 변형할 경우, 교과서 내에서 분석된 문자 사용 유형과 개발된 문자 사용 유형을 제시하여 문자 사용 유형을 고려하여 자료를 선택할 수 있도록 고안하였다.

<표 Ⅲ-3> 개발한 자료의 분류 틀

자료번호	관련 단원	교과서의 문자 사용 유형	개발된 자료의 문자 사용 유형	관련된 대수적 사고 요소
5-1-6-1	6. 평면도형의 둘레와 넓이	유형1	유형1, 유형6	관계 추론
지도상의 유의점				

6) 해당 문제에 문자 사용 유형을 명시했다. 그러나 이것은 교사들이 자료를 쉽게 활용할 수 있도록 한 것으로 실제 수업에 활용할 때에는 문제와 함께 제시된 유형 지문을 제거하고 활용하기 바란다.

7) 개발된 자료는 교과서 활동을 바탕으로 아래와 같은 틀 안에 제시하였다.

<표 Ⅲ-4> 개발된 자료의 유형 제시형태

	유형4

나. 자료 개발

본 연구에서 개발한 자료 가운데 예시자료를 아래 그림 [Ⅲ-1], 그림[Ⅲ-2]와 같이 제시하였다.

자료번호	관련 단원	교과서의 문자 사용 유형	개발된 자료의 문자 사용 유형	관련된 대수적 사고 요소
5-1-6-5	6. 평면도형의 둘레와 넓이	-	유형4, 유형6	대수적인 원리, 양적 추론
지도상의 유의점	·직사각형의 둘레의 길이가 일정할 때 넓이와의 관계를 눈으로 보고 방정식과 비교하여 관계를 알 수 있도록 도와준다.			

◎ **활동2 직사각형의 둘레가 16cm일 때 넓이는 어떻게 변하는지 알아봅시다.**

왼편의 직사각형의 둘레의 길이가 16cm 이고 가로의 길이가 1cm일 때 세로의 길이는 얼마입니까?

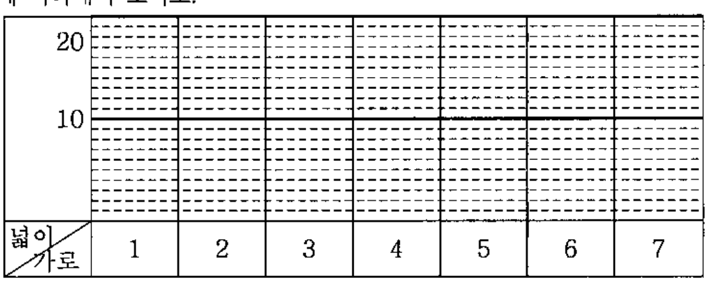
■ 가로의 길이가 1cm부터 1cm씩 커지면 세로의 길이는 어떻게 변하는지 표를 완성하여 보시오.

가로	1	2	3	4	5	6	7
세로	7						

㉯

가로	1	2	3	4	5	6	7
세로	7	6	5	4	3	2	1

■ 위의 표를 기준으로 가로의 길이가 1cm씩 커질 때 직사각형의 넓이가 어떻게 변하는지 막대 그래프에 나타내어 보시오.



■ 넓이가 가장 넓은 사각형은 가로와 세로의 길이가 얼마인지 말해 보시오.
㉯ 넓이가 16(㎠)일 때 가장 넓은 사각형이 된다. 이 때 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 4(cm)이다.

■ 가로의 길이를 □cm라고 하면 세로의 길이를 □를 사용하여 나타내어 보시오. — 유형4

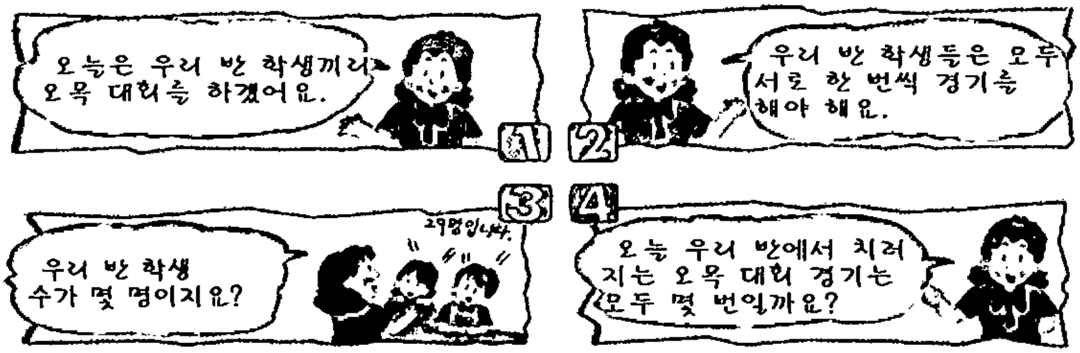
㉯ 세로의 길이 = $\frac{16-\square\times 2}{2}=8-\square$

■ 가로의 길이를 □cm라고 하면 직사각형의 넓이 ○를 □를 사용하여 나타내어 보시오. — 유형6
㉯ 직사각형의 넓이 $\bigcirc=\square\times(8-\square)$
■ 가로의 길이 □가 1에서 4까지 증가할 때, 4에서 7까지 증가할 때 넓이 ○는 어떻게 변하는지 말하여 보시오.
㉯ 넓이 ○는 가로의 길이 □가 1에서 4까지 증가하면 계속 증가하다가 4에서 7까지 증가할 때는 감소한다.

그림[Ⅲ-1] 자료 5-1-6-5

자료번호	관련 단원	교과서의 문자 사용 유형	개발된 자료의 문자 사용 유형	관련된 대수적 사고 요소
5-1-8-8	8. 문제 푸는 방법 찾기	-	유형5, 유형6	대수적인 원리, 변환추론, 대입, 관점의 전환
지도상의 유의점	·한 명씩 늘려가며 일정한 규칙을 발견한 후 규칙을 통해 식을 얻어낼 수 있도록 한다.			

◎ 여러 가지 방법으로 문제를 풀어 봅시다.



◆ 활동1 ◆ 문제를 간단히 하여 풀어 보시오.

- 무엇을 묻고 있습니까?
  ㉠ 우리 반에서 치러지는 오목대회 경기의 횟수
- 학생이 2명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
  ㉠ 1번
- 학생이 3명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
  ㉠ 3번 $(=1+2=\dfrac{(1+2)\times 2}{2}=3)$
- 학생이 4명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
  ㉠ 6번 $(=1+2+3=\dfrac{(1+3)\times 3}{2}=6)$
- 학생이 5명이면, 경기를 몇 번 해야 합니까?
  ㉠ 10번 $(=1+2+3+4=\dfrac{(1+4)\times 4}{2}=10)$

■ 어떤 규칙이 있습니까? ㉠ 1부터 학생수 보다 하나 적은 수까지를 모두 더한 값과 같습니다. ■ 식으로 나타내어 봅시다. ㉠ 경기의 수 $=1+2+3+\cdots+(\square-1)$	유형5

- 오목 대회 경기는 모두 몇 번 해야 합니까?
  ㉠ $1+2+3+4+\cdots+28=\dfrac{(1+28)\times 28}{2}=29\times 14=406$(번)

■ 학생 수가 □라면 오목 대회 경기 횟수를 □를 사용하여 나타내어 보시오. ㉠ 학생수가 □이면 (□-1)까지 더할 것이므로, $1+2+3+\cdots+(\square-1)=\{1+(\square-1)\}\times\dfrac{(\square-1)}{2}=\dfrac{\square\times(\square-1)}{2}$(번)	유형6

그림[Ⅲ-2] 자료 5-1-8-8

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 제7차 교육과정상에서 제시된 문자 사용 유형을 살펴봄으로써 개정 교육과정에서 초등으로 이동되는 대수 단원과 초기대수 간의 연결성을 분석해 보고, 이를 바탕으로 5-가와 5-나 단계에서 활용할 수 있는 대수적 사고 요소를 포함하고 있는 다양한 문자 사용 유형의 자료를 제작하는데 그 목적을 두었다.

제7차 교육과정의 4-가 단계에서 6-나 단계의 교과서를 초기대수적 관점에서 문자 사용 유형에 따라 분석한 결과 유형1의 비중이 81%를 넘어서고 그 뒤로 유형3의 비중이 16%를 넘어서는 것으로 보여 유형1과 유형3에 지나치게 편중되어 있어 초등 수학 교과서의 개선이 시급한 것으로 나타났다.

따라서 본 연구에서는 대수적 사고 요소를 분석하고 5-가, 5-나 단계 수학 교과서를 바탕으로 초등학교 5학년 초기대수 교육을 위한 자료를 개발했으며, 개발된 자료는 실제 학교 현장에서 교과서를 보충 및 확장하여 활용할 수 있다.

초등학교 수학 5학년 단계에서 다룰 수 있는 자료로 만들었고 제7차 교육과정 5학년의 단원 구성에 따라 정리하였다. 이것은 학교 현장에서 교사가 수학 교육과정을 운영하면서 교과서 진도와 함께 자료를 활용할 수 있도록 한 것이다.

그러나, 본 연구에서 개발한 초기대수 지도를 위한 문자 사용 유형에 따른 학습 자료가 현장에서 효과를 거둘 수 있을 것인가에 대해서는 아직 검증이 되지 않았다. 따라서, 본 연구에서 개발한 지도 자료를 학생들에게 투입해보고 신뢰도와 타당도가 검증된 검사지를 투입하여 사전 사후 검사 결과를 비교해 보고 그 효과를 검증하는 사후 연구가 뒤따라야 할 것이다. 이러한 일련의 활동들은 새로이 이동되는 방정식에 대한 이해를 돕고 초기대수 개념의 확장을 가져올 것이며 수학수업의 개선에도 도움이 될 수 있을 것이다.

참고 문헌

강소희, 방정숙. (2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 연구. 대한수학교육학회지; **학교수학** 10(2), 139-154.

교육과학기술부. (2008). **초등학교 교육과정 해설(IV) -수학, 과학, 실과-**. 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 6-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 6-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 6-나.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 6-나.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 5-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 5-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 5-나.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 5-나.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 4-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 4-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 4-나.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **수학 익힘책 4-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부. (2009). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-가.** 서울: 교육과학기술부.

교육인적자원부. (1998). **초등학교 교육과정 해설(IV) -수학, 과학, 실과-.** 서울: 교육인적자원부.

김남균, 김은숙. (2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. **한국수학**교육학회지;수학교육 논문집. 23(2), 399-428.

김남희. (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 박사학위논문. 서울대학교. 서울.

김동인. (2009). 비와 비율 지도를 위한 초기대수 학습 자료 개발. 석사학위논문. 제주대학교. 제주.

김성준. (2003a). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **대한수학교육학회지: 수학교육학연구.** 13(3), 309-327.

김성준. (2003b). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **대한수학교육학회지: 수학교**

육학연구. 5(3), 343-360.

김은혜. (2008). 초등학교 6학년 학생들의 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행과정에서 나타나는 현상 분석, 석사학위논문, 한국교원대학교 대학원.

우정호, 김성준. (2007). 대수의 사고 요수 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **대한수학교육학회지: 수학교육학연구**. 17(4), 453-475.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. Hart. (Ed.), Children's *Understanding of Mathematics*.(pp. 102-119). London: Murray.

Kaput, J., Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematicss experience Part Ⅰ: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent(Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study·Conference: The future of the teaching and learning of algebra*(pp. 344-351). The University of Melbourne, Australia.

ABSTRACT

Development about Early Algebra Learning Materials

Kang, Dong-Seok(Jeju Seogwang Elementary School)

An equation, which was introduced in 1st grade of middle school for the first time in the 7th curriculum, will be introduced in 6th grade of elementary school in the 2007 reformed curriculum. Accordingly, There is the necessity to study the 'early algebra'.

Therefore, this study analyzed the textbook activities between 4th grade and 6th grade in the 7th curriculum according to the types of letters use of Küchemann and investigated the actual use conditions of activities from the viewpoint of early algebra. In this result, the types of 1 and 3 of lower level of understanding letters were mostly used types contrary to higher level of understanding letters.

Moreover, before learning the letter x moved to 6th grade, the purpose of this study is to develop the materials utilizing 'early algebra', to contact the students with the various problems and to provide an opportunity to experience the thinking process to solve the problems. Accordingly, this study analyzed the algebraic thinking factors and developed the teaching materials to learn early algebraic thinking.

With these materials, the students can learn the concept of an equation more clearly and make basics that the inference activity through the pattern and generalization can be easily related to learning algebra.

key word : Early Algebra, the types of letters use, the levels of understanding letters, the algebraic thinking factors