

SMAC법을 이용한 임의가상수로내의 유동해석

김 남 형 · 김 경 보

제주대학교 토목환경공학전공

Numerical Simulation of the Fluid flow in the Free Virtual Channel by SMAC

Nam-Hyeong Kim and Gyeong-Bo Kim

Major of Civil and Environmental Engineering, Cheju National University, Jeju-Do 690-756, Korea

SMAC method, one of the computational fluid dynamics techniques, is modified from the original MAC method for the time-dependent variation of fluid flows. The Navier-Stokes equations for incompressible time-dependent viscous flow are applied, and also marker particles which present the visualization of fluid flows are used. This study is based on the use of the SMAC technique to analyze the flow behavior of the virtual investment mold during mold-filling period. In addition to flow visualization in an water-analogue experiment was performed out to verify the numerical solution of the flow pattern. Therefore, this numerical simulation could also be applied to the design of structures as well as channel and breakwater.

Key words : CFD, navier-stokes equation, SMAC method, marker particles, visualization

서 론

수치유체역학의 분야에서는 연속차원의 문제를 유한차원의 문제로 해석하는 수치기법의 하나인 유한차분법(FDM, finite difference method)이 주로 사용되어 왔다. 그러나 유체와 대기가 접하는 부분, 즉 자유표면의 위치와 형상을 인식하거나, 그 표면에서의 속도등을 계산하는 문제는 그리 쉬운 문제는 아니다. 유체의 유동현상을 기술하는 경우에 유체는 압축성을 무시할 수 있고, 이와 같은 비압축성의 유체흐름을 기술하는 기초방정식으로서 Navier-Stokes 방정

식과 연속방정식이 있다. 이 Navier-Stokes 방정식을 직접푸는 계산기법중에서, 자유표면을 포함하는 2차원 비압축성 유체를 해석하기 위하여 개발된 MAC법이 있다(Harlow and Welch. 1965 Welch et al. 1966 Hirt and Harlow. 1967 Hirt. 1968). MAC법은 대상으로 하는 계산영역을 5종류의 셀로 구분하고 그 특성에 따라 몇 개의 Marker를 배치하여 유체의 형상을 나타내도록 하는 것이다. 이 입자는 중량을 가지고 있지 않은 이상화된 입자로서 유체의 형상을 나타내기 때문에 MAC법(Marker And Cell)으로 불려진다. 이 Marker는 속도장·압력장 등의 계산

에는 직접 관여하고 있지는 않지만, 계산결과
의 시각화·흐름의 가시화에 중요한 역할을 한
다. MAC법이 발표된 이후에 많은 수정을 거
쳐 계산 시간을 현저하게 단축시킬 수 있도록
scheme을 개량한 SMAC법(Simplified Marker
And Cell)이 제안 되었다(Amsden and Harlow,
1970 Hirt et al. 1974). MAC 및 SMAC계열의
수치해석법은 유체의 표면형상이 시간과 더불어
연속적으로 변화하는 문제의 해석에 유용한 방
법으로서, 종래에도 SMAC법을 이용하여 유체
의 유동현상을 수치시물레이션 한 바 있다(김과
김, 1996, 1999, 2000).

본 연구에서는 자유표면을 갖는 가상수로내의
유동현상을 규명하기 위하여 SMAC을 이용하여
수치시물레이션을 수행하고, 그 결과를 가시화
하였다.

수치해석방법

가상의 형상 내로 흘러 들어가는 자유표면을
갖는 유체를 수치적으로 해석하기 위해서는 우
선, 가상수로내로 유입되는 유체의 위치와 그
자유표면형상을 인식해야 하고, 이후에, 인식된
유체영역과 자유표면영역에서 각기 다른 방법으
로 속도 및 압력계산을 해주어야만 한다. 이러
한 수치해석에 있어서 유입유체를 비정상유동이
며, 점성을 지닌 비압축성유체로 가정하였다.

기본방정식

2차원 비압축성 유체를 해석하기 위해 MAC
및 SMAC법에서 사용하고 있는 기본방정식은
다음과 같다.

연속방정식 :

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Navier-Stokes 방정식 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, u, v 는 각각 x 방향의 속도성분, p
는 압력, ρ 는 밀도, ν 는 동점성계수, F_x, F_y 는
 x, y 방향에 작용하는 단위질량당의 외력을 나타
내며, 본 연구에서는 편의상 x 방향은 수평방향,
 y 방향은 연직방향을 나타낸다. 식(1)을 이용하
여, 식(2)와 (3)을 약간 변형하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + F_x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + F_y \end{aligned} \quad (5)$$

으로 된다.

본 연구에서는 식(1), 식(4), 식(5)를 기본방정
식으로 사용하여 수치시물레이션을 수행한다.

기본방정식의 이산화

편미분형태의 기초방정식을 차분으로 하기 위
해서는 엇갈린 격자망(staggered mesh)을 사용
한다. 일반적으로 쓰이는 격자망에서는 속도와
압력을 격자의 중앙에서 정의하지만 엇갈린 격
자망의 경우, 속도는 격자의 중심에서, 압력은
격자의 중앙에서 정의한다. 엇갈린 격자망을 사
용하는 이유는 일반적인 격자망에서와 같이 속

도, 압력을 동일점에서 정의하는 경우에 수치해석의 부정확성과 불안정성을 초래할 수 있기 때문이다. 일반적인 격자망과 엇갈린 격자망에서 각 변수들의 정의는 Fig. 1에 나타냈다. 식(1)과 식(4)-(5)에서 시간은 전진차분, 공간은 중심차분을 이용하면, 다음과 같은 차분방정식이 얻어진다. 단, 이송항의 차분에서는 Donor-Cell법을 이용한다. 이에 대한 자세한 이산화 과정은 기존에 발표되었던 논문을 참고하기 바란다(김과 김, 1996, 1999, 2000).

계산영역의 분류 및 경계조건

본 연구에서는 Fig. 1에서 나타내듯이 5종류의 Cell로 나누어 수치시뮬레이션을 수행하였다.

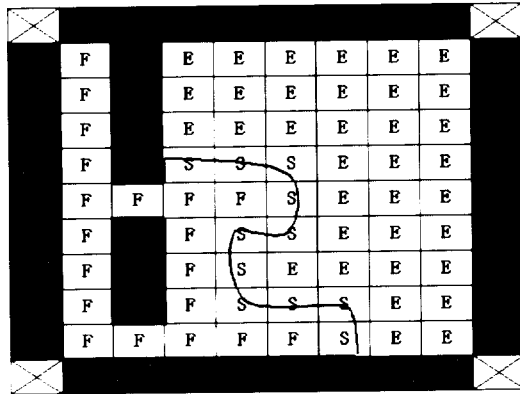


Fig. 1. Computing mesh and cell.

- ① Empty Cell(빈 공간의 셀, E) : 입자를 포함하지 않은 셀, 즉 유체가 존재하지 않는 영역
- ② Surface Cell(표면셀, S) : 입자를 포함하면서 주위에 1개 이상의 빈 셀과 이웃하는 셀
- ③ Full Cell(유체의 셀, F) : 유체로만 채워진 셀
- ④ Boundary Cell(경계의 셀, B) : 해석영역을 둘러싸는 경계의 셀
- ⑤ Obstacle Cell(장애물 셀, OB) : 해석영역 내부의 고체벽과 같은 구조물을 나타내는 셀

해석하는 유체의 좌우상하벽면에 있어서 경계조건은 slip조건을 사용했다. Slip 조건은 벽면에 마찰력이 작용하지 않는 것을 의미한다. Fig. 2의 기호를 이용하여 경계조건을 나타내면,

$$\begin{aligned}
 u_{i-\frac{1}{2},j}^n &= 0 & , \quad \phi_{i-1,j} &= \phi_{i,j} \\
 v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n &= v_{i,j+\frac{1}{2}}^n & , \quad v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n &= v_{i,j-\frac{1}{2}}^n
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

으로 된다.

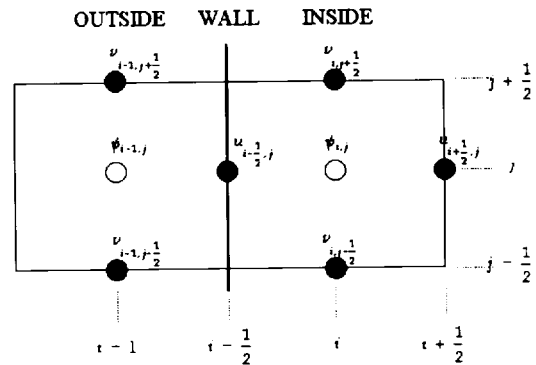


Fig. 2. The position of variables at a left wall.

또한, 자유수면의 경계조건은 입자의 운동의 궤적에서 S Cell을 식별하며, 접선응력의 조건(tangential stress condition)은 다음식으로 주어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

식 (7)에서 $u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n$ 은 다음식으로 차분된다.

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n = u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\delta y}{\delta x} \left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \tag{8}$$

또, 법선응력조건(normal stress condition)의 조건은 다음과 같다.

$$p_{i,j}^n = p_{i,j}^n (\text{외부압력}) + \frac{2\nu}{\delta y} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \tag{9}$$

이때 P 는 동적압력(dynamic pressure)을 나타낸다. 그리고 프로그램의 반복계산을 할때에 다음과 같이 수렴기준을 사용한다.

$$\frac{\left| \varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k \right|}{\left| \varphi_{i,j}^{k+1} + \varphi_{i,j}^k \right|} < \epsilon \quad (10)$$

여기서 ϵ 은 0.0002로 했다.

해석결과 및 고찰

계산의 수순을 Fig. 4에 나타낸다. Fig. 4에서 나타내듯이 계산의 전 과정은 크게 나누어 3개의 부분으로 구성이 된다. 먼저 제 1단계에서는 초기계산영역에 있어서 와도이송을 보존하는 \tilde{u}, \tilde{v} 을 구하고, 다음의 제2단계에서

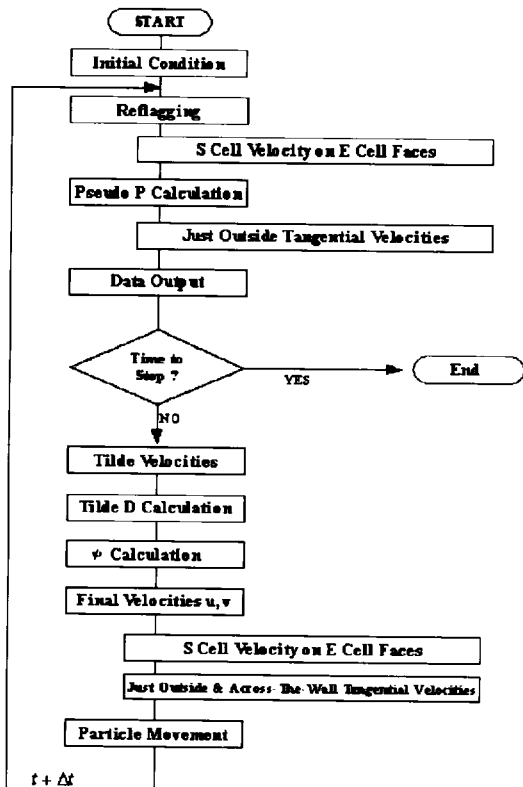


Fig. 3. The calculation flow chart.

$D=0$ 을 만족하는 u, v 을 결정하며, 마지막 단계에서 이들을 이용하여 Marker를 이동시켜, 계산영역을 재설정한다. 이 3단계를 반복하는 것에 의해 각 시각에서의 속도, 압력을 구하며 연속적으로 Marker를 화면에 출력시킴으로써 애니메이션 효과를 얻는 것이다.

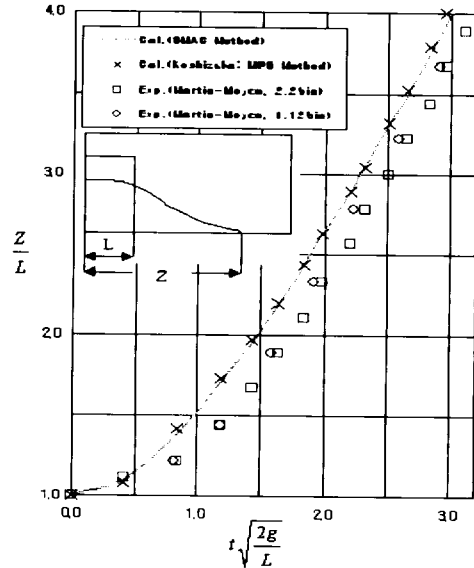


Fig. 4. Comparison of SMAC result with experimental data and MPS result for the water column collapse problem.

Fig. 4는 SMAC법을 이용한 수치시물레이션의 타당성을 검토하기 위해 Martin and Moyce (1952)의 실험결과 및 Koshizuka and Oka(1996)의 MPS법 계산결과와 비교하여 도표로 나타낸 것이며, 그 비교결과를 통하여 본 SMAC법의 해석기법이 검증된바가 있다(김과 김, 2001). 직사각형 가상형상의 물의 유동현상을 가시화하기 위해 사용된 영역의 크기는 x 방향으로 30 cell, y 방향으로 30 cell로 하였고 그 각 cell의 크기는 1 cm로 하였기 때문에 전체 영역은 $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ 이다. 유체의 동점성계수는 $\nu = 0.01\text{ cm}^2/\text{sec}$ 로 하였으며, 유입속도는 $26.5\text{ cm}/\text{sec}$ 이다. 경계벽의 조건은 이상화된 가상형상으로 생각하여

마찰이 없는 slip조건으로 하였다. 중력가속도는 가상적 상황임을 감안하여 $g_x = 72 \text{ cm/sec}^2$ 으로 하였다.

Fig. 5 및 Fig. 6은 유입구가 좌측상단에 위치한 경우 Marker입자와 속도벡터를 나타낸 것이다. Fig. 5는 Marker들을 이용하여 임의가상수로내의 왼쪽 상단에 위치한 유입구를 통하여 유입되는 유체의 이동형상을 시간의 경과에 따라 나타냈다. Fig. 5의 (a)~(f)에서 보듯이 빠른 속도로 가상수로에 유입된 유체는 유입직후 중력 효과에 의해 오른쪽 빈공간으로 유입되면서 차

츄 가상수로를 채우게 된다. 이때 밑으로 흘러 내려 오던 유체는 두 벽사이의 공간과 하단에 있는 벽과 바닥 사이의 공간을 따라 흘러 들어가는 현상이 관찰된다. Fig. 5(c)에서는 위에서 낙하하는 유체와 밑으로 흘러나오는 유체가 계속적으로 충돌하면서 큰 소용돌이를 형성하게 된다. 이러한 소용돌이를 타고 유체는 다시 하단에 있는 벽과 강하게 접촉하며, 이는 두 유입구에서 흘러 나오는 유체에 의해 더 큰 소용돌이를 형성하고 있다. 이로 인하여 수로의 하단 벽에서는 유체가 쉽게 유입되지 못하고 정체되

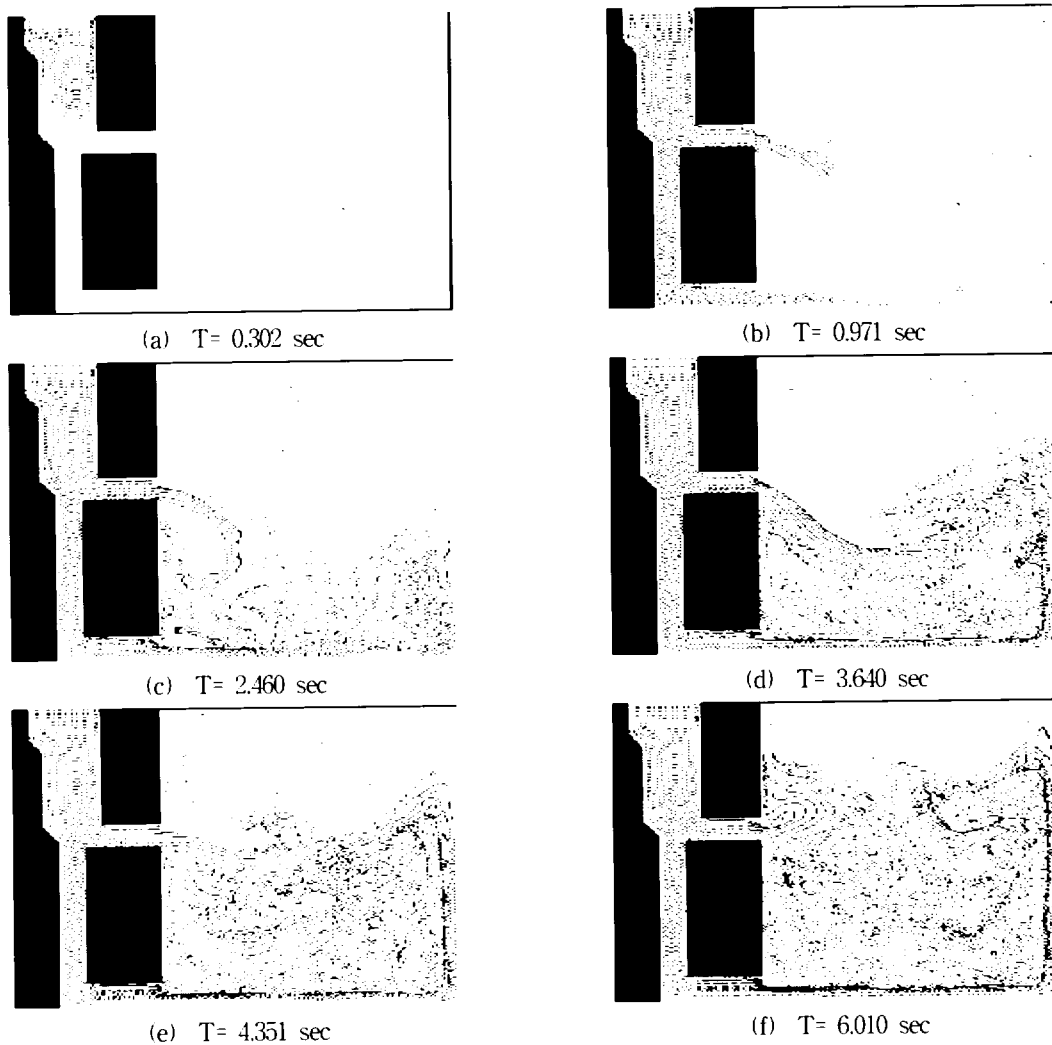


Fig. 5. Configuration of markers for the channel filling at six different times.

면서 유속이 증가하는 현상도 보였다. 유입구인 왼편에서 계속되는 유량의 증가와 유입되는 에너지에 의해서 가상형상의 중앙에서는 강한 와류가 형성함을 알 수 있다. 그리고, Fig. 5(e)에서의 중앙부근에 Marker들의 현상에서 보듯이 유체의 난류형성에 의해 기포가 발생할 가능성이 있다. 이러한 와류의 형성이나 난류의 발생은 실제수로내의 유체의 흐름을 방해하며, 수로 벽면에 국부적인 마모에 영향을 줄 것으로 사료된다.

또한, Fig. 6는 속도벡터의 분포를 나타내었

다. Marker입자의 이동형상과 마찬가지로 비슷한 흐름이 보이는 것을 알 수 있으며, (a)~(f)에서 보듯이 유체는 중력에 영향으로 밑으로 흘러 내려오고 있으며, 두 수로벽에 영향으로 위와 아래의 두 방향으로 유입되고 있다. Fig. 6(b)에서 보는 바와 같이, 두입구로 나누어져 유입되는 두 흐름은 서로 충돌하면서 수로의 아래벽면과 우측벽면에서 큰 와류가 형성되는데 이러한 부분은 벽면의 계속적인 침식으로 인하여 수로 벽면이 마모될 위험성이 있다.

이러한 해석으로부터 중력의 효과가 수로 내

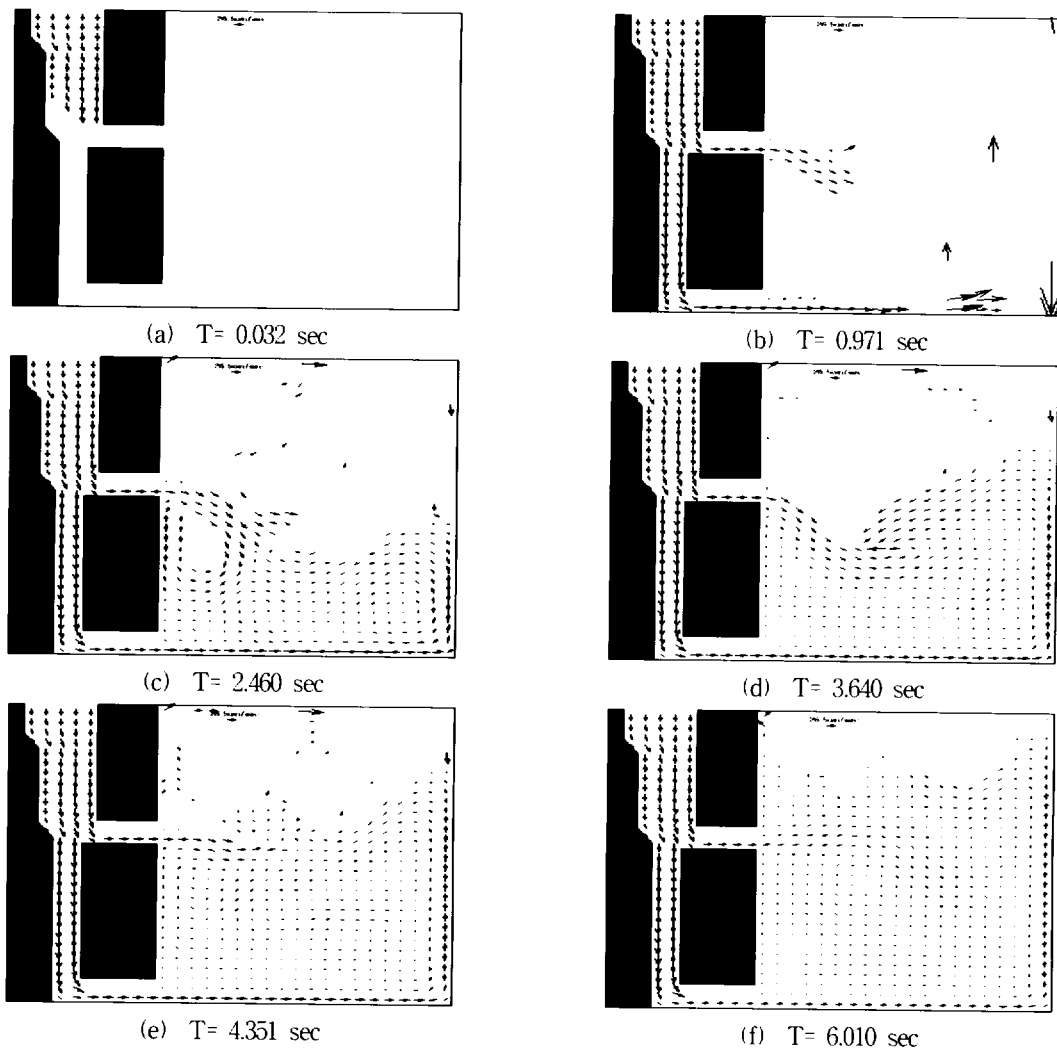


Fig. 6. Velocity vector profiles of filling a channel at six different times.

부의 유체흐름에 어떻게 영향을 미치는가를 알 수 있다. 또한 최종적으로 채워진 부위와 마모의 위험이 있는 수로벽을 찾아내는 일이 가능하고 이를 이용하여 보다 효율적인 관수로의 설계가 가능할 수 있다.

결론 및 요약

본 연구는 자유표면을 갖는 유체의 유동을 해석하기 위해서 SMAC법을 이용하여 두개의 벽이 있는 형상을 가지는 임의 형상의 가상수로를 해석하기 위하여 장애물cell(OB)에 관한 경계조건을 고려해주었다.

본 논문에서는 비교적 단순한 형태의 장애물과 계산영역만을 고려하고, 가상현상에만 적용하였다. 그러나 Marker입자분포를 통하여 유동현상의 분포를 잘 파악할 수 있었다 SMAC법과 같은 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 실질적인 활용을 위해서는 실제의 단면에 따른 적용이 필요하다.

저수지, 운하, 댐, 방조제 등에서 시공되어지는 관수로나 유공방파제 등과 같은 실제적인 구조물의 설계에 도움을 줄거라 여기며, 또한 구조물 내부에서의 유동현상에 대한 예측이 가능하게 되었다.

참 고 문 헌

김남형 · 김남국. 1996. SMAC법에 의한 유체입자 충돌의 수치시뮬레이션. 제주대 해양연보, 20 : 91-98.
 김남형 · 김남국. 1999. SMAC법에 의한 가상수조에서 유동의 수치시뮬레이션. 제주대 해양연구논문집, 23: 131-138.
 김남형 · 김남국. 2000. 가상수조에서 자유표면을 가진 유체흐름의 가시화 시뮬레이션. 한국해양공학회지, 14: 35-40.
 김남형 · 김남국. 2000. SMAC법을 이용한 물기

등 붕괴의 수치시뮬레이션. 제주대 해양연구소 논문집, 24: 19-26.
 김남형 · 김남국. 2001. SMAC법을 이용한 물기 등 붕괴의 가시화 모의. 한국해양공학회지, 15(4): 46-52.
 김남형 · 김남국. 2001. SMAC법을 이용한 물기 등 붕괴의 가시화. 한국수자원학회논문집, 34(6): 605-615.
 Amsden, A. A. and F. H. Harlow. 1970. The S MAC Method : A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-4370, 85 pp.
 Harlow, F. H. and J. E. Welch. 1965. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. Phys. of Fluids, 8(12): 2182-2189.
 Koshizuka, S. and Y. Oka. 1996. Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid. Nucl. Sci. Eng, 123: 421-434.
 Martin, J. C. and W. J. Moyce. 1952. An Experimental Study of The Collapse of Liquid Columns on A Rigid Horizontal Plane. Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, pp. 312-324.
 Welch, J. E. and F. H. Harlow and B. J. Daly. 1966. The MAC Method: A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surfaces. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-3425, 145 pp.

