濟大論文集(自然), 38, 327-334, 1994
Cheju Univ. Jour. (Natural Sci.),
38, 327-334, 1994

보조학습도구로서 Mathematica를 이용한 학습모형 개발

강동식*, 강정우*

Development of the Learning Model Utilizing Mathematica Such as the Assistant Learning Instruments

Dong-Shik Kang, Jeong-Woo Khang**

Summary

As the assistant learning instruments, computer is a very useful tool. Students make great efforts in processing intermediate mathematical steps in solving the Physical problem. Mathematica alleviates such efforts and students can make a further notice to the analysis of problems and to the interpretation of results.

We propose the three learning models utilizing Mathematica as the assistant learning instrument; the Ohm's law, the damped oscillation, the superposition of waves.

서 론

물리 문제를 풀고 해를 구하기 위해서는 문제를 분석하여 수리과정을 통해서 결과를 얻은 다음, 이를 물리적으로 해석한다. 이러한 과정 하나 하나는 중요하다. 그러나 중·고등학교 또는 대학의 초급과정 학생들이 이들 과정을 대하는 태도 내지는 투입하는 노력은 중간과정에 있는 수리적 과정에 집중되고 있다. 이 점이 물리문제는 어렵다는 인식을 형성시켰다고 본다. 다시 말해 학생들이 문제를 풀때 단순한 문제나 수리적 전개만으로 충분한 문제들은 쉽게 풀면서도, 새로 접하는 문제들은 풀지 못하는 사례가 많다. 또한 풀어서 해를 구했다 하더라도 이를 물리적으로 해석하는 노력을 기울이지 않는다. 문제를 풀어 보면서 이미 풀이가 제시된 문제는 중간과정을 이해하는데 치중함으로서 문제의 분석이나 결과의 물리적 해석은 소홀히 하게된다. 이것이 바로 새로운 문제 또는 응용문제에 부딪쳤을 때 쉽게 포기하는 요인이 된다.

수리적 과정이란 주로 물리문제를 풀어나가는데 있어서 수학적 보조 수단을 이용하는 과정으로, 대수

* 사범대학 과학교육과(Dept. of Science Education, Cheju Univ., Cheju-do, 690-756, Korea)

적 계산이나 미적분 뿐만 아니라 함수의 그래프 또는 데이터 처리와 같은 것을 말한다. 이 과정은 수학을 배운 학생으로서는 어렵지 않게 처리할 수 있는 정도임에도 불구하고 이 부분에 많은 집중을 함으로써 보다 많은 관심을 기울여야 할 문제의 분석이나 결과의 해석에는 소홀히 하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방안의 하나로서 중간 수리과정을 보조 학습도구를 이용하여 손쉽게 처리하도록 하고, 학생들의 이해활동을 주로 문제분석과 결과해석에 치중하도록 하는 것이다. 물론 지나치게 문제분석과 결과해석에만 매달림으로서 중간과정의 논리적 전개를 소홀히 다루지 않도록 하는 범위 내에서 위의 방법을 실시해야 한다(Read 등 1994). 수리적과정을 보조할 수 있는 학습도구로서는 여러가지가 있으나 이 중에서도 컴퓨터가 가장 활용 범위가 넓다. 컴퓨터를 이용한 수업 프로그램은 외국에서는 활발히 연구가 진행되고 있으며, 부분적으로 실시되고 있기도 하다. 이 컴퓨터의 교육적 활용은 현재 기대에 미칠 정도는 아니다.

정보화 사회에서 컴퓨터의 역할을 감안한다면 앞으로 교육현장에서 학습을 효율적이고 창의적 형태로 발전시키는데 컴퓨터는 필수적이라 할 수 있다(朴承載 등, 1991). 컴퓨터를 학습현장에서 사용하기 위해서는 교육용 소프트웨어가 있어야 하며 현재 많은 프로그램들이 개발 중에 있다. 이 중에서 Mathematica라는 프로그램은(Wolfram, 1991; Brown 등, 1991) 계산 및 그래프를 위해 개발된 프로그램으로서 학습현장에서 손쉽게 사용할 수 있는 프로그램 중의 하나이다.

Mathematica의 특징

Mathematica는 문제 해결의 수학적 처리를 위해서 S. Wolfram에 의해서 개발된 패키지이다. 이 패키지의 기능은 세가지로 나눌 수 있는데 (1) 수치계산 (2) 기호계산 (3) 그래픽 처리 기능등이다.

첫번째 수치계산은 종전의 프로그래밍 언어로 수치계산 프로그램을 작성하여 계산을 하는 것과 같으며 정밀도는 시스템에 상관없이 원하는 자리까지 높일 수 있다는 장점이 있다. 두번째, 기호계산은 이전의 고급언어로된 프로그램에서는 볼 수 없는 새로운 기능으로 Mthematica의 가장 큰 특징이다. 따라서 기호 계산은 연필과 종이로 하고 수치계산은 계산기로 하는 종전의 방식과는 비교가 안될 정도의 편리를 제공한다. 세번째, 그래픽 처리 기능은 여러가지 함수들 뿐만 아니라 데이터에 의해서 구해지는 함수들이 이차원, 삼차원 그래프를 보여주는데 있어서 다양한 기능과 강력한 능력을 보여 준다. 예를 들자면, 사과 그래프를 그려 놓고 확대, 축소는 물론 정면에서 또는 옆면에서의 모양을 자유자재로 보여준다. 물론 그래픽을 전문적으로 다루는 프로그램에서도 이런 기능을 보여 주지만 위와 같이 여러가지 기능을 함께 지니면서 프로그램 크기는 비교적 작은 프로그램은 Mathematica뿐이다.

다음으로 Mathematica의 장점은 대부분 하나의 명령어가 그 자체로 하나의 일을 처리하는데 있다. 고급 프로그램 언어는 여러가지 명령어를 조합하여 한가지 일을 처리한다. 그러므로 언어를 배우는 일은 쉬운일이 아니다. Mathematica에서도 물론 명령어를 조합하여 하나의 일을 처리하게 할 수도 있다. 말하자면 프로그래밍도 가능하며, 이렇게 해서 사용자가 원하는 대로 여러가지 능력을 발휘할 수도 있다. 단지 고급언어와 비교할 때 컴파일러를 사용하여 실행화일을 따로 만들 수 없다는 단점이 있을 뿐이다.

이와 같은 점 때문에 Mathematica를 배우는 일은 상대적으로 용이하며, 강력하고 다양한 기능과 쉽게 배울 수 있다는 점이 Mathematica를 학습현장에서 보조 학습도구로 사용할 수 있게끔 한다.

물리실험 및 물리문제에 적용

실제적인 물리문제(박승재 등 1989; D. Holliday 1973)에 앞 절에서 소개한 Mathematica를 적용해 보기로 하겠다. 첫번째는 옴의 법칙으로 중·고등학교는 물론 대학교에서도 필수적인 실험 중의 하나이다. 이 실험에서는 저항 값을 고정시켜 놓고 전류와 전압을 측정해서, 결과를 이론치와 비교하여 옴의 법칙을 확인한다. 이 경우 데이터를 그래프로 그리고 이론이 예측하는 그래프와 비교해 보는 작업이 중요한데, 이 과정을 Mathematica를 이용하면 쉽게 비교가 된다. 두번째로는 감쇠진동의 경우로 계산과정의 미분 방정식을 풀어야 하고 결과를 해석해야 한다.

Mathematica는 계산과정의 미분 방정식 풀이와 결과를 그래프화함으로서 시각적으로 물리현상을 관찰할 수 있게 한다. 그리고 감쇠계수의 여러가지 값에서 나타나는 현상도 쉽게 비교해 볼 수 있다. 세번째로는 파동의 중첩현상으로서 두개 이상의 파가 합성될 때 보강간섭 및 상쇄간섭을 한다. 이 과정을 Mathematica를 이용하여 진폭, 진동수를 바꿔가면서 보여줄 수 있다. 이외에도 전자기학에서 벡터장이나, 전위차를 가시화하는데 이용할 수 있다.

1. 옴의 법칙

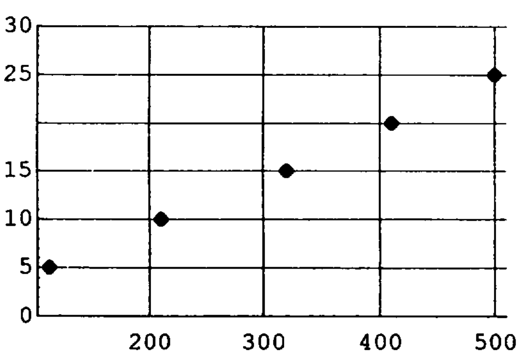
저항이 R인 도선 양단의 전위차가 V일때 도선에 흐르는 전류 I와 저항 R, 전위차 V 사이에는 다음과 같은 옴의 법칙이 성립한다.

$$V = RI$$

물리실험을 통해서 위의 법칙을 확인하며, 또한 두 개의 물리량 값들을 평균해서 그 값을 이용하여 나머지의 물리량을 구한다. 저항값이 51.5 일때 전위차의 측정치는 다음과 같다(전류I의 단위는 mA, 전위차 V의 단위는 Volt).

(I, V) = {(110, 5), (210, 10), (320, 15), (410, 20), (500, 25)}

In[1] : =data={(110, 5), (210, 10), (320, 15), (410, 20), (500, 25)};
ListPlot [data, PlotRange ->({(100, 510}, (0, 30}),
GridLines->Automatic, PlotStyle ->PointSize [0.02]]



Out[1] : =-Graphics-

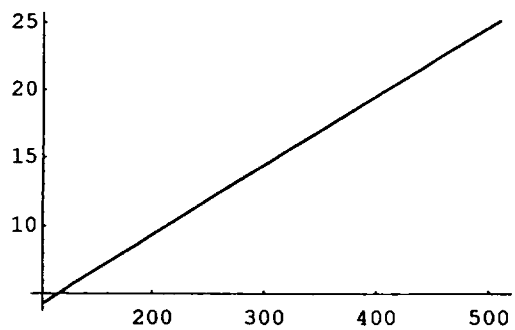
이 데이타를 이용하여 직선방정식을 구한다.

In[2} : =Fit[data, {1, i}, i]
Out[2] : =-0.790021 + 0.0509356 i

이 직선은 데이타를 이용하여 구한 전위차와 전류의 관계식으로 i의 계수는 저항값이 된다(전류의 단위가 mA임에 주의한다). i=0일때 음수의 값은 의미가 없다. 왜냐하면 이 직선은 i값이 110과 500사이일 때만 의미를 갖기 때문이다.

직선의 방정식을 그래프로 나타내면

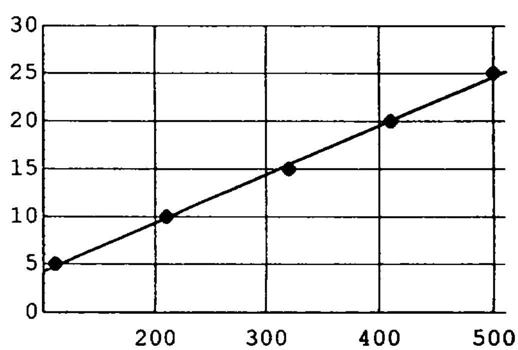
In[3] : =Plot[Out[2], {i, 100, 510}]



Out[3] : =-Graphics-

두 개의 그림을 겹쳐서 그려 보기로 하자.

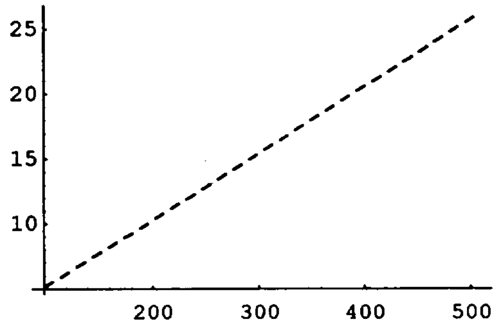
In[4] : =Show[Out[1}, Out[3]]



Out[4] : =-Graphics-

저항값이 51.5 일때 옴의 법칙 V=RI를 그래프로 그리면

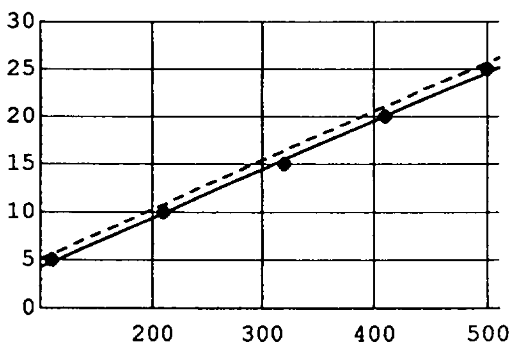
In[5] : =Plot[v=o. o515 i, {i, 100, 510}, PlotStyle→Dashing[{0. 02, 0. 02}]]



Out[5] : =-Graphics-

실험 결과와 이론을 비교해 보면

In[6] : =Show[Out[4], Out[5]]



Out[6] : =-Graphics-

저항값으로 Out[2]의 i의 계수를 사용하여 상대오차를 구해보면 다음과 같다.

In[7] : =re= (0. 0515-0. 0509356) 100/0. 0515

Out[7] : =1. 09592

따라서 상대오차가 대략 1%로서 실험치와 이론치가 잘 맞는다고 볼 수 있다. 여기서 저항값으로 R의 평균치를 써서 상대차를 구할 수 있다. 위의 In[2]에서 직선 방정식으로 고정시키는 방법외에 데이터와 데이터간을 Regression시켜서 이론치와 비교하는 방법도 있다.

2. 감쇠진동

자유진동은 한번 진동을 시작하면 영원히 진동을 계속한다. 하지만 실제적으로 자유진동은 있을 수 없으며 마찰력과 같은 힘에 의해서 진동은 감쇠되고 결국 진동은 멈추게 된다. 따라서 마찰력과 같은 감쇠요인을 고려했을때 진동이 어떤 식으로 감쇠되는가를 알아 보는 것이 중요하다. 여기서는 감쇠인자의 제곱이 (질량)×(용수철 상수)의 4배보다 작을 경우(미급감쇠)에 대해 알아 보기로 한다. 감쇠가 있을때의 진동의 방정식은 다음과 같다.

$mx'' + bx' + kx = 0,\ x' = dx/dt,\ x'' = d^2x/dt^2.$

(m;질량, b;감쇠인자, k;용수철 상수, x;변위)

우선 미분 방정식을 풀기로 하자

In[8] : =DSolve[m x"[t]+b x'[t]+k x[t]==0, x[t], t]

Out[8] : = {{x[t] -> E^((-b - Sqrt[bb - 4 k m])t) /(2m) C[1]+ E^((-b+Sqrt[bb-4 k m]) t)/(2m) C[2]}}

여기에서 C[1], C[2]는 임의의 상수로서 2차 미분 방정식의 특징이다. x값을 괄호 밖으로 끄집어내면 여러가지 연산이 편리해진다.

In[9] : =x[t]/. %

Out[9] : = (E^((-b - Sqrt[bb - 4 k m])t) /(2m) C[1]+ E^((-b+Sqrt[bb-4 k m]) t)/(2m) C[2]}

그래프를 이용하여 감쇠진동의 특징을 알아 보기 위해 상수값들을 적당히 택하기로 한다. 이들 상수값들을 다양하게 선택하므로서 여러가지 결과를 얻을 수 있으나 여기서는 한가지로 고정시키기로 한다.

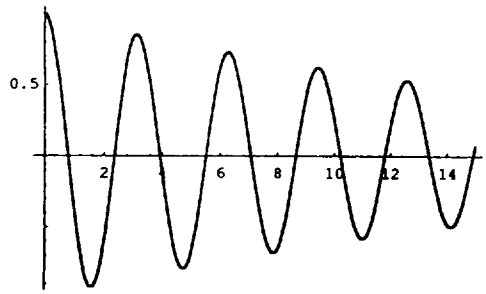
In[10] : = % /. {C[1] -> 1/2, C[2] -> 1/2, m -> 1, k -> 4, b -> 1/10}

Out[10] : = { E^((-b - Sqrt[bb - 4 k m])t)/(2m)/2 + E^((-b+Sqrt[bb-4 k m])t)/(2m)/2 }

이 결과를 Mathematica 프로그램 속에 있는 "Trigonometry" 패키지를 사용하여 삼각함수 표현으로 바꿀 수 있다.

위의 식을 그래프로 그리면

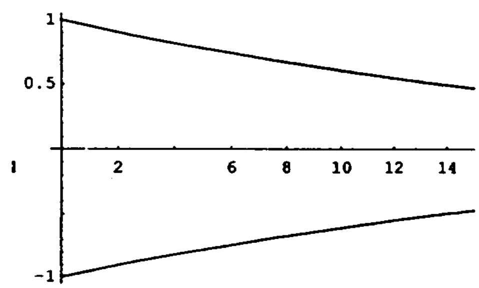
In[11] : =Plot[%, {t, 0, 15}]



Out[11] : =-Graphics-

진폭이 감소하는 경향을 보기 위해 Out[10]에서 진동에 해당하는 항을 제외한 나머지 항을 그래프로 그려보면(포락선)

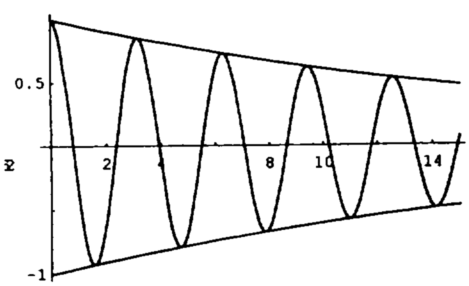
In[12] : = Plot[{E^(-1/20 t), -E^(-1/20 t)}, {t, 0, 15}]



Out[12] : = -Graphics-

두 개의 그래프를 겹침으로서 감쇠하는 현상을 분명히 알 수 있다.

In[13] : = Show[Out[4], Out[5]]



Out[13] : = -Graphics-

감쇠진동에서는 에너지가 보존되지 않고 주위 매질로 전파된다. 따라서 진동이 계속됨에 따라서 에너지는 점점 감소하게 되며, 감소하는 비율 역시 점점 작아져간다. 이러한 현상을 식으로 표현하고 그래프로 나타내 보기로 한다.

우선 에너지에 관한 식을 얻기 위해서 Out[10]을 삼각함수로 바꾸는게 좋다.

In[14] : = x1 = Out[10]

Out[14] : = $\{E^{((-b - Sqrt[bb - 4\ k\ m])t)/(2m)}/2 + E^{((-b+Sqrt[bb-4\ k\ m\ ])t)/(2m)}/2\}$

In[15] : = Needs["Graphics'Trigonometry'"]
ComplexToTrig[% / (E^(-1/20 t)]

Out[15] : = Cos[1/20 Sqrt[1599] t]

In[16] : = x2 = E^(-1/20 t) %

Out[16] : = E^(-1/20 t) Cos[1/20 Sqrt[1599] t]

이 식을 이용하여 에너지 표현식을 구하면 (m=1, k=4)

In[17] : = e = 1/2(D[x2, t])^2 + 2(x2)^2

Out[17] : =(1600 + Cos[1/10 Sqrt[1599] t] + Sqrt[1599] Sin[1/10 Sqrt[1599] t])/ (800 E^(t/10))

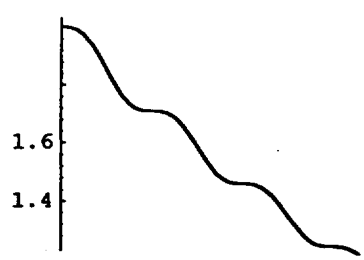
에너지 시간에 따른 변화율은

In[18] : = re = D[Out[17], t]

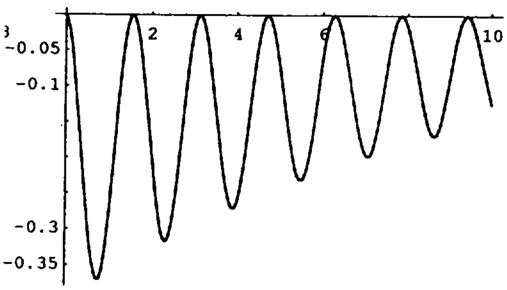
Out[18] : =(-800 + 799 Cos[1/10 Sqrt[1599] t] - Sqrt[1599] Sin[1/10 Sqrt[1599] t])/ (4000 E^(t/10))

각각을 그래프로 나타낸다.

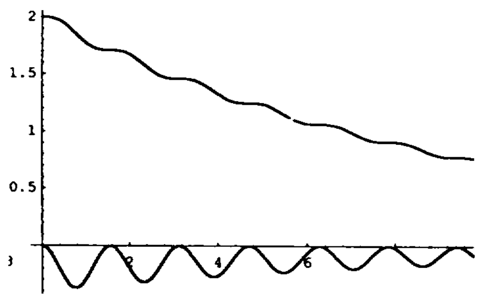
In[19] : = Plot[Out{17], {t, 0, 10}]



Out[19] : = -Graphics-
In[20] : = Plot[Out[18], [t, 0, 10}]



Out[20] : =-Graphics-
In[21] : = Show[Out[18], Out[20]]



Out[21] : =-Graphics-

이상에서 알 수 있듯이 마찰력과 같은 감쇠요인이 있을 때 진동은 점점 작아지며, 에너지와 에너지의 시간 변화율도 시간이 지남에따라 점점 작아짐을 그래프를 통해서 분명히 알 수 있다. 위에서 각각의 계수들의 값을 달리 택하여 다른 결과들도 같은 방법으로 쉽게 알 수 있다.

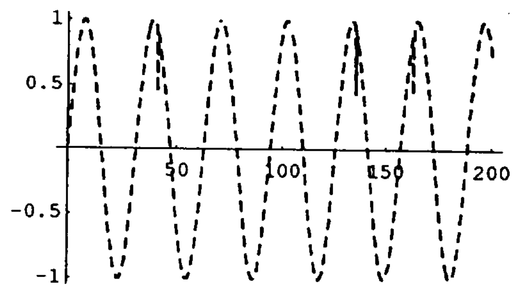
3. 파의 중첩

자연계의 여러 현상들 중에서 파동은 우리가 항상 접하는 현상이다. 소리의 전달, 빛이 퍼져 나가고 파도가 치는 것 등 이루 헤아릴 수 없다. 이들 파동이 보여주는 성질 중에 파의 중첩현상으로 맥놀이가 대표적이다. 여러가지 진폭, 진동수(또는 파장)를 가진 파들이 중첩되면 이들은 서로 보강 내지는 상쇄현상을 나타낸다. 여기서는 같은 진폭을 가진 파들의 진동수가 같은 때 혹은 다를 때 어떻게 중첩되는지를 보겠다. 먼저, 파동을 정의하면

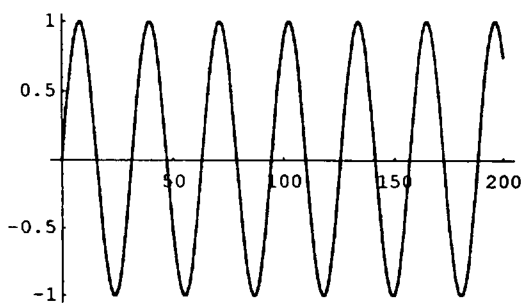
In[22] : = x1[t_] : = a Sin[w t]
In[23] : = x2[t_] : = b Sin[w t]
In[24] : = x1/. {a->1, w->0.2}
Out[24] : = Sin[0.2 t]
In[25] : = x2[t]/. {b->1, w->0.2}
Out[25] : = Sin[0.2 t]

각각의 그래프를 그려보면

In[26] : = Plot[Out[24], {t, 0, 200},
PlotStyle→Dashing [{0.02, 0.02}]]



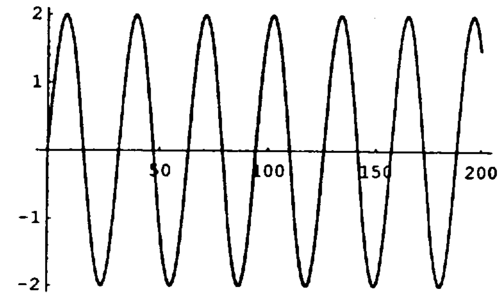
Out[26] : = -Graphics-
In[27] : = Plot[Out[25], {t, 0, 200}]



Out[27] : = -Graphics-

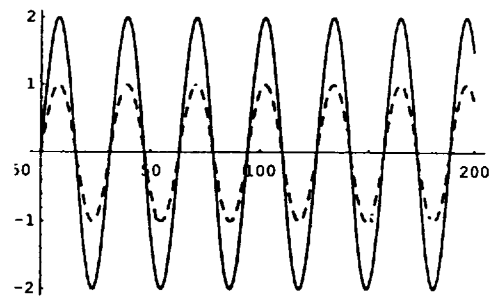
중첩을 시키고 그래프로 나타내면

In[28] : = Out[24] + Out[25]
Out[28] : = 2 Sin[0.2 t]
In[29] : = Plot[%, {t, 0, 200}]



Out[29] : = -Graphics-

In[30] : = Show[Out[26], Out[29]]



Out[30] : = -Graphics-

위 그림에서 중첩이 일어 났음을 분명히 알 수 있다. 진폭이 같고 진동수가 다른 경우 맥놀이 현상이 일어날 수도 있다.

In[31] : = x1[t] /. {a->1, w->0.2}

Out[31] : = Sin[0.2 t]

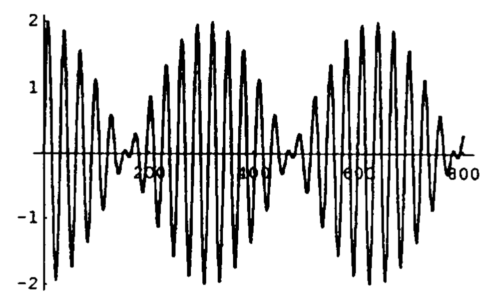
In[32] : = x2[t] /. {b->1, w->0.22}

Out[32] : = Sin[0.22 t]

In[33] : = Out[31] + Out[32]

Out[33] : = Sin[0.2 t] + Sin[0.22 t]

In[34] : = Plot[Out[33], {t, 0, 800}]



Out[34] : = -Graphics-

결과 및·고찰

지금까지 알아 본 물리현상들에 대해서는 Mathematica의 명령어들 중에서 될 수 있는한 간단하고 쉬운 것으로 선택하여 중간 수리단계 및 결과를 그래프로 해석할 수 있도록 하였으며, 세련된 방식을 택하기보다는 차례차례 누구나 할 수 있는 방식으로 전개시켰다. 실제 수업 현장에서는 중간단계에서 물리적 설명을 자세히 첨가시켜서 학생들의 물리적 이해를 높여야 할것이다.

이와 같이 물리실험이나 물리문제의 해를 구하는데 있어서 제시된 방법을 이용하면 중간 계산과정을 컴퓨터 프로그램으로 간단하고 정확하게 할 수 있고, 중간과정이나 결과해석에서 그래프를 이용하므로 인해 물리문제의 분석이나 결과의 해석을 쉽게할 수 있어 학습능률을 높일 수 있다.

제시된 세가지 모형에서 보면 알 수 있듯이 문제에서 주어지는 상수값들을 변형시킴으로서 다양한 결과를 학생 스스로가 접할 수 있으며, 또한 그래프를 통하여 비교도 쉽게 할 수 있다. 이 점이 컴퓨터를 사용하지 않았을때와의 차이점이자 장점이 된다. Mathematica가 지니는 기호 처리능력, 계산, 그래프 처리능력은 이러한 목적에 타당한 프로그램이라고 볼 수 있다. 옴의 법칙에서는 데이터에 의한 결과(Out[2])와 이론값 (Out[5])간의 비교(Out[6])를 쉽게 보여줬으며(물론 데이타가 많을수록 컴퓨터 프로그램 사용의 효과가 있음), 감쇠진동에서는 미분방정식을 풀고(Out[8]) 특별한 상수값에서는 결과(Out[13])를 그래프로 보여준다. 여기에서 다른 상수값들을 택함으로서 과도진동이나 임계진동까지도 쉽게 보여줄 수 있다. 그리고 감쇠진동의 경우 에너지 감소현상도 분명하게 보여준다 (Out[21]). 파의 중첩에서는 진동수와 진폭을 달리 하면서 중첩이 되는 현상을 쉽게 보여줄 수 있는데 여기에서는 진폭은 같고 진동수가 같은 경우(Out[29])와 진폭은 같고 진동수가 다른 경우로서 나타나는 맥놀이 현상(Out[34])을 나타냈다.

보다 복잡한 문제, 말하자면 데이터가 많은 경우, 복잡한 수식을 전개시켜야 할 경우나 수식으로 표현

이 용이하지 않은 벡터장 같은 경우들에 있어서는 Mathematica는 보다 더 효율적임을 보여주는 결과들이 많이 제시되고 있으며 앞으로 이런 연구결과들을 이용하여 체계적이고 광범위한 학습모형을 개발해야 할 것이다.

적 요

보조학습도구로서 컴퓨터는 매우 유용한 도구이다. 학생들은 문제의 중간과정에 많은 노력을 투자함으로서 문제분석이나 결과해석에 치중하지 못하는 경향이 있다. Mathematica를 이용하여 그런 노력을 완화시킬 수 있으며, 보다 많은 경우에까지 응용할 수 있어 물리개념을 확고하게 정립할 수 있다.

수업모델로써 세가지 예, 즉 Ohm의 법칙, 감쇠진동, 파의 중첩들을 제시하였다.

참 고 문 헌

Brown, D.P., Porta, H. and Uhl, J.J., 1991, CALCULUS & Mathematica, Part I, Addison-Wesley co..

Brown, D.P., Porta, H. & Uhl, J.J., 1990, Calculus & Mathematica; Courseware for the Nineties, Mathematica Jornal, 1, 43-50.

Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J., 1993, Fundamentals of Physics, John Wiley & Son, Inc..

정진우, 1992, "CAI프로그램이 컴퓨터와 과학교과에 대한 학습자의 태도에 미치는 영향", 科學敎育, 11, 60-71.

강상권, 남기원, 전류창 편저, 1993, Mathematica : 입문에서 활용까지, 성안당.

朴承載 編著, 1991, 科學敎育, 과학교육사, 341-383.

박승재, 조순탁, 박봉두, 조성호, 박봉상, 1989, 고등학교 물리 II, 금성교과서(주).

Read, G.A. and Smith, T.B., 194, The impact of algbraic computing on the teaching of physics and mathematics, Phys. Educ., 29, 14-19.

Wolfram, S., 1991, Mathematica, Addison-Wesley co..