收益率分布에 있어서 非對稱度의 存在와 選好

安 勝 轍*

目 次

Ⅰ. 序 論

收益率의 平均과 分散의 1次 및 2次 積率을 고려하는 포트폴리오의 선택이론을 기준으로 한 傳統的 資本資産價格決定模型은 不確實性下의 資本市場에서의 證券의 危險과 期待收益의 均衡關係 (trade-off) 를 설명해 주는 유용한 분석도구이다. 資本資産價格決定模型에 따르면 위험자산만을 고려할 때 형성되는 效率的 프론티어와 無危險資産을 함께 고려할 때 유일한 최적포트폴리오인 市場포트폴리오가 존재한다. 그리하여 모든 개별투자자는 이러한 시장포트폴리오와 무위험자산에 完全分散投資 (complete diversification) 를 함으로써 最大의 效用을 얻을 수 있는 것이다.

따라서 收益率 分布의 正規分布를 가정하면서 收益率의 1次 및 2次 積率 (first second moments) 만을 고려하는 同質的 資本市場 (homogeneous security market) 에서 확율적으로 선택

* 經營學科 專任講師

되고 동등하게 加重된 포트폴리오는 수익에 영향을 미치지 않고 총위험을 감소시키기 때문에 危險廻避投資者의 합리적인 투자전략은 完全分散投資라고 할 수 있다. 이러한 완전분산투자에 관한 한은 諸 實證的 硏究에서도 입증이 되고 있는데, 실질적으로 포트폴리오의 非體系的 危險은 어느 정도의 資産을 포트폴리오에 포함함으로써 완전히 제거된다고 나타났다.

그러나, 현실적으로 投資者들의 관측된 투자행위는 대부분의 개별투자자가 보유하고 있는 포트폴리오의 자산은 상당히 낮은 수준의 分散投資를 하고 있는 것으로 나타났다. 理論的인 문제로서 1次 및 2次積率의 사용은 2次效用函數 (quadratic utility function) 및 資産收益의 正規分布 假定일 때만이 타당하기 때문에 매우 제한적이라고 볼 수 있다.

그리하여 收益率 分布의 非對稱度를 인식하고 3次積率을 도입하여, 이성적인 투자자는 正의 非對稱度를 선호하며 투자자의 포트폴리오에 제한된 수의 위험자산을 보유할 수 있다고 보면서 1次 및 2次의 統計的 積率에 의한 분석은 의문이 제기되고 있다. 따라서 실질적으로도 收益率의 確率分布가 非對稱的이라면 2次積率까지만 고려되는 분석의 타당성은 재고되어야 할 것이다. 특히, 正의 非對稱度의 존재와 이의 選好를 지지하는 實證的 硏究結果도 나타났으며, 최근의 새로운 연구는 기존의 2次積率까지만 포함된 最適均衡模型에서 投資者의 3次效用函數를 假定하고 非對稱度를 포함하는 3次元的인 3母數의 市場均衡模型을 전개하고 이를 실증적으로 검증하고 있다.

이러한 연구들은 傳統的 資本資産價格決定模型의 假定의 緩化와 관련하여 收益率의 確率分布에 있어서 正規分布 및 2次效用函數假定의 제약성을 극복할 수 있는 보다 高次의 積率(moments of higher order)의 고려를 의미한다고 볼 수 있다.

본 硏究의 目的은 收益率 分布의 非對稱度의 存在와 투자자들이 이를 選好하는 잠재적 行態를 분석하고 理性的인 投資者가 制限된 포트폴리오를 보유하는 理論的 論據를 제시하고자 한다. 또한 우리나라 資本市場을 통하여 실질적인 非對稱度의 存在와 投資者들이 이를 選好하는지의 여부를 實證的으로 分析하고자 한다.

이러한 본 硏究의 目的을 달성하기 위해 序論에 이어 第2章에서 非對稱度의 存在, 選好 및 非對稱度의 分散過程을 理論的으로 살펴보고, 非對稱度의 選好에 의한 不完全分散投資의 양상과 이에 따른 포트폴리오의 最適資産數의 決定方法을 살펴본다. 第3章에서는 우리나라 資本市場을 대상으로 經驗的으로 분석을 하고자 한다. 이때 非對稱度를 도출하고 검증하기 위한 資料는 1979年에서 1982年까지 韓國證券去來所에 연속적으로 上場된 60個 種目의 普通株의 收益率을 사용하여 각 收益率의 分散度에 따라 포트폴리오를 형성하여 각 포트폴리오별로 非對稱度를 평균하여 비교분석하였다. 資料의 處理는 Apple-Ⅱ+개인용 컴퓨터를 사용하였다.

Ⅱ. 非對稱度의 存在와 不完全分散投資

1. 不完全分散投資의 暗示

資本資産價格決定模型의 주어진 假定下에서 모든 投資者에 있어서 最適投資行爲는 市場에 존재하는 모든 株式을 일정비율로 소유하는 完全分散投資가 最適이다. 非體系的 危險은 分散投資로써 제거할 수 있기 때문에, 이러한 完全分散投資를 추구하는 이유는 포트폴리오의 형성으로 인한 危險의 減少效果에 기인한다. 개별자산의 市場模型을 사용하여 간단히 살펴보면,

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_m + e_i \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\begin{aligned} Var(R_i) &= Var(\alpha_i + \beta_i \cdot Rm + e_i) \\ &= Var(\alpha_i) + \beta_i^2 \cdot Var(R_m) + Var(e_i) \\ &= \beta_i^2 \cdot Var(Rm) + Var(e_i) \\ &= \text{體系的 危險} + \text{非體系的 危險} \end{aligned}$$

體系的 危險은 市場收益率의 危險과 직접관련되어 分散이 불가능하지만 非體系的 危險은 資産고유의 危險이며 분산투자가 진행됨에 따라 0으로 수렴이 된다. Blume은[1] 포트폴리오 接近法으로 분산투자의 효과를 다음과 같이 證明하고 있다. n개의 資産에 동일한 비중을 둔 포트폴리오의 위험은 市場模型에 따라 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= Var\left[\sum_{i=1}^{n} n^{-1}(\alpha_i + \beta_i \cdot Rm + e_i)\right] \\ &= Var\left[\sum_{i=1}^{n} n^{-1} \cdot \alpha_i\right] + Var\left[\sum_{i=1}^{n} n^{-1} \cdot \beta_i \cdot Rm\right] \\ &\quad + Var\left[\sum_{i=1}^{n} n^{-1} \cdot e_i\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} n^{-1} \cdot \beta_i\right]^2 Var(R_m) + \sum_{i=1}^{n} (n^{-1})^2\, Var(e_i) \quad \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

式(2)를 변형하면,

$$\overline{\beta}^2 \cdot Var(R_m) + \overline{Var(e_i) \cdot n^{-1}} \quad \cdots\cdots (3)$$

式(3)에서 資産數 n을 증가시킴에 따라 $\overline{Var(e_i) \cdot n^{-1}}$은 점점 감소된다. Evans 등[2]에 의하면 이러한 분산과정은 급속도로 진행되어 10개 이상의 자산에 투자하면 分散效果를 볼 수 있다는 사실을 simulation을 통한 포트폴리오의 위험변화를 관측한 실증연구에서 밝히고 있다. 또한 Samuelson[3], Elton 등[4]도 危險廻避投資者를 가정한 포트폴리오의 效果를 측정한 결과,

1) M.E.Blume, "On the Assessment of Risk", *Journal of Finance*, Mar. 1971, pp.4-10.
2) J.L.Evance, S.H.Archer, "Diversification and the Reduction of Dispersion Empirical Analysis", *Journal of Finance*, Jul. 1968, pp.761-768.
3) P.A.Samuelson, "General Proof that Diversification Pays", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1967, pp.5-8.
4) E.Elton, M.Gruber, "Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution", *Journal of Business*, Sep. 1975, pp.415-437.

분산투자에 의해 危險을 극소화할 수 있음을 論證하고 있다.

따라서 收益率의 分布가 正規分布를 따르고 投資者는 2次效用函數를 가지며 平均과 分散의 1次, 2次積率만 假定할 때 同質的 資本市場에서의 個別 危險廻避投資者의 합리적 투자전략은 完全分散投資라고 할 수 있는 것이다. 그러나 이러한 理論的 結果와 現實的 事實을 대비해 볼 때 투자자들의 실제로 관측된 행위는 대부분 不完全하게 分散된 포트폴리오를 보유한다고 나타났다.

Blume, Crockett, Friend 등은[5] 美國의 17,056 家計를 대상으로 분산투자의 양상을 조사하였다. 그 結果, 단지 配當支給 株式만 고려한다면 標本投資者의 34.15%가 1종목, 50.51%가 2종목 이하를 보유하고 있고 10.72%정도의 투자자만이 10종목 이상을 보유하고 있음을 밝히면서 상당히 낮은 분산투자를 하고 있음을 지적하고 있다. 또한 Blume과 Friend는[6] 1962年의 SFCC (Survey of the Financial Characteristics of Consumers) 資料를 보완하여 추가적인 연구를 하였는데, 가구당 보유종목의 中位數는 2종목이고 平均종목수는 3.41로 나타났다. 따라서 현실적으로 개별투자자는 이론과는 달리 매우 불완전한 분산투자를 한다고 추측할 수 있다.

이러한 結果에 대해, Blume과 Friend는[7] 投資者의 異質的 豫測 (heterogeneous expectation)에 기인한다고 보고 資本資産價格決定模型에 있어서 收益率分布의 同質的 豫測假定의 완화를 시사하고 있다. 그런데 Brennan[8], Goldsmith[9] 등은 平均-分散기준에서 고정去來費用이 존재할 때 현실적으로 분산투자수준이 제한이 되어 不完全分散投資를 하게됨을 이론적 및 실증적으로 설명하고 있다. 특히 Levy는[10] 去來費用의 存在로 인해 포트폴리오에 포함되는 株式의 수가 제한될 때 一般的 資本資産價格決定模型 (GCAPM)이라 일컫는 均衡資産價格決定模型을 유도하였다.

이상의 硏究에 의한 不完全分散投資의 중요한 이론적 이유는 同質的 豫測과 完全한 市場性 資産과 같은 傳統的 資本資産價格決定模型의 完全資本市場假定의 緩化와 관련되어 있고 收益率 分布의 1次 및 2次積率을 기준으로 하고 있다. 그러나, 이러한 資本市場에 있어서 不完全性에 의존하지 않고 不完全分散投資의 행위에 대한 잠재적 이유를 이론적으로 설명하고자 노력한 成果

5) M. Blume, J. Crockett, I. Friend, "Stock Ownership in the United States: Characteristics and Trends," *Survey of Current Business*, Nov.1974, pp.46-57.
6) M. Blume, I. Friend, "The Asset Structure of Individual Portfolios and Some Implications for Utility Functions," *Journal of Finance*, May 1975, pp.585-603.
7) Ibid., pp.602-603.
8) M. Brennan, "The Optimal Number of Securities in a Risk Asset Portfolio When There are Fixed Costs of Transacting: Theory and Some Empirical Results," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sep.1975, pp.483-496.
9) D. Goldsmith, "Transactions Costs and the Theory Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Sep. 1976, pp.1127-1139.
10) H. Levy, "Equilibrium in an Imperfect Market: A Constraint on the Number of Securities in the Portfolio," *American Economic Review*, Sep.1978, pp.643-658.

가 收益率 分布의 非對稱度의 存在와 投資者가 正의 非對稱度를 選好함으로써 포트폴리오내의 危險資産의 수가 제한됨을 해명하고자 하는 일련의 연구들이다. 이러한 非對稱度의 存在와 選好에 관한 課題가 본 硏究의 목적이기 때문에 節을 바꾸어서 展開하기로 한다.

2. 非對稱度의 存在와 選好

Tsiang 은[11] 비록 2次效用函數는 제한된 적용가능범위를 가지며 그 범위에서 絶對的 危險廻避가 富의 증가에 따라 증가하는 특성을 가지기 때문에 그 부적절성을 지적하면서 收益率의 正規分布의 假定을 비현실적이라 지적하고 있지만, 실제적인 문제해결에 유용한 접근법으로서 2次效用의 사용을 설득력있게 주장하고 있다.

그러나, Borch 는[12] 감마密度函數를 이용하여 2次效用函數의 부적절성을 지적하고 있고, Bierwag 와[13] Levy[14]도 2次보다 高次의 積率의 도입을 주장하고 있다. 더더욱이 Fama 는[15] 1959年에서 1962年까지의 Dow Jones Industrial Average 의 30개 株式의 株價의 日日 對數價格 (log price)을 조사한 결과, 株價의 分布는 正規分布가 아닌 無限分散 (infinite variance) 을 갖고 4母數로 이루어진 非正規 安定파레티안分布 (non-nominal stable Paretian distribution) 를 갖는다고 증명하였다.

따라서 投資者의 2次效用函數 및 收益率分布의 正規分布의 假定은 현실적 제약이 있다고 할 수 있다. 이러한 平均-分散의 2次積率까지의 기준이 타당성이 결여된다면 보다 高次의 積率의 導入이 고려되어야 하는 것이다.

Arditti 는[16] 收益率 分布의 變動性을 설명할 때 수익율의 確率分布에 대한 統計的 特性을 반영하는 모든 統計的 積率을 고려해야 하기 때문에 2次까지의 積率뿐만 아니라 非對稱度와 같은 3次積率, 尖度와 같은 4次積率 등 n次積率까지의 모든 積率이 관계된다고 보고 있다. 특히 事

11) S.C. Tsiang, "The Rationale of the Mean Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money," *American Economic Review*, Jun. 1972, pp.354-371.
__________, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Reply and Errata for Original Article," *American Economic Review*, Jun. 1974, pp.442-450.

12) K. Borch, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment," *American Economic Review*, Jun. 1974, pp.428-430.

13) C.O. Bierwag, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment," *American Economic Review*, Jun. 1974, pp.431-433.

14) H. Levy, "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment," *American Economic Review*, Jun. 1974, pp.434-441.

15) E.F. Fama, "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis," *Journal of Business*, Oct. 1963, pp.420-429.
__________, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, Jan. 1965, pp.34-105.

16) F.D. Arditti, "Risk and the Required Return on Equity," *Journal of Finance*, Mar. 1967, pp.19-36.
__________, "Another Look at Mutual Fund Performance," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jun. 1971, pp.909-912.

後收益 (expost return) 의 설명요인으로서 非對稱度의 중요성을 강조하면서 收益率 分布의 모든 특성은 1次에서 3次積率에 대부분의 정보를 포함하고 있다고 주장하고 있다. 또한 株式의 收益率은 收益率의 分散과 非對稱度에 의해 대부분 결정된다고 보고 이를 檢證한 결과, 실현된 收益率의 分布의 1次積率은 2次積率의 係數와 正으로 관련되어 있고 分布의 3次積率의 係數와는 負의 관련성을 나타냄으로써 投資者들이 正의 非對稱度를 選好한다는 사실을 증명하고 있다.

이러한 주장에 대해 Francis 는[17] 113개 大型 뮤츄얼펀드 (mutual fund)를 대상으로 Arditti 의 주장을 검증한 결과 投資者의 投資意思決定시 非對稱度는 생각만큼 그다지 중요한 것이 아니라고 추정할 수 있는 증거를 제시하였다. 그러나 Arditti 는[18] Francis 의 일반적 방법론에 의문을 제기하고 非對稱度의 중요성을 論證할 수 있는 非回歸 經驗的 分析(nonregression empirical study) 에 의해 投資意思決定시 投資者는 非對稱度를 유의적으로 고려하고 回歸模型의 非對稱度의 係數는 有意的으로 (－) 임을 주장하고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 일반적으로 正規分布 (normal distribution) , 一樣分布(uniform distribution) 및 2項分布 (binomial distribution) 의 형태를 취하는 收益의 分布에 대한 期待效用은 平均과 分散으로 설명할 수 있다. 그러나 만일 포트폴리오에 대한 收益의 分布가 非對稱的일 때, 投資者의 效用函數가 2次 (quadratic) 보다 高次 (higher order) 일 때, 또 平均과 分散으로 分布의 양상을 완전히 설명하지 못할 때에는 3次 또는 더 높은 積率과 아들의 係數의 부호가 반드시 고려되어야 할 것이다.[19] 그러나 이때 4次 및 高次의 積率은 측정수단의 문제성, 또 經濟的 有意性 (economic significance) 이 아직 결정되지 않았기 때문에 일단은 무시되고 있다.

3次積率을 고려하기 위한 投資者의 3次效用函數는 다음의 속성을 지닌다.

a) $u' > 0$ (富에 대한 正의 限界效用)

b) $u'' < 0$ (富에 대한 限界效用의 遞減, 즉 危險回避)

c) $d\,(-u''/u')\,dw \leq 0$ (絶對的 危險回避의 減少)

여기서 條件 c)는 $u''' > 0$이기 때문에 投資者는 正의 非對稱度를 選好함을 뜻한다. Scott 와 Horvath 는[20] $u''' > 0$ 를 證明하여 投資者들은 正의 非對稱度를 選好하기 때문에 보다 큰 非對稱度를 가진 포트폴리오를 상대적으로 낮은 期待收益을 감수하면서 선택하게 된다고 보고 있다.

17) J.C. Francis, "Skewness and Investors' Decisions," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1975, pp.163-172.
18) F.D. Arditti, "Skewness and Investors' Decision: A Reply," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1975, pp.173-176.
19) P.L. Cooley, "A Multidimensional Analysis of Institutional Investor Perception of Risk," *Journal of Finance*, Mar. 1977, pp.67-78.
20) R. Scott, P. Horvath, "On the Direction of Preference for Moment of Higher Order than the Variance," *Journal of Finance*, Sep. 1980, pp.915-919.

이하에서 이들의 論據를 중심으로 投資者의 非對稱度의 選好의 양상을 論證하기로 한다.

投資者의 效用函數를 u라 하면 u는 投資者의 富와 收益의 合과 從屬的이기 때문에 다음과 같이 定義할 수 있다.

$u = u\ (\tilde{x} + w)$

w : 投資者의 富

$\tilde{x}$: 投資者의 收益 (確率變數)

w의 投資에 따른 投資收益率을 $\tilde{r} = \tilde{x}/w$로 정의하면 效用函數는

$u = u\ (rw + w)$

期待値를 $\mu = \mathrm{E}\ (w + rw)$로 나타내고 期待效用이 2次積率 이상의 函數라는 것을 보여주기 위해 Taylor 展開에 의해 u를 확장시켜 기대값을 취하면 式(4)와 같다.

$$\mathrm{E}\ (u) = u\ (\mu) + \frac{u^2\ (\mu)}{2!}\sigma^2 + \frac{u^3\ (\mu)}{3!}\ \mu_3 + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!}\ u^n\ (\mu) \quad \cdots\cdots (4)$$

u^n : u의 n次 導函數

μ_i : i次의 積率

μ_3 : 3次積率

이때 一般的인 危險廻避的 投資者의 積率選好의 方向은 모든 奇數積率 (odd moment)의 正의 값 (負의 값) 에 대해서는 正 (負) 이고, 모든 偶數積率 (even moment) 에 대해서는 負의 選好의 方向을 가진다고 가정한다.

앞에서 언급한 바와 같이 投資者는 1次 및 2次 導函數를 가지는 效用函數를 가진다고 하자.

$u^1\ (w) > 0\ \ \forall w,$ ························ (A 1)

$u^2\ (w) < 0\ \ \forall w$ ························ (A 2)

또한 n次積率에 대한 選好의 方向과 엄격히 일치하는 투자자는 다음의 效用函數를 가진다.

$u^n\ (w) > 0\ \ \forall w,$

$u^n\ (w) = 0\ \ \forall w$ 또는

$u^n\ (w) < 0\ \ \forall w$ ························ (A 3)

假定 (A 3) 는 投資者는 積率選好에 대해 엄격한 一致性 (strict consistency)을 보여야 한다는 것을 나타낸다. 즉 n次積率은 항상 富의 水準과 관계없이 동일한 選好의 方向이거나 $u^n\ (w) = 0$이건 무차별하게 관련되어 있음을 나타낸다. 따라서 式(4)의 n次積率의 係數의 값은 (+), (0), (−) 중 어느 하나의 값을 가지게 된다.

모든 富의 水準에 대해 富의 正의 限界效用, 모든 富의 水準에서 일관된 危險廻避 및 積率選

好의 엄격한 일치성을 나타내는 투자자는 正(負)의 非對稱度에 대해 正(負)의 選好를 가진다는 사실은 다음과 같이 證明할 수 있다.[21]

Proof :

1) $u^3(w) < 0 \ \forall w$, 또는 $u^3(w) = 0 \ \forall w$를 가정.

2) 平均價値定理 (mean value theorem) 에 의해,

$$w_2 > w_1 \ \exists \ \bar{w} \in (w_1, w_2)$$
$$u^1(w_2) - u^1(w_1) = u^2(\bar{w})(w_2 - w_1)$$
$$u^1(w_2) = u^1(w_1) + u^2(\bar{w})(w_2 - w_1)$$

3) 1) 에 의해,

$$u^2(w_1) \geq u^2(\bar{w})$$
$$u^1(w_2) \leq u^1(w_1) + u^2(w_1)(w_2 - w_1)$$

4) $w_2 \geq w^* = w_1 + \dfrac{u^1(w_1)}{-u^2(w_1)}$ 에서 $u^1(w_2) \leq 0$

$w_2 > w^*$에서 $u^1(w_2) < 0$

5) 이는 (A1)과 모순

$\therefore$ (A3) 에 의해 $u^3(w) > 0$ Q.E.D.

이러한 결론은 Arditti 등이[22] 도달한 結果와 일치되고 있다. 證明된 $u^3(w) > 0$의 의미는 동일한 分散을 가지지만 A가 B보다 큰 正의 非對稱度를 가지는 포트폴리오 A, B가 존재할 때 ($\mu_2^A = \mu_2^B$, $\mu_3^A > \mu_3^B$), 투자자는 w를 B보다 A에 투자하여 상대적으로 낮은 期待收益을 받아 들인다는 것을 지적하고 있다. 따라서 危險廻避的 投資者는 收益의 分布에 있어서 對稱分布 및 負의 非對稱分布보다 正의 非對稱을 선호한다고 할 수 있는 것이다.

積率選好의 方向 및 4次積率의 특성을 결정하기 위해 일관된 위험회피, 적율선호의 엄격한 일관성 및 正의 非對稱度에 대한 正의 選好는 4次의 統計的 積率에 대한 負의 선호를 암시한다고 보고 이를 證明하기로 한다.[23] 즉, $(A2)$, $(A3)$, $u^3(w) > 0$는 $u^4(w) < 0 \ \forall w$를 의미한다.

Proof :

1) $u^4(w) > 0 \ \forall w$, 또는 $u^4(w) = 0 \ \forall w$를 假定

2) $w_2 > w_1 \ \exists \ \bar{w} \in (w_1, w_2)$

$$u^2(w_2) = u^2(w_1) + u^3(\bar{w})(w_2 - w_1)$$

21) ibid., p.917.
22) F.D. Arditti, op.cit.
23) R.Scott, P.Horvath, op. cit., p.918.

3) 1) 에 의해

$$u^2(w_2) \geq u^2(w_1) + u^3(w_1)(w_1 - w_1)$$

4) $w_2 \geq w^* = w_1 + \frac{-u^2(w_1)}{u^3(w_1)}$ 에서 $u^2(w_2) \geq 0$

$w_2 > w^*$ 에서 $u^2(w_2) > 0$

5) 이는 (A 2) 와 모순

∴ (A 3) 에 의해 $u^4(w) < 0$ Q.E.D.

위 證明에서 4次積率의 選好의 方向이 (－) 라는 것이 밝혀졌거니와, 이로써 偶數積率의 選好의 方向은 (－) 라고 할 수 있다. 그러나, 이때 分散이 감소되는 비율보다 매우 큰 비율로 μ_4 가 감소되므로 4次積率은 대단히 중요한 고려요소는 아니라고 할 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 投資者는 分散을 회피하고 正의 非對稱度를 선호하기 때문에, 보다 큰 非對稱度를 가지는 포트폴리오를 상대적으로 낮은 수익을 감수하면서 선택하게 된다고 할 수 있다.

McEnally는[24] 개별자산의 수익을 사용하여 非對稱度의 選好의 주장을 뒷받침할 수 있는 實證的 證據를 제시하였다. 그는 NYSE에서 1945年에서 1965年동안 연속적으로 上場된 549개의 普通株에서 545개의 普通株를 무작위로 선정하여 각 자산의 保有期間收益 (HPR)의 算術平均, HPR의 標準偏差, 相對的 非對稱度 (relative skew), beta를 도출하였다. 또한 資産의 標準偏差를 기준으로 109개 종목씩 5개 集團으로 구분하여 각 집단의 주식에 대해 각 變數의 平均을 계산하여 비교한 결과, 危險이 가장 높은 집단의 收益率은 상응되는 危險을 보상할 만큼의 수준에 못미치게 나타났고 이때 이 집단의 非對稱度는 다른 집단에 비해 현저히 증가되었다. 이러한 결과는 投資者들의 正의 非對稱度에 대한 選好가 반영된 것이라고 할 수 있다.

3. 非對稱度의 分散過程과 最適資産數의 決定

第2節에서 현실적으로 投資者는 正의 非對稱度를 選好하는 행동을 취한다고 하였는바, 이때 分散投資를 하게되면 非對稱度가 감소되기 때문에 不完全分散投資를 하게 될 것이며 따라서 포트폴리오에 포함되는 資産의 수는 제약이 될 것이다. 본 節에서는 非對稱度의 選好에 따른 資産의 結合過程과 포트폴리오의 最適한 資産數의 결정과정을 代數的으로 고찰하기로 한다.

Simkowitz와 Beedles는[25] 포트폴리오의 非對稱度의 이론적 行態를 분석하고 實證的 硏究를

24) R.W. McEnally, "A Note on the Return Behavior of High Risk Common Stocks," *Journal of Finance*, Mar. 1974, pp.199-202.

25) M.A. Simkowitz, W.L. Beedles, "Diversification in a Three-Moment World," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Dec. 1978, pp.927-941.

통하여 非對稱度를 선호하는 대부분의 投資者들은 상대적으로 적은 數의 資産을 이들의 포트폴리오에 포함시키는 것을 보여주고 있다.

2次元 分析에서는 市場模型 $R_i = R_f + \beta_i R_m + e_i$를 사용하였으나 여기에서도 개별자산의 收益은 體系的 要因 및 非體系的 要因으로 나누어지는 것을 고려하여 資産 i의 超過收益模型인 式(5)를 사용하여 포트폴리오의 非對稱度를 고찰한다.

$$R_i - R_f = a_i + S_i + e_i \qquad \cdots\cdots (5)$$

이때, a_i, S_i, e_i는 각각 資産固有의 收益, 體系的 收益, 誤差項이다. 이때 誤差는 $E(\tilde{e}_i) = 0$, $E(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = 0$, $E(\tilde{S}_i, \tilde{e}_i) = 0$의 속성을 지닌다. 式(5)에 分散을 취하면 資産收益의 分散을 다음과 같이 體系的 危險과 非體系的 危險으로 나눌 수 있다.

$$\sigma^2_{\tilde{R}_i} = \sigma^2_{\tilde{s}_i} + \sigma^2_{\tilde{e}_i} \qquad \cdots\cdots (6)$$

동일하게 個別資産收益의 非對稱度를 구하면,

$$M^3_{\tilde{R}_i} = E(\tilde{R}_i - \bar{R}_i)^3$$
$$= M^3_{\tilde{s}_i} + M^3_{\tilde{e}_i} + 3\{E[(\tilde{S}_i - \bar{S}_i)^2_{\tilde{e}_i}] + E[(\tilde{S}_i - \bar{S}_i)\tilde{e}_i^2]\} \qquad \cdots\cdots (7)$$

$M^3_{\tilde{s}_i}$: 體系的 非對稱度

$M^3_{\tilde{e}_i}$: 非體系的 非對稱度

3項 및 4項: 誤差項과 體系的 危險사이의 相互結合(cross-product)의 期待値

이때, $(\tilde{S}_i - \bar{S}_i)^2$이 $\tilde{R}_i$의 결정요인이 아니라면 $E[(\tilde{S}_i - \bar{S}_i)^2_{\tilde{e}_i}] = 0$가 되며 또한 誤差項 e_i가 $(\tilde{S}_i - \bar{S}_i)$에 대해 等分散(homoscedastic)일 때 0가 된다. 따라서 個別資産收益의 非對稱度는,

$$M^3_{\tilde{R}_i} = M^3_{\tilde{S}_i} + M^3_{\tilde{e}_i} \qquad \cdots\cdots (8)$$

포트폴리오의 경우에 相互結合의 期待値가 0가 된다면 포트폴리오의 非對稱度는 式(10)과 같다.

$$\tilde{R}_P - R_f = a_P + \tilde{S}_P + e_P \qquad \cdots\cdots (9)$$

$$M^3_{\tilde{R}_P} = M^3_{\tilde{S}_P} + M^3_{\tilde{e}_P} \qquad \cdots\cdots (10)$$

N이 市場포트폴리오 M의 자산수에 접근할 때 $\tilde{e}_P = 0$이므로 式(6)과 (10)은 다음과 같다.

$$\sigma^2_{\tilde{R}_P} = \sigma^2_{\tilde{S}_P} \qquad (N \longrightarrow M)$$

$$M^3_{\tilde{R}_P} = M^3_{\tilde{S}_P} \qquad (N \longrightarrow M)$$

따라서, 分散投資가 일어남에 따라 $(N \rightarrow M)$, 體系的 期待收益, 體系的 危險 및 體系的 非對稱度인 $\bar{S}_P$, $\sigma^2_{\tilde{S}_P}$, $M^3_{\tilde{S}_P}$는 일정하게 남아 있기 때문에 포트폴리오의 分散은 減少하며 $(\because \sigma^2_{\tilde{e}_P} > 0)$,

$M^3_{\tilde{e}_P}$ 의 값이 (+), (0), (−) 가 됨에 따라 포트폴리오의 非對稱度는 각각 減少, 不變, 增加하게 된다.[26] 따라서 分散에 따른 $M^3_{\tilde{e}_P}$ 의 양상은 포트폴리오의 非對稱度의 變化를 결정하는 중요한 결정요인이 된다.

非體系的 非對稱度와 分散投資에 의해 감소되는 分散의 效果는 자산간의 상호관계를 추구하는 것에 의해 거론되어지기 때문에 非對稱度에 있어서 자산간의 움직임에 초점을 두는 것이 된다. 이러한 사실은 誤差項 $\tilde{e}_i$, $\tilde{e}_j$가 完全相關이 아닌 경우에 요구되는 2次積率 模型에 있어서의 分散의 減少와 유사하다. 非對稱度를 고려할 때는 $\tilde{e}_i$, $\tilde{e}_j$, $\tilde{e}_k$ 의 양상이 관심의 대상이 된다.

$\tilde{e}$를 동일한 加重値를 둔 $\tilde{e}_i$의 1次結合이라 하자 즉,

$$\tilde{e} = \Sigma_i^N \ \frac{1}{N}\tilde{e}_i$$

$$\begin{aligned} M^3_{\tilde{e}_P} &= E(\tilde{e} - \bar{e})^3 \\ &= E(\tilde{e}^3) \\ &= \sum_i\sum_j\sum_k \frac{1}{N^3} E(\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k) \quad (\because E(e) = 0) \\ &= \Sigma_i \ \frac{1}{N^3} \ E(\tilde{e}_i^{\,3}) + \Sigma\underset{\neq}{\Sigma}\Sigma \ \frac{1}{N^3} \ E(\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} = \dfrac{\Sigma E(\tilde{e}_i^{\,3})}{N}$, $\bar{M}^3_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k} = \dfrac{\Sigma\underset{\neq}{\Sigma}\Sigma E(\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k)}{N^3 - N}$

이므로

$$M^3_{\tilde{e}_P} = \frac{1}{N^2} \ M^3_{\tilde{e}_i} + \frac{N^3 - N}{N^3} \ (\bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

式(11)이 分散에 의해 줄어들기 위해서는 N으로 微分하여 (−) 가 되어야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^3_{\tilde{e}_P}}{\partial N} &= -2N^{-3}\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} + 2N^{-3}\bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k} \\ &= -\frac{2}{N^3}\ (\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} - \bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k}) \end{aligned}$$

단, $\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} > \bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k}$, $\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} > 0$

이때, 資産들이 서로 獨立일 때는 $\bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k} = 0$이며, 完全相關일때는 $\bar{M}^3_{\tilde{e}_i} = \bar{M}_{\tilde{e}_i\tilde{e}_j\tilde{e}_k}$ 가 된다.

따라서 資産들이 서로 完全相關이 아니고 平均的으로 正의 非體系的 非對稱度가 나타날 때에는 포트폴리오의 非對稱度는 분산투자에 의해 감소한다는 사실을 알 수 있다. 실제로 투자자는 완전분산된 포트폴리오보다 상대적으로 낮은 포트폴리오를 가지며 또 正의 非對稱度를 선호하는 위험회피형의 행동을 취하기 때문에 正의 非對稱度를 갖는 收益의 分布는 투자자에 있어서 바람직한

26) ibid., p.930.

특징이라 할 수 있다.

이러한 논리에 의해 Simkowitz와 Beedles 는[27] 1945年에서 1965年 사이에 NYSE에 연속적으로 上場된 549개 普通株를 대상으로 $M^3_{\tilde{r}_P}$ 의 부호를 검증한 결과, 平均0의 주위에서 현저히 오른쪽으로 非對稱 (markedly right skewed) 현상을 보였고 분산투자에 따라 포트폴리오의 非對稱度는 감소하였다. 이때 非對稱度의 分散은 급속히 이루어져 分散可能한 非對稱度의 92% 이상이 5 株式 수준에서 제거되었다. 따라서 非體系的 非對稱度는 비교적 적은 자산의 결합에 의해 충분한 분산효과가 나타난다고 볼 수 있다.

이러한 결과에 기인하여 Conine와 Tamarkin은 포트폴리오에서 危險資産의 數가 증가함으로써 分散 및 非對稱度가 감소되어 투자자들이 불완전 분산투자를 행할 때 이들이 구성하는 포트폴리오의 최적의 자산수 (optimal number)를 결정하고자 하였다. 포트폴리오에 포함되는 最適資産數는 포트폴리오 구성시 분산의 감소로 인한 期待效用에 있어서 限界增加 (marginal increase in expected utility) 와 非對稱度의 감소로 인한 限界減少가 일치하는 點에서 결정된다고 본다.[28] 이때 N에 대한 포트폴리오의 非對稱度의 1次 偏導函數가 (−) 가 될 때만이 危險資産 추가로 인해 포트폴리오의 非對稱度가 감소된다. 그러나 N에 대한 포트폴리오 分散의 1次 偏導函數와는 다르게 포트폴리오의 非對稱度의 導函數는 반드시 (−) 는 아니다.

이하에서 이러한 논거를 중심으로 포트폴리오의 非對稱度를 도출하여, 最適資産數를 결정하며 포트폴리오의 非對稱度의 導函數가 (−) 가 되기 위한 條件을 제시한다.

동일하게 가중된 (equally weighted) 포트폴리오에 대한 收益의 非對稱度를 도출하기 위해 먼저 3資産 포트폴리오의 결과를 도출하고 N資産의 경우로 一般化시킨다. 非對稱度를 다음과 같이 定義한다.

$$\Xi[\tilde{X}-\mu_{\tilde{R}}]^3 = M^3_{\tilde{R}} \quad \cdots\cdots (12)$$

$$X = X_1\tilde{R}_1 + X_2\tilde{R}_2 + X_3\tilde{R}_3$$

$$\mu_{\tilde{R}} = X_1\bar{R}_1 + X_2\bar{R}_2 + X_3\bar{R}_3$$

X_1, X_2, X_3 : 相對的 加重値 (relative weight)

$\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3$: 確率的 收益 (random return)

$$\therefore M^3_{\tilde{R}} = X_1^3M_1^3 + X_2^3M_2^3 + X_3^3M_3^3 + 3X_1^2X_2M_{112} + 3X_1^2X_3M_{113} + 3X_1X_2^2M_{122}$$
$$+ 3X_2^2X_3M_{223} + 3X_1X_3^2M_{133} + 3X_2X_3^2M_{233} + 6X_1X_2X_3M_{123} \quad \cdots\cdots (13)$$

27) ibid., pp.931−939.
28) T.E.Conine Jr., M.J.Tamarkin, "On Diversification Given Asymmetry in Returns," *Journal of Finance*, Dec. 1981, pp.1143−1155.

여기서,

$$M_i^3 = \mathrm{E}[\,\tilde{R}_i - \bar{R}_i\,]^3$$

$$M_{iij} = \mathrm{E}[\,(\tilde{R}_i - \bar{R}_i)^2\,(\tilde{R}_j - \bar{R}_j)\,]$$

$$M_{ijk} = \mathrm{E}[\,(\tilde{R}_i - \bar{R}_i)\,(\tilde{R}_j - \bar{R}_j)\,(\tilde{R}_k - \bar{R}_k)\,]$$

式 (13) 을 N資產 포트폴리오에 대하여 일반화시키면,

$$M_{R_P}^3 = \Sigma_{i=1}^N X_i^3 \bar{M}_i^3 + 3\Sigma_{i=1,\, i \neq j}^N [\,\Sigma_{j=1}^N X_i^2 X_j \bar{M}_{iij}\,] + \Sigma_{i=1}^N \Sigma_{j=1,\, i \neq j \neq k}^N \Sigma_{k=1}^N X_i X_j X_k \bar{M}_{ijk} \quad \cdots\cdots (14)$$

$\bar{M}_i^3$: 資產들의 平均 非對稱度

$\bar{M}_{iij}$: 資產들의 平均 曲線相互作用 (curvilinear interaction)

$\bar{M}_{ijk}$: 資產들의 세제곱乘積率 (triplicate product moment)

포트폴리오의 각 資產은 동등하게 가중되었다고 가정하면 ($X_i = X_j = X_k = \frac{1}{N}$),

$$M_{R_P}^3 = \Sigma_{i=1}^N (\tfrac{1}{N})^3 \bar{M}_i^3 + 3\,\Sigma_{i=1,\, i \neq j}^N \left[\,\Sigma_{j=1}^N (\tfrac{1}{N})^3 \bar{M}_{iij}\,\right] + \Sigma_{i=1}^N \Sigma_{j=1,\, i \neq j \neq k}^N \Sigma_{k=1}^N (\tfrac{1}{N})^3 \bar{M}_{ijk} = (\tfrac{1}{N})^3 \Sigma_{i=1}^N \bar{M}_i^3 + 3(\tfrac{1}{N})^3 \Sigma_{i=1}^N \Sigma_{j=1,\, i \neq j}^N \bar{M}_{iij} + (\tfrac{1}{N})^3 \Sigma_{i=1}^N \Sigma_{j=1,\, i \neq j \neq k}^N \Sigma_{k=1}^N \bar{M}_{ijk} = (\tfrac{1}{N})^2 \bar{M}_i^3 + \frac{3(N-1)}{N^2} \bar{M}_{iij} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \bar{M}_{ijk} \cdots (15)$$

여기서 $N \to \infty$이면 $M_{R_P}^3 \longrightarrow \bar{M}_{ijk}$가 된다. 즉 分散投資가 일어나면 포트폴리오의 非對稱度는 M_{ijk}에 접근하기 때문에 非對稱度는 감소된다. 이는 Simkowitz 등의 結果와[29] 일치된다. 이 때, 포트폴리오의 非對稱度의 1次 偏導函數가 (−) 가 될 때 非對稱度가 감소하기 때문에 式 (16) 과 같이 偏微分했을 때 式 (17) 과 같은 條件을 가져야 된다.

$$\frac{\partial M_{R_P}^3}{\partial N} = \frac{-2}{N^3} \bar{M}_i^3 + \frac{3\bar{M}_{iij}}{N^2} \left(\frac{2}{N} - 1\right) + \bar{M}_{ijk} \left(\frac{3N-4}{N^3}\right) \quad \cdots\cdots (16)$$

$$N > \frac{(2/3)\,\bar{M}_i^3 - 2\bar{M}_{iij} + (4/3)\,\bar{M}_{ijk}}{\bar{M}_{ijk} - \bar{M}_{iij}} \quad (\bar{M}_{ijk} \neq \bar{M}_{iij}) \quad \cdots\cdots (17)$$

最適資產數를 결정하기 위해 Taylor 展開에 의해 期待效用을 나타낸 式(4)의 부호를 변경시켜 投資者의 3次效用函數를 式(18) 과 같이 둔다.

$$\mathrm{E}[\,\mu(R)\,] = \mu[\,E(R)\,] + \frac{\mu^1[\,E(R)\,]}{2!}\,\sigma_{R_P}^2 + \frac{\mu^3[\,E(R)\,]}{3!}\,M_{R_P}^3 \cdots\cdots (18)$$

$\mathrm{E}(R)$: 期待收益

29) M.A.Simkowitz, W.L.Beedles, op.cit., p.931.

$M^3_{R_P}$: 期待收益의 平均에 대한 3次積率

$\sigma^2_{R_P}$: 期待收益의 分散

$$\sigma^2_{R_P} = \frac{1}{N}\bar{\sigma}^2_i + \frac{(N-1)}{N}\bar{\sigma}_{ij} \qquad \text{(19)}$$

$\bar{\sigma}^2_i$: 資産간의 平均分散

$\bar{\sigma}_{ij}$: 資産간의 平均共分散

式(18)에 式(15), (19)를 代入하여 포트폴리오의 最適資産數를 결정하기 위해 N에 대해 偏微分하면,

$$\frac{\partial E[u(R)]}{\partial N} = \frac{\mu^2[E(R)]}{2!}\left[\frac{(-1)\bar{\sigma}^2_i}{N^2} + \bar{\sigma}_{ij}\left(\frac{1}{N^2}\right)\right] + \frac{\mu^3[E(R)]}{3!}\left[\frac{-2}{N^3}\bar{M}^3_i + \frac{3\bar{M}_{iij}}{N^2}\left(\frac{2}{N}-1\right) + \bar{M}_{ijk}\left(\frac{3N-4}{N^3}\right)\right] \qquad \text{(20)}$$

式(20)을 0로 놓고 N의 3次 方程式의 (+)根을 구하면,

$$N = \frac{(2/3)\bar{M}^3_i - 2\bar{M}_{iij} + (4/3)\bar{M}_{ijk}}{\frac{\mu^2[E(R)]}{\mu^3[E(R)]}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^2_i) - \bar{M}_{iij} + \bar{M}_{ijk}} \qquad \text{(21)}$$

期待效用이 극대화되기 위해서는 式(21)은 다음 式(22)의 條件이 만족 되어야 한다.[30]

$$\frac{\partial^2 E[u(R)]}{\partial N^2} = \frac{\mu^2[E(R)]}{2!}\left[\frac{2}{N^3}(\bar{e}^2_i - \bar{\sigma}_{ij})\right] + \frac{\mu^3[E(R)]}{3!}\left[\frac{6\bar{M}^3_i}{N^4} + 3\bar{M}_{iij}\left(\frac{-6}{N^4} + \frac{2}{N^3}\right) + \bar{M}_{ijk}\left(\frac{-6}{N^3} + \frac{12}{N^4}\right)\right] < 0 \qquad \text{(22)}$$

또한 N이 (+)값을 가지고 극대값이 존재하기 위해서는 制約式 (23), (24)가 만족되어야 한다.

$$\bar{M}^3_i < 3\bar{M}_{iij} - 2\bar{M}_{ijk} \qquad \text{(23)}$$

$$\bar{M}_{iij} - \bar{M}_{ijk} > \frac{\mu^2[E(R)]}{\mu^3[E(R)]}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}^2_i) \qquad \text{(24)}$$

Conine와 Tamarkin은[31] 1972年에서 1976年사이의 株式에서 표본 I, 표본 II를 구성하고 log 效用函數를 사용하여 포트폴리오에 포함되는 자산수에 따른 效用의 형태를 分析한 결과, 이론상으로 표본 I, II의 최적주식갯수는 각각 7.00, 1.19였고 실제로 표본 I, II에서 분산투자에 따라 效用이 증가되다가 각각 7주식, 1주식 이후부터 완만히 效用이 감소되었다. 이는 최적주식수보다 많은 危險資産이 포트폴리오에 포함될 때는 效用이 감소된다고 할 수 있고 平均·分散基準에 의한 양상과는 반대로 나타났다고 할 수 있다. 이러한 결과에서 (+)의 非對稱度가 存

30) T.E. Conine Jr., M.J. Tamarkin, op.cit., p.1146.
31) ibid., pp.1148-1151.

在하고 이를 選好할 때 이성적 투자자는 제한된 수의 危險資産을 보유함으로써 不完全分散投資를 한다고 볼 수 있는 것이다.

이러한 非對稱度의 存在 및 重要性을 인식하고 非對稱度를 포함한 3次積率의 市場均衡模型의 도출을 시도한 일련의 연구가 있었다. 본 연구에서는 이를 간략하게 소개만 한다.[32)]

Jean 은[33)] Sharpe-Lintner 의 市場模型에다 非對稱度를 포함하여 期待收益과 非對稱度의 균형관계를 도출하여 일반화하려 하였다. 그러나 Jean 의 모형은 Sharpe 의 접근법에 의해 전개가 된 것이지만 分散을 무시하고 있고[34)] 一般的인 分離定理가 성립되지 않는 部分模型이라는 비판[35)]을 받고 있다.

또한 Arditti 와 Levy 는[36)] 多期間 3母數 部分均衡模型(multi-period three parameter partial equilibrium model)을 개발하였고, Kraus 와 Litzenberger 는[37)] 分離定理가 성립될 수 있는 一般的 效用函數를 채택하여 單一期間 資産價格決定模型(single period asset pricing model)을 도출하였다. 그러나 이러한 모형은 아직까지 완벽히 실증적으로 성숙되었다고는 하기 어렵다.

Ⅲ. 非對稱度의 存在와 選好에 관한 實證的 分析

본 章에서는 우리나라 證券市場에도 收益率 分布의 非對稱度가 存在하며 投資者들이 이를 選好할 것인가 여부를 韓國證券市場을 대상으로 檢證하고자 한다.

1. 入力資料

본 實證硏究에서의 분석대상기간은 1979年 1月에서 1982年 12月까지의 4年間으로 하였다. 標本證券은 時系列의 連續性을 갖는 普通株를 대상으로 60종목을 선정하였다. 표본증권은 어업·

32) 非對稱度를 포함한 市場均衡模型은 拙稿, "3次積率의 市場均衡模型의 分析", 淸州大學校 論文集, 第22輯, 1986. 6., pp.163-188.

33) W. Jean, "The Extension of Portfolio Analysis to Three or More Parameters," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1971, pp.505-515.
______, "More on Multidimensional Portfolio Analysis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jun. 1973, pp.475-490.

34) F.D. Arditti, H. Levy, "Distribution Moments and Equilibrium: A Comment," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1972, pp.1429-1433.

35) C. Schweser, "Multidimensional Security Pricing: A Correction," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Mar. 1978, pp.177-183.

36) F.D. Arditti, H. Levy, "Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: The Multiperiod case," *Journal of Finance*, Jun. 1975, pp.797-809.

37) A. Kraus, K. Litzenberger, "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets," *Journal of Finance*, Sep. 1976, pp.1085-1100.

금속광업 1업종, 음식료품 7업종, 섬유·가죽산업 5업종, 종이 및 종이제조업 2업종, 화학·석유·고무·비금속광물업 13업종, 1차금속 5업종, 조립금속·기계장비제조업 9업종, 기타 제조업 1업종, 종합건설 5업종, 도소매 6업종, 금융보험 4업종으로 구성되었다.

이상과 같이 선정된 標本證券에 대해 電算處理를 위한 株價時系列資料를 형성하기 위해 15日 간격으로 終價를 관측하였다.

2. 檢證模型과 分析方法

收益率 分布의 非對稱度를 測定하고 非對稱度의 변화양상을 알아보기 위해 收益率의 1次, 2次 및 3次積率인 平均, 分散, 非對稱度를 구하고 beta계수를 측정하였다.

證券 i를 時點 $t-1$에서 t까지 15일 동안 보유함으로써 얻게되는 t期의 保有期間收益率(holding period return : HPR) 은,

$$r_{it} = \frac{P_{it} - P_{i\,t-1}}{P_{i\,t-1}}$$

r_{it} : t時點의 證券 i의 收益率

$P_{i\,t-1}$, P_{it} : t 및 $t-1$ 時點의 證券 i의 終價

$t-1$期와 t期 사이에 有·無償增資에 의한 權利落, 配當에 의한 配當落, 額面分割 등이 있을 때 株價時系列의 연속성을 유지하기 위해 수정하였다.

配當실시의 경우는 $P'_{it} = P_{it} + d$,

단 P'_{it}는 t기의 修正株價, d는 配當全額임.

無償增資의 경우에 權利落 후의 株價評價는 權利落 후의 株價에 增加培率을 곱한다.

$P'_{it} = (1+R)\,P_{it}$ 단, R : 無償株配定比率

有償增資의 경우는 權利落 前期를 기준으로 계산상의 權利落價格을 구하고 이를 기준으로 修正株價를 算出한다.

$P'_{it} = P_{it}\,((1+R)\,P_{i\,t-1})\,(P_{i\,t-1} + R\cdot A)^{-1}$

단, R : 有償增資比率, A : 有償株當 納入金額

額面分割의 경우는 權利落 當期의 終價에 分割係數를 곱한다.

$P'_{it} = B\cdot P_{it}$ 단, B : 分割係數

非對稱度는 原3次 統計的 積率인 原非對稱度 (raw skewness) 가 아니라 相對的 尺度의 견지에서 原非對稱度를 標準偏差를 3乘한 값으로 나눈 正規非對稱度 (normalized skewness) 내지 相對的 非對稱度 (relative skewness) 를 사용한다. 따라서,

$$\text{Skew}(r) = \frac{M^3(r)}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r}_i)^3}{\sigma^3}$$

이러한 正規非對稱度를 사용하는 이유는 기본확률변수의 변화에 따라 不變인 純粹指數 (pure index number) 이기 때문이다.[38]

beta 係數는 다음과 같은 市場模型을 사용하여 回歸分析을 하였다.

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_i r_{mt} + e_{it}$$

$$r_{mt} = \frac{SPI_t - SPI_{t-1}}{SPI_t}$$

$SPI_{t,\ t-1}$: t 및 $t-1$ 期에 있어서 綜合株價指數

집단별로 非對稱度의 存在와 양상을 알아보기 위해 60 개 株式을 收益의 標準偏差에 따라 작은 것에서 큰것 순으로 (ascending order), 12개 株式씩 5개集團으로 나누어 1次, 2次, 3次積率 및 베타係數의 평균을 구하여 比較分析하였다.

3. 分析結果 및 解釋

각 주식별로 收益率 分布의 1次, 2次, 3次積率 및 베타係數를 구한 결과를 〈表1〉에 나타내었다. 이러한 결과에서 알 수 있듯이 우리나라 주식시장의 수익율 분포에는 正의 非對稱度가 存在하고 있음을 살펴볼 수 있다.

〈表1〉 收益率 및 非對稱度의 分布樣狀

企 業 名	$\overline{HPR}$	STD. DEV. OF. ERR.	SKEW (r)	β COEFF.
신라교역	1.00497	0.04956	1.09320	0.67896
대림수산	1.00628	0.07139	0.43273	0.91004
대한중석	1.00482	0.06172	1.64232	0.49271
삼양식품	1.00487	0.05672	0.82532	0.31075
대한제당	1.00529	0.05972	1.26248	0.68636
동양제과	1.00891	0.05997	0.32476	0.88890
미원	1.00493	0.06375	0.55421	0.85920
동양맥주	1.00721	0.07213	0.92423	0.84293
롯데칠성	1.00629	0.06741	0.84691	0.57971
서울미원	1.00543	0.06001	0.87641	0.52083
제일모직	1.00279	0.05703	0.11203	0.25108

38) J.C. Francis, S.H. Archer, *Portfolio Analysis*, 2nd. ed., Prentice-Hall, 1976, pp.366-367.

企 業 名	$\overline{HPR}$	STD. DEV. OF. ERR.	SKEW (r)	β COEFF.
동양나일론	1.00612	0.07112	0.69437	1.04243
고려합섬	1.00746	0.07642	0.97246	1.43571
코오롱	1.00599	0.06421	1.43287	0.72882
대전피혁	1.00249	0.03549	0.32546	0.85994
전주제지	1.00399	0.03427	0.65632	0.40829
대한팔프	1.00513	0.06649	0.83273	0.75518
한농	1.00467	0.06001	0.89432	0.56965
한국프라스틱	1.00599	0.0698	1.26371	1.10063
대한페인트	1.00606	0.07217	0.82037	1.26873
유한양행	1.00504	0.05941	0.48326	0.55150
동아제약	1.00316	0.05421	0.56421	0.51538
일동제약	1.00546	0.06923	0.94231	0.77393
종근당	1.00454	0.05629	1.69243	0.41248
태평양화학	1.00497	0.05744	0.11349	0.47323
대성산업	1.00763	0.07016	0.87246	0.91444
카프로락탐	1.00596	0.07121	0.24376	1.44581
삼양타이어	1.00387	0.07131	1.07693	0.78604
원풍산업	1.00647	0.07521	1.64279	0.91319
쌍용양회	1.00835	0.07206	0.95849	1.02946
삼척산업	1.00543	0.08643	1.87243	1.37615
강원산업	1.00579	0.07216	0.97438	1.37443
부산파이프	1.00494	0.07023	2.60632	0.71789
한국강관	1.00582	0.08647	1.37849	1.08752
영풍	1.00243	0.03859	1.00210	0.65970
삼화왕관	1.00692	0.08246	1.33272	1.61850
대동공업	1.00642	0.07288	1.03242	0.86528
금성사	1.00786	0.09221	1.57438	1.43911
동양정밀	1.00742	0.08432	1.56721	1.42659
삼성전자	1.00697	0.07326	0.88214	1.40095
동아자동차	1.00693	0.08821	1.48296	1.43783
오리엔트	1.00628	0.06847	1.50697	1.00694
오리온전기	1.00523	0.08329	0.68311	1.81515
기아산업	1.00766	0.07249	1.33284	1.45597
모나미	1.00746	0.07316	1.29971	0.83630
경남기업	1.00637	0.09043	1.00231	1.53527

企 業 名	$\overline{HPR}$	STD.DEV. OF. ERR.	SKEW (r)	β COEFF
삼 환 기 업	1.00467	0.07346	0.93784	1.37643
동 아 건 설	1.00563	0.07541	1.12043	1.17842
삼 부 토 건	1.00543	0.09192	0.82732	1.35224
삼 익 주 택	1.00583	0.08763	0.77849	1.56678
삼 성 물 산	1.00465	0.06973	1.10623	1.03048
반 도 상 사	1.00593	0.08162	1.22469	1.02363
협 진 양 행	1.00623	0.06257	1.56327	0.74348
국 제 상 사	1.00792	0.08425	1.59273	1.27190
금 호 실 업	1.00469	0.07299	0.84372	1.41551
남 선 물 산	1.00769	0.08021	1.23217	1.28032
한 일 은 행	1.00587	0.04839	0.21342	0.44562
한 양 투 금	1.00192	0.05743	0.36273	0.32280
대 구 은 행	1.00294	0.00946	0.42431	0.20931
안 국 화 재	1.00755	0.04214	0.83271	0.25722

이렇듯 우리나라 證券市場에 正의 非對稱度가 존재할 때 우리나라 投資者들이 正의 非對稱度를 選好하는가 여부를 檢證하기로 한다. 높은 危險을 가진 資産의 收益率은 그 危險을 보상할 만큼의 충분한 收益率을 가져다 주느냐의 여부를 분석하기 위해 60개 標本株式을 標準偏差를 기준으로 標準偏差가 낮은 순서대로 12개 株式씩 5개 집단으로 구성을 하고 각 집단의 주식들에 대해 1次, 2次, 3次積率 및 베타係數의 平均을 계산하였다. 算出된 結果를 〈表2〉에 나타내었다.[39]

집단1에서 집단5까지 平均收益은 체감적으로 증가되고 있다. 각 집단의 하위집단의 수익에 對比한 增分은 각각 42.4, 7.4, 5.8, 0.2%로 나타났다. 평균적으로 높은 危險을 가진 집단의 收益은 낮은 危險을 가진 집단의 收益보다 相對的으로 낮게 나타나고 있다.

---

39) McEnally의 결과는 다음과 같다.

	Group 1	2	3	4	5
Grand Mean of HPR's	1.0110	1.0125	1.0137	1.0143	1.0132
Mean of Standard Deviations of HPR's	0.0497	0.0617	0.0706	0.0815	0.1070
Mean of Skews of HPR's	0.3227	0.3854	0.5430	0.6877	1.2738
Mean of Betas	0.61	0.85	0.96	1.14	1.33

보유기간수익은 집단5에서 집단3, 4보다 낮아지며 비대칭도는 집단5에서 현저히 증가되었다.
R.W. McEnally, op.cit., p.200.

〈表 2 〉 集團別 平均收益率 및 非對稱度

	1	2	3	4	5
$\overline{\overline{HPR}}$	0.00396	0.00564	0.00606	0.00641	0.00642
$\overline{\sigma}$	0.04497	0.06189	0.07057	0.07416	0.08660
$\overline{Skew(r)}$	0.67535	0.90225	1.05238	1.09094	1.27640 *
$\overline{beta}$	0.44513	0.65413	0.96675	1.23345	1.41256

* t = 1.037 (집단 4와 5의 평균 Skew(r) 의 차이검증)

또한 危險의 增分에 대한 平均收益의 增分 ($\triangle\overline{\overline{HPR}}/\triangle\overline{\sigma}$) 의 比率을 살펴보면 각각 112.7, 52.9, 113.7, 1.2 %로 나타난다. 여기서 가장 높은 危險을 가지는 집단 5의 경우는 收益은 0.2 % 정도만 증가됨으로써 다른 집단의 경우와 현저히 차이가 나며 危險에 상응되는 收益은 다른 집단과 비교할 때 상대적으로 대단히 낮은 水準이다. 그러나 집단 5의 非對稱度를 살펴보면 다른 집단보다 상대적으로 높은 1.27640의 값을 가진다. 이때 집단4에서 집단5로의 非對稱度의 增分은 17 %이다.

집단4와 집단5의 平均收益의 增分은 0.2 %에 불과한 반면, 非對稱度의 增分은 17 %나 나타났기 때문에 이러한 平均收益이 현저히 체감하는 원인은 非對稱度에 기인한다고 보고, 집단4와 집단5 사이의 平均 非對稱度의 有意的인 差異를 檢證하였다. 그 結果 t —統計量은 1.037로 나타났다. 따라서 집단5는 집단4보다 正의 非對稱度에 있어서 統計的으로 有意的이라 할 수 없다.

이때 집단별 危險은 分散으로 측정했기 때문에 집단5의 높은 收益 變動性은 어느 정도 分散이 가능하다고 본다면 이러한 相對的으로 낮은 收益은 단순히 非對稱度의 영향이라기보다 포트폴리오의 낮은 體系的 危險이 반영된 결과일지도 모른다고 보고 베타係數를 측정하였다. 그러나 〈表 2 〉에서 베타係數는 집단1에서 집단5까지 계속적으로 증가되고 있고 집단5의 베타係數는 다른 집단보다 높다. 따라서 집단5의 상대적으로 낮은 平均收益은 共分散 또는 體系的 危險으로는 설명되지 않는다고 할 수 있다.

따라서 統計的으로 유의하다고 볼 수는 없지만, 이러한 높은 危險을 가진 집단이 相對的으로 낮은 收益을 창출한 것은 증가된 正의 非對稱度의 영향임을 어느 정도 암시하고 있다고 볼 수 있다. 따라서 우리나라의 投資者들도 어느 정도 正의 非對稱度를 選好하기 때문에 보다 큰 非對稱度를 가지는 포트폴리오를 상대적으로 낮은 期待收益을 감수하면서 선택하게 될 것이며 不完全分散投資를 하게됨을 어느 정도 유추할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 結 論

Markowitz 이후 現代資本市場理論은 收益率이 正規分布를 이루고 投資者는 2次效用函數를 가진다는 假定하에서 平均·分散基準에 따른 1次 및 2次積率의 견지에서 展開되어 왔다. 따라서 資本資産價格決定模型에서 개별투자자의 完全分散投資도 이러한 假定하에서 理論的 타당성을 가지게 되는 것이다. 그러나 현실적으로 理論的 資本資産價格決定模型과 實證結果가 불일치되고 있고, 또한 언급한 바와 같이 투자자들이 不完全하게 分散된 포트폴리오를 보유하는 것이 현실적으로 나타나고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 일반적으로 正規分布의 형태를 취하는 收益의 分布에 대한 期待效用은 平均과 分散으로 완전히 설명할 수 있다. 그러나 포트폴리오에 대한 收益分布가 非對稱的일 때, 投資者의 效用函數가 2次보다 高次일 때, 또 平均과 分散으로 分布의 양상을 완전히 설명하지 못할 때에는 3次 또는 더 높은 高次의 積率이 고려되어야 한다. 따라서 지금까지의 資産의 收益率의 正規分布假定 및 投資者의 2次效用假定의 理論的 제약성을 탈피하여 보다 高次의 積率인 非對稱度를 고려하여 收益率 分布에 正의 非對稱度가 存在하며 投資者들이 이를 選好한다는 論理가 展開되고 있는 것이다.

본 硏究에서는 투자자들이 不完全하게 分散된 포트폴리오를 소유하는 양상을 전개하는 과정에서 去來費用, 同質的 豫測과 같은 資本資産價格決定模型의 完全市場假定의 모순에서 기인하지 않고, 단지 收益率 分布에 있어서 非對稱度가 存在하고 투자자가 正의 非對稱度를 選好함으로써 포트폴리오내의 危險資産數가 제한됨을 해명하고자 한 연구들을 분석하여 보았다.

非對稱度의 存在를 강조하고 投資者들은 正의 非對稱度를 選好하기 때문에 보다 큰 非對稱度를 가진 포트폴리오를 상대적으로 낮은 期待收益을 감수하면서 선택하게 된다는 사실은 理論的으로 證明이 되고 있다. 현실적으로 投資者는 正의 非對稱度를 선호하는 危險廻避型의 행동을 취한다고 할 때 分散投資를 하게되면 非對稱度가 감소되기 때문에 不完全分散投資를 하게 될 것이며 따라서 포트폴리오에 포함되는 資産의 수는 제약이 된다는 논리하에서 포트폴리오의 非對稱度의 分散過程과 最適資産數의 결정과정을 살펴본 결과, 非對稱度를 選好하는 대부분의 투자자들은 상대적으로 적은 수의 자산을 포트폴리오에 포함시키는 사실을 살펴보았다.

이러한 理論的 論理에 의거하여 韓國證券市場을 대상으로 우리나라 證券市場에도 非對稱度가 存在하며 投資者들이 실질적으로 이를 選好할 것인가의 여부를 實證的으로 분석하였다. 그 結果 우리나라 證券市場에 正의 非對稱度가 存在한다는 사실은 나타났지만, 투자자들의 正의 非對稱度의 選好에 대해서는 統計的으로 有意한 뚜렷한 證據는 나타나지 않았다.

그러나 가장 높은 危險集團의 平均收益은 그 危險 정도에 상응되지 못하는 상대적으로 낮은 收

益을 나타냈는데, 이러한 현상이 共分散 또는 베타係數로는 설명이 되지는 않았고, 危險이 높아감에 따라 非對稱度가 꾸준히 증가되는 현상을 보임으로써 상대적으로 낮은 收益이 非對稱度의 영향임을 어느 정도 암시해 주고 있다. 따라서 우리나라 證券市場에도 正의 非對稱度가 存在하며 投資者들도 非對稱度를 어느 정도 選好하기 때문에 상대적으로 낮은 期待收益을 감수하면서 보다 큰 非對稱度를 가진 포트폴리오를 選擇할지도 모른다는 結論을 내릴 수 있다.

그러나 實證分析의 과정에서 收益率 分布의 正規化 수단으로 자주 제시되고 있는 保有期間收益에 自然 log를 취하여 분석하지 못했고 또한 대상기간 자체가 단기간이기 때문에 期間에 따른 非對稱度의 영향을 파악하지 못했다. 이는 본 實證硏究의 限界點이다. 또한 投資者의 效用函數와 결부하여 포트폴리오에 포함되는 資産數에 따른 效用형태를 분석함으로써 最適資産의 수를 결정하여 理論과의 일치여부를 분석하는 문제와 分散投資에 따라 非體系的 非對稱度가 감소하는가의 여부는 次後의 보완될 문제라 생각한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 3次積率에 있어서 포트폴리오 分析의 理論的 論理는 부인하기 어렵다. 따라서 만일 非對稱度가 確率分布의 부분 또는 전체에 존재한다면 非對稱度와 관련된 정보는 무시되어서는 안된다고 할 수 있다. 그러나 非對稱度가 반드시 고려하여야 할 중요한 要因은 아니라는 實證的 證據도 제시되고 있으며[40] 期間에 따라 非對稱度의 變化에 따른 問題點, 또한 非對稱度를 實證的으로 測定하기에 어려운 點이 많기 때문에 投資意思決定시 非對稱度의 중요성을 결정하기에는 아직까지 어렵다고 할 수 있다.[41] 또한 實證的 問題로써 非線型函數가 포함될 때 다른 結果도 유도될 수 있는 것이다.

따라서 이에 관련된 부가적인 硏究가 필요하며, 여러가지 實證的인 問題가 해결될 때만이 3次積率의 포트폴리오 理論의 보다 타당성 있는 實證的 模型이 개발되는 것이 가능할 것이기 때문에 이상의 문제점들은 未來硏究에 대한 課題가 될 것이다.

40) J.C.Francis, op.cit., pp.169-172.
41) J.C.Francis, S.H.Archer, op.cit., p.381.