2 차원 $^3He-^4He$ 묽은 용액의 바닥상태에너지

강 영 봉*

Ground State Energy in Two Dimensional $^3He-^4He$ Dilute Solutions.

Kang Young-Bong

Abstract

The ground state energy of dilute solutions of ^3He in two dimensional superfluid ^4He is obtained from the grand partition function for a mixture of fermions and bosons. The mixed grand partition function is determined by a generalized formula which extends the single component formula of Montroll and Ward. It is found that the ground state energy is proportional to the ^3He density. Finally the differential area coefficient is obtained from the ground state erergy which expresses the Baym form.

Ⅰ. 서 론

미소량의 액체 ^3He가 초유체 ^4He에 혼합되어 있을 때, ^3He 입자는 약한 상호작용을 하며, ^4He는 오직 ^3He의 운동을 도우는 역학적 배경(mechanical background)으로만 작용한다.

이런 혼합용액(mixture solution)은 변하기 쉬운 축퇴(variable degeneracy)를 갖는 ^3He 액체에 이론적으로나 실험적으로 지대한 관심을 일으키게 한다. 온도~0.6 k 이하에서 액체 헬륨의 포논(phonon)과 로톤(roton)의 밀도는 무시할 정도로 작아서 ^4He 입자는 오직 ^3He 입자의 운동을 위한 초유체 배경으로만 역할을 한다.[1] $^3He-^4He$ 묽은 용액의 연구를 개척한 Landau 와 Pomeranchuk[2]은 위의 온도영역에서 초유체 ^4He 내의 ^3He 입자는 에

* 사범대학 과학교육과

너지 $E=-E_{03}+\frac{P^2}{2m^*}$ 을 갖는 불순물로 행동한다고 제시했다. 여기서 E_{03}은 ^{3}He 입자의 결합에너지이고 m^*는 준입자의 유효질량이다. Edwards 등[3]과 Anderson 등[4]은 절대 영도에서의 비열값을 통하여 Landau 와 Pomeranchuk 의 모델이 정당함을 보였다. 이 분야의 연구는 계속하여 여러 연구자에 의해 진전되었는데, Baym[5]과 Emery[6]는 ^{4}He 에서 ^{3}He 입자의 유효 상호작용은 입자간의 인력에 의한 것임을 밝혔다. 특히 Bardeen, Baym 과 Pines[7](이후 BBP)는 이 분야에 대한 현상론적 이론을 개발하여 ^{3}He 입자는 인력유효 퍼텐설(attractive effective potential)을 가지고 서로 상호작용함을 보였다. 그들은 유효 퍼텐설을 화학퍼텐설로부터 유도했으며, 에너지 $\varepsilon(n)=\varepsilon_0(n)+n_3\varepsilon_1(n)$에 기초를 두고 있다. 여기서 $\varepsilon_0(n)$은 순수한 ^{4}He 의 체적당 바닥상태 에너지이고 $\varepsilon_1(n)=\langle p^2/6m_4\rangle$ 은 순수한 ^{4}He 의 입자당 운동에너지의 1/3이다. BBP 이론에서 이런 현상론적 이론에 의한 에너지 표현은 중요한 역할을 한다.

현상론적 접근의 성공은 미시적 이론을 탄생시키는 자극제가 됐다.

McMillan[8]은 액체 ^{4}He 에서 2 개의 ^{3}He 원자를 고려하여 상호작용과 유효질량을 계산했다. Woo, Tan 과 Massey[9]는 변분법에 기초를 둔 바닥상태에너지의 섭동을 고려해서 같은 양을 얻었다. Saam[10]은 포논—준입자 상호작용을 미시적 이론으로 계산했고, van Leeuwen 과 Cohen[11]은 hard-sphere 모델을 조사했다. 같은 맥락에서 Isihara 와 Kojima[12]는 Ring-diagran 방법에 의한 혼합용액의 미시적 이론을 발표했다.

그런데 이들은 ^{4}He 분자를 명백하게 다루었다는 의미에서, 앞에서 언급한 이론(^{4}He 분자는 역학적 배경으로만 작용한다는 이론)과는 구별이 된다.

본 논문에서는 2 차원 초유체 ^{4}He 에 녹아 있는 액체 ^{3}He 혼합용액의 바닥상태에너지를 Ring-diagram 근사를 이용하여 얻은 큰 분배함수로 부터 유도하고, 2 차원에서 새롭게 정의된 미분면적 계수를 바닥상태에너지로 부터 계산할 것이다. 끝으로 BBP 의 현상론적 이론과 본 논문의 결과인 미시적 이론을 비교, 분석하려 한다.

II. 큰 분배함수(grand partition function)

1. 이상기체의 기여(ideal gas contribution)

여기서는 상호작용이 없는 ^{3}He 와 ^{4}He 입자의 큰 분배함수를 구한다.

1) ^{3}He 페르미온(fermion)에 대하여

$$\ell n\, \Xi_0^F = \int_0^\infty \ell n\,(1+z_F e^{-\beta\varepsilon})\; g(\varepsilon)\; d\varepsilon$$

$$= \frac{A}{4\pi} \frac{\beta\hbar^2}{2m_F} \tag{2,1}$$

여기서 $z_F = exp\,[\,\beta\hbar^2 p_F^2 / 2m_F\,]$이며 페르미온의 fugacity 이다.

$g(\varepsilon)$는 상태밀도이며, m_F는 페르미온의 질량, $\beta = 1/kT$, A 는 혼합용액의 총 면적이며, $\hbar p_F$ 는 페르미 운동량이다. 페르미 이상기체의 수밀도는

$$n_F^{(0)} = \frac{N}{A} = p_F^2 / 2\pi \quad \text{이다.}$$

2) ^{4}He 보존(boson)에 대하여

$$\ell n\ \Xi_0^B = -\int_0^\infty \ell n\,(1 - z_B e^{-\beta\varepsilon})\ g(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= -\frac{2\pi A}{(2\pi)^2} \int_0^\infty pdp\ \ell n(1 - z_B\, e^{-\beta\varepsilon}) - \ell n(1 - z_B)$$

$$= A \frac{2\pi m_\beta}{\beta\hbar^2}\ g_2(z_B) - \ell n(1 - z_B) \tag{2,2}$$

여기서 Z_B는 보존의 fugacity 이며,

$$g_2(z_B) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z_B^\ell}{\ell^2} = z_B + \frac{z_B^2}{2^2} + \tag{2,3}$$

z_B의 값이 매우 작을 때, $g_2(z_B) \approx z_B$이다.

그리고 보존이상기체의 수밀도 $n^{(0)}{}_B \approx z_B/\lambda^2$(작은 z_B에 대해)

이다. 여기서 열적파장 $\lambda^2 = h^2/2\pi\, m_B kT$ 이다.

2. First order exchange 의 기여

First order exchange diagram 에 의한 큰 배분함수는

$$\ell n\ \Xi_{1x}^i = \pm \frac{A\beta}{(2\pi)^4} \int d\vec{p}\, d\vec{q}\ U_i(q)\ f_i(p)\ f_i(\vec{p} + \vec{q}) \tag{2,4}$$

로 주어진다.

여기서 i=F 혹은 B, 이는 각각 페르미온과 보존을 나타낸다.

$f_i(p)$는 그에 대응하는 분포함수이며, +는 페르미통계, −는 보즈통계에 대응된다. 그리고 퍼텐셜을 운동량 공간에서 표현하였고 soft-sphere 경우와 hard-sphere 경우에서 동

시에 다룰 수 있도록 택하였다. 그 퍼텐셜의 fourier 변환은

$$U_i(q) = \begin{cases} U_i(0)\,[\,1-q^2/q_m^2\,], & q \leq q_m \\ 0\ , & q > q_m \end{cases} \qquad (2,5)$$

여기서 q_m은 퍼텐셜이 영이 되는 임계 파수이며 헬륨에 대하여 약 1.7Å^{-1}이다. 큰 분배함수의 계산에 있어서, ^{4}He에 대해서는 Ring-diagram 기여와 합쳐 지고, 묽은 용액 ^{3}He에 대해서는 자세히 다룬다.

1) ^{3}He 페르미온에 대하여

스핀 무게 인자(spin weight factor) 2는 교환도표의 대칭 인자 1/2에 의해 없어진다.

$$\ell n\ \Xi_{1x}^F = \frac{A\beta}{(2\pi)^4}\int d\vec{p}\ d\vec{q}\ f_F(p)\ f_F(\vec{p}+\vec{q})\ U_F(q)$$

$$= \frac{A\beta\ U_F(0)}{16\pi^2}\ p_F^4\ (1-p_F^2/q_m^2)\ ,\ (p_F \langle\langle q_m) \qquad (2,6)$$

여기서

$$f_F(p) = z_F\ exp(-\beta\hbar^2p^2/2m_F) \,/\, \{1+z_F\ exp(-\beta\hbar^2p^2/2m_F)\} \qquad (2,7)$$

p_F가 q_m보다 훨씬 작다고 한 것은 ^{3}He의 저 농도에 대응되는 가정이다.

2) ^{4}He 보존에 대하여

$$\ell n\ \Xi_{1x}^B = -\frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{p}\ d\vec{q}\ f_B(p)\ f_B(\vec{p}+\vec{q})\ U_B(q)$$

$$= -\frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q}\ U_B(q)\ \lambda_i^B(q) + \frac{A\beta}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q}\ U_B(q)\ n_B^{(0)} \qquad (2,8)$$

여기서 $\lambda_i^B(q)$ 는 Ring-diagram에서 나타난 보존의 전파인자(propagator)의 고유값이다.

바닥상태에서의 근사값은

$$\lambda_j^B(q) = \frac{4m_B\ \ n_B^{(0)}/\hbar^2}{q^2+(\,4\pi m_B j/\beta q\hbar^2)^2} \qquad (2,9)$$

이다.

3. First order direct coupling 의 기여

두 입자사이의 first order direct coupling 은 다음과 같이 세가지 종류의 큰 분배함수로 표현되어 질 수 있다.

1) $^3He-^3He$ 결합

$$\ell n\ \Xi_1^F = -\frac{A\beta}{8\pi^4}\int d\vec{p}\ d\vec{p}'\ U_F(0)\ f_F(p)\ f_F(p')$$
$$= -\frac{A\beta p_F^4}{8\pi^2}\ U_F(0) \qquad (2,10)$$

여기서 무게인자는 2 개의 독립된 스핀으로 인하여 교환도표 기여에서의 무게인자의 2 배가 된다.

2) $^4He-^4He$ 결합

$$\ell n\ \Xi_1^B = -\frac{A\beta}{32\pi^4}\int d\vec{p}\ d\vec{p}'\ U_B(0)\ f_B(p)\ f_B(p')$$
$$= -\frac{A\beta U_B(0)}{2}\left(\frac{g_1(z_B)}{\lambda^2}\right)^2 \qquad (2,11)$$

보존과 보존사이의 결합에서는 스핀 무게 인자가 없다.

3) $^3He-^4He$ 결합

$$\ell n\ \Xi_1^{FB} = -\frac{A\beta}{8\pi^4}\int d\vec{p}\ d\vec{p}'\ U_{FB}(0)\ f_B(p)\ f_F(p')$$
$$= -\ A\beta\ U_{FB}(0)\left(\frac{g_1(z_B)}{\lambda^2}\right)\left(\frac{p_F^2}{2\pi}\right) \qquad (2,12)$$

여기서 스핀 무게인자는 2 이다.

4. Ring-diagram 의 기여

1) 순수한 ^3He 또는 ^4He Ring-diagram 의 기여

순수한 ^3He 또는 ^4He Ring-diagram 의 분배함수는 Montroll Ward 공식[13]에 의해

$$\ell n\ \Xi_r = \frac{A}{2(2\pi)^3}\int d\vec{q}\ \sum_{j=\infty}^{\infty}\{U(q)\ \lambda_j(q) - \ell n\,(1+U(q)\,\lambda_j(q))\} \qquad (2,13)$$

로 주어진다. 여기서 $\lambda_j(q)$ 는 유효 전파 인자의 고유값이다. 페르미온에 대해서는

$$\lambda_j^F(q) = \frac{4m}{\hbar^2}\int_0^{p_F} p\,dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \frac{q^2 + 2pq\cos\theta}{(q^2+2pq\cos\theta)^2 + (4\pi mj/\beta\hbar^2)^2}$$

$$= \frac{2\pi m}{\hbar^2}\left[F(s,u) + \triangle F(s,u) + \triangle^2 F(s,u) + \cdots \right] \qquad (2,14)$$

이다.

그리고

$$F(s,u) = 1 - \frac{1}{2s}\ (g_+ + g_-)$$

$$\triangle F(s,u) = \frac{\pi^2}{3\eta^2}\ \frac{1}{s}\ \left(\frac{1}{g_+^3} + \frac{1}{g_-^3}\right) \qquad (2,15)$$

$$\triangle^2 F(s,u) = \frac{7\pi^4}{3\eta^4}\ \frac{1}{s}\ \left(\frac{1}{g_+^7} + \frac{1}{g_-^7}\right)$$

이며,

$$g_\pm = \left[(s \pm iu) - 4 \right]^{\frac{1}{2}},\quad s = \frac{q}{p_F},\quad \eta = \frac{\beta\hbar^2}{2m} p_F^2$$

$$u = \frac{4\pi mj}{\beta q p_F \hbar^2} = \frac{y}{s},\quad y = \frac{4\pi mj}{\beta p_F^2 \hbar^2} \qquad (2,16)$$

이다. 보존에 대한 유효전파인자의 고유값은 (2.9) 식에서 언급한 바 있다.

2) ^{3}He 와 ^{4}He 가 혼합된 Ring diagram 의 기여

^{3}He 와 ^{4}He 가 혼합된 Ring diagram 의 큰 분배함수는 Mantroll 과 Ward 의 공식을 일반화 시킨 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ell n\ \Xi_r^{FB} = \frac{A}{(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2N} \left[U_{FB}(q) \right]^{2N} \left[\tilde{\lambda}_i^F(q)\ \tilde{\lambda}_i^B(q) \right]^N \qquad (2,17)$$

여기서 유효 고유값은

$$\tilde{\lambda}_i^F(q) = \frac{\lambda_i^F(q)}{\left[1 + U_F(q)\ \lambda_i^F(q) \right]}$$

$$\tilde{\lambda}_i^B(q) = \frac{\lambda_i^B(q)}{\left[1 + U_B(q)\ \lambda_i^B(q) \right]} \qquad (2,18)$$

이다. (2,18)식을 사용하여 (2,17)식을 다시 쓰면,

$$\ell n\, \Xi_r^{FB} = -\frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ell n\left\{1 - \frac{U_{FB}^2(q)\ \lambda_i^B(q)\ \lambda_i^F(q)}{[1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q)][1+U_F(q)\ \lambda_i^F(q)]}\right\}$$

$$= \frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_i \{U_B(q)\ \lambda_i^B(q) + U_F(q)\ \lambda_i^F(q) \qquad (2,19)$$

$$- \ell n\,[1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q) + U_F(q)\ \lambda_i^F(q) + (U_B(q)\ U_F(q) - U_{FB}^2(q))\ \lambda_i^B(q)\ \lambda_i^F(q)]\}$$

이 된다.

(2,19)식을 이용하면 Montroll 과 Ward 의 단일성분계에 대한 공식을 얻을 수 있다. 액체 ^3He 가 초유체 ^4He 에 미소량 용해되어 있다는 것에 관심을 갖으면 (2,19)식은 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$\ell n\, \Xi_r^{FB} = \ell n\ \Xi_r^B + \ell n\, \Xi_r^{F(1)} + \ell n\, \Xi_r^{F(2)} + \cdots \qquad (2,20)$$

여기서 $\ell n\ \Xi_r^B$ 는 순수한 액체 ^4He 의 Ring diagram 기여이며 두번째와 세번째항은 각각 $\lambda_i^F(q)$, $\{\lambda_i^F(q)\}^2$ 에 비례하는 항이다.

$$\ell n\, \Xi_r^B = \frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \{U_B(q)\ \lambda_i^B(q) - \ell n\ (1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q))\} \qquad (2,21)$$

$$\ell n\, \Xi_r^{F(1)} = \frac{A}{2(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{U_{FB}^2(q)\ \lambda_i^B(q)\ \lambda_i^F(q)}{1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q)} \qquad (2,22)$$

$$\ell n\, \Xi_r^{F(2)} = \frac{A}{4(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{U_F(q) + (U_B(q)\ U_F(q) - U_{FB}^2)\ \lambda_i^B(q)}{1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q)}\right\} \{\lambda_i^F(q)\}^2$$

$$\approx \frac{A}{4(2\pi)^2}\int d\vec{q} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{U_F(q)\ \lambda_i^F(q)}{1+U_B(q)\ \lambda_i^B(q)}\right\}^2 \qquad (2,23)$$

(2,21)식에 고유값과 유효퍼텐셜을 대입하고 적분을 수행하면

$$\ell n\ \Xi_r^B = \frac{A\beta\, n_B^{(0)} U_B(0) q_m^2\ r_{(0)}^2}{16\pi(q_m^2 - r_{(0)}^2)}\ \{I(n_B^{(0)}) - 1\} \qquad (2,24)$$

를 얻는다. 여기서,

$$r_{(o)}^2 = \frac{4m_B n_B^{(0)} U_B(0)}{\hbar^2}$$

$$I(n_B^{(0)}) = \frac{q_m}{\sqrt{r_{(o)}^2 - q_m^2}} \arcsin \sqrt{1 - \frac{q_m^2}{r_{(o)}^2}}, \quad r_{(o)}^2 \rangle q_m^2 \qquad (2,25)$$

이다. (2,22)식의 계산을 수행하는데 있어서 $\lambda_i^F(s,y)$존재는 많은 어려움을 준다. 그래서 적분을 용이하게 하기 위해 다음과 같은 고유값을 택하였다. 즉 y=0인 경우이며, 이때 고유 값은 가장 큰 값을 갖는다.

$$\lambda(s,o) \approx \frac{2\pi m}{\hbar^2} F(s,o)$$

$$= \frac{2\pi m}{\hbar^2} \begin{cases} 1 & , \quad s \leq 2 \\ 1-\left(1-\frac{4}{s^2}\right)^{1/2}, & s \rangle 2 \end{cases} \qquad (2,26)$$

그리고 운동량 공간적분은 $0<q<2p_F$와 $2p_F<q<\infty$ 인 두 영역으로 나누어, $q_m >> p_F$ 라는 조건을 사용하여 근사적으로 계산하였다. 그 결과는 다음과 같다.

$$\ell n\, \Xi_r^{F(1)} = \frac{A\beta m_F U_{FB}^2(0)\, n_B^{(0)}}{2\pi\hbar^2 (q_m^2 - r_{(o)}^2)^2} \left\{ q_m^4 \left(I(n_B^{(0)}) - \frac{3}{4} \right) + q_m^2 r_{(o)}^2 \left(\frac{3}{8} - I(n_B^{(0)}) \right) + \frac{3}{8} r_{(o)}^4 I(n_B^{(0)}) \right\} \qquad (2,27)$$

마찬가지로 (2,23)식의 계산도 $\lambda_i^F(s,y)$의 복잡한 형태 때문에 적분을 수행한다는 것은 매우 힘들다. 그리고 적분 영역 $0<q<2p_F$는 $2p_F<q<\infty$에 비해 아주 작은 값을 갖는다. 그래서 적분은 $2p_F<q<\infty$영역에서 $\lambda_i^F(q) \frac{4m_F n_F^{(0)}/\hbar^2}{q^2+(4\pi m_F i/\beta q\hbar^2)^2}$을 이용하여 계산하였다.

$$\ell n\, \Xi_r^{F(2)} = \frac{A\beta n_F^{(0)2} U_F^2(0) q_m}{4\pi\hbar^2 (q_m^2 - r_{(o)}^2))^3} \left\{ q_m^4 \left(I(n_B^{(0)}) - \frac{7}{4} \right) + q_m^2 r_{(o)}^2 \left(I(n_B^{(0)}) - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8} r_{(o)}^4 I(n_B^{(0)}) \right\} \qquad (2,28)$$

(2,27), (2,28)식은 ^{3}He 묽은 용액의 행동을 감안하여 p_F항을 무시한 것이다.

5. 총 큰분배함수(total grand partition function)

위에서 구한 분배함수를 전부 합한 총 큰분배함수는

$$\ell n\ \Xi = \frac{1}{2}\frac{A\beta p_F^2\hbar^2}{2m_F}\ n_F^{(0)} + An_B^{(0)} - \frac{1}{2}A\beta\ U_F(0)\ (n_F^{(0)})^2 - \frac{1}{2}A\beta\ U_B(0)\ (n_B^{(0)})^2$$

$$- A\beta\ U_{FB}(0)\ n_B^{(0)} n_F^{(0)} + \frac{A\beta\ U_F(0) p_F^4}{16\pi^2} + \frac{A\beta\ U_B(0)\ q_m^2\ r_{(o)}^2}{16\pi(q_m^2 - r_{(o)}^2)^2}\ \{I(n_B^{(0)}) - 1\}$$

$$+ \frac{A\beta m_F\ U_{FB}^2(0)\ n_B^{(0)} n_F^{(0)}}{2\pi\hbar^2\ (q_m^2 - r_{(o)}^2)^2}\ \{q_m^4(I(n_B^{(0)}) - \frac{3}{4}) + q_m^2\ r_{(o)}^2\ (\frac{3}{8} - I(n_B^{(0)})) + \frac{3}{8}r_{(o)}^4\ I(n_B^{(0)})\}$$

$$+ \frac{A\beta m_F (n_F^{(0)})^2 U_F^2(0)\ q_m^2}{4\pi\hbar^2(q_m^2 - r_{(o)}^2)^3}\ \{q_m^4(I(n_B^{(0)}) - \frac{7}{4}) + q_m^2 r_{(o)}^2\ (I(n_B^{(0)}) - \frac{1}{8}) - \frac{1}{8}\ r_{(o)}^4\ I(n_B^{(0)})\}$$

이다. (2,29)식을 다시쓰면 (2,29)

$$\frac{1}{A}\ell n\ \Xi = \frac{1}{2}\frac{\beta p_F^2\hbar^2}{2m_F}\ n_F^{(0)} + n_B^{(0)} - \frac{\beta}{2}U_B(n_B^{(0)} + n_F^{(0)})^2\{1 - \frac{f}{Q_1}A(n^{(0)})\}$$

$$- \beta(\frac{U_{FB}}{U_B} - 1)\ U_B(n_B^{(0)} + n_F^{(0)}) n_F^{(0)}\ \{1 - \frac{U_{FB} + U_B}{U_B}\ \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{Q_1^2}\ B(n^{(0)})\}$$

$$+ \beta U_B(n_B^{(0)} + n_F^{(0)})\ n_F^{(0)}\ \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{Q_1^2}\ B(n^{(0)})$$

$$+ \frac{\beta}{2}\ \frac{U_F^2}{U_B^2}\ U_B(n_F^{(0)})^2\ \frac{m_F}{m_B}\ \frac{f}{Q_1^3}\ C(n^{(0)}) - \frac{\beta}{4}\ Y\ (n_F^{(0)}) + \frac{\beta}{4}\ \frac{U_{FB}^2}{U_B}(n_F^{(0)})^2$$

로 쓸 수 있다. (2,30)

여기서 표시는 다음과 같다.

$U_B = U_B(0)$, $U_F = U_F(0)$, $U_{FB} = U_{FB}(0)$, $r^2 = r^2(0)$

$$f = \frac{m_B U_B q_m^2}{2\pi\hbar^2}\ ,\quad y = \frac{n_F^{(0)}}{n_B^{(0)}}\ ,\quad n^{(0)} = n_B^{(0)} + n_F^{(0)}$$

$$Y = U_B\{2 + \frac{U_F}{U_B} - 4\frac{U_{FB}}{U_B} + \frac{U_{FB}^2}{U_B^2}\},\quad X = \frac{U_{FB} + U_B}{U_B}$$

$$Q_s = q_m^2 - sr^2(1+y)$$

$$A(n^{(0)}) = I(n^{(0)}) - 1$$

$$B(n^{(0)}) = \frac{1}{q_m^2}\ \{q_m^4(I(n^{(0)}) - \frac{3}{4}) + q_m^2 r^3(1+y)(\frac{3}{8} - I(n^{(0)})) + \frac{3}{8}\ r^4(1+y)^2\ I(n^{(0)})\}$$

$$C(n^{(0)}) = \{q_m^4\ (I(n^{(0)}) - \frac{7}{4}) + q_m^2 r^2(1+y)(I(n^{(0)}) - \frac{1}{8}) - \frac{1}{8}\ r^4(1+y)^2\ I(n^{(0)})\}$$

$$I(n^{(0)}) = \frac{q_m}{\sqrt{r^2(1+y)-q_m^2}} \quad \arcsin \sqrt{1-\frac{q_m^2}{r^2(1+y)}}$$

그리고 원래의 $\ell n\, \Xi$ 에서 일곱번째부터 아홉번째까지의 항은 $^3He-^4He$ 의 혼합 Ring-diagram 에 의해 얻어진 것이며 ^3He 입자가 ^4He 입자에 비해 아주 작은 농도임을 상기한다면, 위와 같은 수정이 가능하다. 지금까지는 혼합용액의 큰 분배함수를 구하였다. 다음 장에서는 큰 분배함수를 이용하여 바닥상태에너지를 유도하려 한다.

III. 바닥상태 에너지(ground state energy)

$^3He-^4He$ 혼합 용액의 내부에너지는 큰 분배함수를 β 에 대하여 미분합으로써 얻어진다. 이 때 $n_B^{(0)} = \frac{2\pi m_B}{\beta\hbar^2} z_B$, $n_F^{(0)} = \frac{2m_F}{2\pi\beta\hbar^2}\ell n\, z_F$

를 이용하여 z_B, z_F 그리고 A를 고정한다. 이 때 내부에너지는

$$\frac{E}{A} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\ell n\, \Xi\right)$$

$$= \frac{p_F^2\hbar^2}{2m_F} n_F^{(0)} + \frac{n_F^{(0)}}{\beta} - \frac{1}{2} U_B (n_B^{(0)} + n_F^{(0)})^2 \{1 - \frac{f}{Q_1^2}(\sum A(n^{(0)}))\}$$

$$- \left(\frac{U_{FB}}{U_B} - 1\right) U_B (n_B^{(0)} + n_F^{(0)})\, n_F^{(0)} \{1 - X\frac{m_F}{m_B}\frac{f}{Q_1^3}(\sum\beta(n^{(0)}))\}$$

$$+ U_B (n_B^{(0)} + n_F^{(0)})\, n_F^{(0)}\, \frac{m_F}{m_B}\, \frac{f}{Q_1^3}\, (\sum\beta(n^{(0)}))$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{U_F^2}{U_B}(n_F^{(0)})^2 \frac{m_F}{m_B}\, \frac{f}{Q_1^4}\, (\sum C(n^{(0)}))$$

$$- \frac{1}{4} Y (n_F^{(0)})^2 + \frac{1}{4}\frac{U_{FB}^2}{U_B}(n_F^{(0)})^2 \qquad (3,1)$$

이 된다.

여기서

$$\sum A(n^{(0)}) = I(n^{(0)})\, Q_{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} q_m^2$$

$$\sum B(n^{(0)}) = I(n^{(0)}) \{ q_m^2 Q_{\frac{1}{2}} + \frac{5}{8}\frac{r^4(1+y)^2}{q_m^2} Q_{3/10} \} - \frac{5}{4} q_m^2 Q_1 - \frac{3}{4} r^2(1+y) Q_{-1/4}$$

$$\sum C(n^{(0)}) = I(n^{(0)}) \{q_m^2 Q_{-\frac{9}{2}} + \frac{9}{8} r^4(1+y)^2 Q_{\frac{1}{18}}\} - \frac{9}{4} q_m^4 Q_1 - \frac{13}{2} q_m^2 r^2(1+y) Q_{\frac{1}{104}}$$

$$\sum A'(n^{(0)}) = I(n^{(0)}) Q_{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} Q_{\frac{2}{5}} \qquad (3,2)$$

우리는 내부에너지를 이상기체 밀도 $n_B^{(0)}$와 $n_F^{(0)}$의 함수가 아닌 실제 밀도 n_B와 n_F의 함수로 표현하고자 한다.

$n = \frac{N}{A} = z \frac{\partial}{\partial z} (\frac{1}{A} \ell n \Xi)$ 를 이용하면 $n^{(0)}{}_B$와 $n^{(0)}{}_F$를 각각

n_B, n_F의 함수로 쓸 수 있다. 페르미온에 대해서는

$$n_F^{(0)} = n_F \frac{U_B n n_F}{\varepsilon_F} \{1 - \frac{f}{Q_1^2} (\sum A'(n))\} + (\frac{U_{FB}}{U_B} - 1) U_B \frac{(2n_F + n_B) n_F}{\varepsilon_F} \{1 - X \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^2} B(n)\}$$

$$- (\frac{U_{FB}}{U_B} - 1) U_B \frac{n_F^2}{\varepsilon_F} X \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} [I(n) \{ \frac{3}{2} r^2(1+y) Q_1 + \frac{3}{4} \frac{r^4(1+y)^2}{q_m^2} Q_{-\frac{1}{4}} \}$$

$$- \frac{1}{2} q_m^2 Q_1 - \frac{9}{8} r^4 (1+y) Q_{\frac{1}{16}}$$

$$- U_B \frac{(2n_F + n_B) n_F}{\varepsilon_F} \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^2} B(n) - \frac{U_F^2}{U_B} \frac{n_F^2}{\varepsilon_F} \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} C(n)$$

$$- U_B \frac{n_F^2}{\varepsilon_F} \frac{m_F}{m_B} \frac{1}{Q_1^3} [I(n) \{ \frac{3}{2} r^2(1+y) (Q_1 + \frac{3}{4} \frac{r^4(1+y)^2}{q_m^2} Q_{-\frac{1}{4}} \}$$

$$- \frac{1}{2} q_m^2 Q_1 - \frac{9}{8} r^2(1+y) Q_{\frac{1}{6}}]$$

$$- \frac{1}{2} \frac{U_F^2}{U_B} \frac{n_F^3}{\varepsilon_F (n_B + n_F)} \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^4} [I(n) \{ \frac{9}{2} q_m^2 r^2 (1+y) Q_1 + \frac{27}{4} r^4 (1+y)^2 Q_{\frac{1}{36}} \}$$

$$\frac{1}{2} q_m^4 Q_1 - \frac{51}{8} q_m^2 r^2 (1+y) Q_{-\frac{1}{34}}] + \frac{1}{2} Y \frac{n_F^2}{\varepsilon_F} - \frac{1}{2} \frac{U_{FB}^2}{U_B} \frac{n_F^2}{\varepsilon_F} \qquad (3,3)$$

이다. 여기서 ε_F는 페르미에너지 $\frac{\hbar^2 p_F^2}{2m_F}$ 이다.

그리고 ^4He에 녹아있는 ^3He가 아주 미소량이기 때문에 $r^2(1+y)$항에 있는 $n_B^{(0)}$와 $n_F^{(0)}$를 n_B와 n_F로 대치했다.

같은 방법으로, 보존에 대해서는,

$$n_B^{(0)} = n_B + \beta U_B\, n\, n_B \left\{ 1 - \frac{f}{Q_1^2} (\sum A'(n)) \right\}$$

$$+ \beta \left(\frac{U_{FB}}{U_B} - 1 \right) U_B\, n_B n_F \left\{ 1 - X \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} (\sum B(n)) \right\}$$

$$- \beta\, U_B\, n_B\, n_F \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} (\sum B(n))$$

$$- \frac{\beta}{2} \frac{U_F^2}{U_B} \frac{n_F^2 n_B}{n} \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^4} \left[I(n) \left\{ \frac{9}{2} q_m^2\, r^2 (1+y)\, Q_1 + \frac{1}{4} \frac{r^4 (1+y)^2}{q_m^2} Q_{1/36} \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} q_m^4\, Q_1 - \frac{51}{8} q_m^2\, r^2 (1+y)\, Q_{-1/34} \right] \qquad (3,4)$$

이다. 마찬가지로 $r^2(1+y)$는 n_B와 n_F에 의해 표현되었다.

내부에너지를 이상기체 밀도 대신에 실제 밀도의 함수로 표현하고 절대 영도 극한을 취하면, 바닥상태에너지는

$$\frac{E}{A} = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar^2 p_o^4}{2 m_F} + \frac{1}{4} Y n_F^2 - \frac{1}{4} \frac{U_{FB}^2}{U_B} n_F^2 + \frac{1}{2} n^2 U_B \left[1 - \frac{f}{Q_1} A(n) \right]$$

$$+ n\, n_F (U_{FB} - U_B) \left[1 - X \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^2} B(n) \right]$$

$$- n\, n_F U_B \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} B(n) - \frac{1}{2} \frac{U_F^2}{U_B} n_F^2 \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^3} C(n) \qquad (3,5)$$

이다. 여기서 $p_0^2 = 2\pi\, n_F$, $n = n_B + n_F$

n_F^2항을 무시한다면, 위의 에너지를 N_F의 선형함수, 즉 Baym 의 에너지 형태 ; $E = E_0(N) + N_F E_1(N)$로 쓸 수 있다. 여기서 E_0와 E_1은 오직 총입자수 N 에 종속이다.

soft 퍼텐셜에 대해서

$$E^s(N) = \frac{1}{2} n\, N\, U_B \left\{ 1 - \frac{f}{Q_1} A(n) \right\}, \qquad (3,6)$$

$$E_1^s(N) = n (U_{FB} - U_B) \left\{ 1 - X \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^2} B(n) \right\} - n\, U_B \frac{m_F}{m_B} \frac{f}{Q_1^2} B(n) \qquad (3,7)$$

이다. 이 에너지 표현은 Baym 에 의해 현상론적으로 소개됐던 에너지와 일치하며 미분면적계수 $\alpha = (A_F - A_B)/A_B$를 구하는데 중요한 역할을 한다. 그리고 순수한 ^{4}He 의 입자당 바닥상태 에너지는

$$\varepsilon(\bar{n}_B) = \frac{1}{2}\,\bar{n}_B\,U_B\left\{1 - \frac{f}{q_m^2 - \bar{r}^2}A(\bar{n}_B)\right\} \tag{3,8}$$

이다. 여기서 n_B는 순수한 ^{4}He 의 밀도, $r^2 = 4\,m_B n_B U_B/\hbar^2$이다. 반경 a 를 갖는 Hard -sphere 에 대한 근사 pseudopotential $U(q) = \hbar(8\pi a)/2m$를 사용하면,

$$E_o^h(N) = \frac{\hbar^2}{2m_B}\,4\pi a n\,(1+2a) \tag{3,9}$$

$$E_1^h(N) = \frac{\hbar^2}{2m_B}\,(8\pi a n)\left[\frac{1}{6}\left\{1+\frac{3}{2}X\,\frac{m_F}{m_B}\,a\right\}+\frac{3}{2}\,\frac{m_F}{m_B}\,a\right] \tag{3,10}$$

가 된다. 만약 U_{FB}를 U_F로, $8\pi an$를 $\langle p^2\rangle$으로 쓸 수 있다면, $E_1^h(N)$은 Baym 형태의 $E_1(N)$와 일치한다.

IV. 미분면적계수 α (differential area coefficient α)

3 차원에서 미분부피계수 α 는 $(V_F - V_B)/V_B$로 정의 된다. Baym 은 그의 에너지 형태를 사용하여 미분부피계수 α 가 $E_1'(N)/E_0''(N)$임을 보였다. 우리는 2 차원에서 미분면적계수 α 를

$$\alpha = \frac{A_F - A_B}{A_B} = \frac{E_1'(N)}{E_0''(N)} \tag{4,1}$$

로 정의했다. 여기서 V 와 A 는 각각 부피와 면적이다. 그리고 미분은 분자의 총 입자수에 대한 것이며 soft 퍼텐셜의 경우에

$$\alpha = \frac{\left(\frac{U_{FB}}{U_B} - 1\right)\left\{1 - X\,\frac{m_F}{m_B}\,\frac{f}{q_m^3(1)}\,(\sum B(\bar{n}_B))\right\} - \frac{m_F}{m_B}\,\frac{f}{q_m^3(1)}\,(\sum B(\bar{n}_B))}{1 - \frac{f}{q_m^3(1)}\,C(\bar{n}_B)} \tag{4,2}$$

여기서

$$q_m(s) = q_m^2 - s\,\bar{r}^2\ ,\ \bar{r}^2 = 4m_B\,\bar{n}_B\,U_B/\hbar^2,$$

$$\sum B(\bar{n}_B) = q_m^4\left\{I(\bar{n}_B) - \frac{5}{4}\right\} + q_m^2\,\bar{r}^2\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I(\bar{n}_B)\right\} \tag{4,3}$$

$$+\,\bar{r}^4\left\{\frac{5}{8}I(\bar{n}_B) - \frac{3}{16}\right\} - \frac{3}{16}\,\frac{\bar{r}^6}{q_m^2}\,I(\bar{n}_B),$$

$$I(\bar{n}_B) = \frac{q_m^2}{\sqrt{\bar{r}^2 - q_m^2}} \arcsin \sqrt{1 - \frac{q_m^2}{\bar{r}^2}}$$

이 표현은 ^3He의 농도가 영일 때이다.

미분부피계수는 BBP의 현상론적 이론에서 나타나는 운동량의 영일때의 유효퍼텐셜을 표현할 때 중요한 역할을 하며 수치적으로도 계산이 되어 있다.

V. 결과 및 논의

2차원 초유체 ^4He에 ^3He가 용해되어 있을 때 여러 가능한 헬륨의 거동에 대한 큰 분배함수를 구하였다. 특히 $^3He-^4He$ 혼합 Ring-diagram에 의한 큰 분배함수는 Montroll과 Ward의 단일성분에 대한 공식을 일반화 시킨 공식으로서 표현되어졌다. 그리고 바닥상태에너지는 큰 분배함수를 이용하여 유도할 수 있는데, 그 결과는 ^3He농도의 선형함수인 Baym의 에너지 형태로 표현될 수 있음을 보여준다. 더불어서 혼합용액의 바닥상태에너지로 부터 순수한 액체 ^4He의 바닥상태에너지를 쉽게 구할 수 있었다. 3차원에서와 마찬가지로 2차원에서도 유효퍼텐셜을 표현하는데 중요한 역할을 하리라 예상되는 미분면적계수를 Baym의 에너지 형태로 부터 직접 유도할 수 있었다. 미분면적계수의 매개변수들의 값이 수치적으로 주어진다면 묽은 용액의 정량적인 특성을 연구하는데 큰 도움이 될 것이다. 이상에서 본 바와 같이 $^3He-^4He$ 묽은 용액에 대한 BBP의 현상론적 이론의 결과를 Ring-diagram 근사를 이용한 미시적 입장에서 상세히 다룰 수 있었다.

참 고 문 헌

1) J. Landau, J. T. Tough, N. R. Brubaker and D. O. Edwards, phys. Rev. A2. 2472 (1970).

2) L. D. Landau, I. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk, USSR 59, 669 (1948).

3) D. O. Edwards et al., Phys. Rev. LI5, 773 (1965).

4) A. C. Anderson et al., Phys. Rev. LI7, 367 (1967).

5. G. Baym, Phys. Rev. LI7, 952 (1966): J. Low. Temp. Phys. 18, 335 (1975).

6) V. J. Emery, Phys. Rev. 161, 194 (1967).

7) J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, Phys, Rev. 156, 207 (1967).

8) W. L. McMillan, Phys, Rev. 175, 266 (1968): 182, 299 (1969).

9) Chai-Wei Woo, Hing-Tat Tan and W. E. Massey, Phys, Rev. 185, 287 (1969): Al, 519 (1970).

10) W. F. Saam, Ann Phys, 53, 219 (1969).

11) J. M. J. van Leeuwen and E. G. D. Cohen. physica 27, 1157 (1961).

12) A. Isihara, D. Y. Kojima, Z. F. phys. B37, 1 (1980): Physica, 103B, 247 (1981).

13) E. W. Montroll, J. C. Ward, phys. Fluids, 1, 55 (1958).