비선형 양자장론에 대한 고찰

Disscusion on the Non-Linear quantum field theory

강 동 식* · 박 규 은**

Kang, Dong-shik · Park, Kyu-Eun

요 약

2차원 시공에서 scalar field의 안정성(stability)과 3차원 시공에서의 vortex-like 해를 재고 하고 Non-Abelian 이론에서 자기단극이 존재하야 하는 이유를 설명하고, Euclidean 공간에서 유한 Energy를 갖는 순간자(instanton)해를 고찰한다. 그리고 chern-simon theory에서 self-Duality 대한 대략적인 설명을 덧붙인다.

Abstract

We reriewed the stability of the scalar fields in 2 dimensional and the vortex-like solutions in 3 dimensional.

Also we explain the reason of the existence of the magnetic monopole in Non-Ablian theory and discuss the instanton which has a finite energy in the Euclidean Space. In addition to there, we give a rough explanation for the Chern-Simon theory.

* 제주대학교 사범대학 과학교육과

** 제주대학교 사범대학 과학교육과

1. 서 론

비선형 운동방정식들의 해들 중에는 에너지를 유한하게 하고 안정성을 주는 것들이 있다. 에너지를 유한하게 하고 안정성이 있어야 하는 이유는 양자화할 때 입자로 해석할 수 있어야 하기 때문이다. 이차원 시공에서 위의 조건들을 만족하는 해들이 존재하며[1], 보다 복잡한 모델(gauge potential을 포함하는 모델)인 경우에서도 그러한 해들이 존재한다.[2, 3]

2절에서 이차원 시공에서 scalar장들만으로 이루어진 계의 운동방정식들을 재고하고 이 방정식의 해들이 위의 조건을 만족시킴을 볼 수 있다. 3절에서는 4차원인 경우 vortex와 같은 형태의 해가 존재함을 알 수 있으며[2], 이것은 Aharonor-Bohm효과의 반대로 생각해 볼 수 있다. 4절에서는 비가환, 대칭성파괴 모델에서 자기 단극은 반드시 있어야 되는 것으로 Maxwell 전자기 이론에서 처럼 없어도 되는 것이 아님을 알게 된다.[3] 5절에서는 Euclidean 공간(허수의 시간)에서의 해가 존재하고 이해는 마치 양자역학에서 터널효과시 타나나는 파동함수와 같이 지수적으로 감소하는(말하자면 허수시간으로 진동하는) 형태이기 때문에 순간자라 불리운다.[4]

6절에서는 chern-simon 모델에서(3차원 시공) self-duality를 만족하고 에너지를 유한하게 하는 해가 존재함을 알 수 있다.[5]

2. 2차원 시공에서의 고전적 해

계의 Lagrangian이 다음으로 주어지는 경우를 보기로 하자.

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \tag{1}$$

여기에서 위치에너지 $V(\phi)$는 ϕ_1, ϕ_2에서 영의 최소값을 가지며 다음과 같은 scaling 특성을 갖고 있다.

$$V(\phi ; a) = \frac{1}{a} V(\sqrt{a}\,\phi ; 1) \tag{2}$$

식 (1)에서 Euler-Lagrange 방정식을 구하면

$$\Box \phi + V'(\phi) = 0 \tag{3}$$

이 된다. 이제부터 별도이 언급이 없으면 시간에 무관한 장(field) $\phi(x)$만을 고려 하기로 하자. 그러면 식 (1)과 식 (3)은 각각

$$L = -\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) \tag{4}$$

$$-\phi'' + U'(\phi) = 0 \tag{5}$$

이 되고 Lagrangian에 시간도함수가 없으므로 enerygy E는

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \int dx \left\{\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi)\right\} \\ &= K.E + P.E \end{aligned} \tag{6}$$

가 되며 여기서

$$K.E = \int dx \frac{1}{2}(\phi')^2, \qquad P.E = \int dx\, V(\phi)$$

로 약식 표시를 한 것이다.

식 (5)를 부분 적분하고 식 (6)과 비교를 하면 다음과 같은 조건들이 얻어진다.

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 = V(\phi) \tag{7}$$

$$(K.E) = (P.E) \tag{8}$$

만약 식 (7)의 해가 $\phi_c(-\infty) = \phi_1$, $\phi_c(+\infty) = \phi_2$라는 경계조건을 만족하는 어떤 $\phi_c(x)$라면 유한한 에너지를 갖는 해의 정확한 형태는

$$\phi(x) = \phi_c(x - x_0) \text{ 또는 } \phi_c(x_0 - x) \tag{9}$$

와 같이 되어야 한다. 여기에서 x_0는 적분 상수이며, 이와 같은 형태로 쓴 이유는 해가 병진대칭성을 가져야 하고 $\phi(x) = \phi_c(x) +$ 상수 형태는 에너지를 무한하게 하기 때문이다. 경계조건을 만족하는 식 (5)의 해는 Lagranian을 극소화해서 구한 장이 되고 $E = -L$이므로 결국 에너지 식 (6)을 극소화 한다.

$\phi(x) \to \phi(x/a)$로 놓고 이때의 에너지를 $E_c(\phi_a)$라하면 $a=1$에서 E_c의 일차미분은 사라지고 이차미분은 영보다 커야 한다.

$$E_c(\phi_a) = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\phi'_a)^2 + V(\phi) \right\}$$

$$= \frac{1}{a}(K.E) + a(P.E)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} E_c(\phi_a) \mid_{a=1} = \left\{ -\frac{1}{a^2}(K.E) + (P.E) \right\} \mid_{a=1} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} E_c(\phi_a) = \frac{2}{a^3}(K.E) > 0$$

따라서 $(K.E) = (P.E)$ 조건은 에너지를 최소화하는 필요 조건임을 알 수 있다. 임의의 차원 D에서 유사한 전개를 해 보면 $D>2$인 경우에는 E_c는 최대값을 갖게되고 이에 대응하는 장은 불안정하게 된다. 3차원 이상인 경우에는 스핀이 없는 장들 이외의 다른 장들이 사용되어야만 유한하고 최소화할 수 있는 에너지를 갖는 고전적인 해들을 구할 수가 있다.

안정성에 대해서는 최소해를 갖는 경우에서 조금 벗어난 경우를 고려함으로써 알아볼 수 있다.

$$\phi(x) = \phi_c + \eta(x)e^{i\omega t} \tag{10}$$

이 식을 Lagrangian에 대입하고 위치에너지를 2차항까지 전개하면

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_c) \right\} \eta(x) = \omega^2 \eta(x) \tag{11}$$

와 같은 식을 얻을 수 있고, Schrödinger 방정식과의 유사성을 이용하여 안정성에 대해서 고찰 할 수가 있다.

식 (6)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\left.\frac{\delta^2 E_c(\phi)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi=\phi_c} = \{-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_c)\}\delta(x-y) \tag{12}$$

$\phi = \phi_c$에서 국소적으로 최소값을 갖기 위해서는 식 (12)의 고유치가 영보다 크거나 같아야 되고 따라서 $\omega^2 \geq 0$인 조건이 성립되야 안정성이 있게 된다.

식 (5)를 한번 더 미분하면 $\omega^2=0$인 특별한 경우의 해가 존재함을 알 수 있다.

$$\{-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_c)\}\phi_c' = 0 \tag{13}$$

ϕ_c'은 $\omega^2=0$인 경우에 해당하며 "병진 mode"라 한다. 안정성을 위하여 이 해가 가장 에너지가 낮은 상태이어야 하며, 그렇지 않으면 $\omega^2<0$인 해가 존재하고 결국 불안정한 해가 된다. 2차원 이상에서는 병진 mode가 각각의 공간 방향으로 존재하고 $\omega^2=0$인 상태는 축퇴되므로 가장 낮은 에너지 상태가 될 수 없다.

구체적으로 위치에너지가 주어지는 경우의 안정성은 만족하는 해를 구해보자.

$$V(\phi) = \frac{1}{2\lambda}(m^2 - \lambda\phi^2)^2 \tag{14}$$

반전대칭성($\phi \to -\phi$)는 $\phi_{1,2} = \pm m/\sqrt{\lambda}$로 주어지는 진공에서 깨어지며, 위치에너지 (14)의 특징이다.

상수가 아닌 식 (7)의 해는

$$\phi_c(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh mx \tag{15}$$

로 구해지고 이해는 에너지를 유한하게 한다.

$$E_c(\phi) = \frac{4m^3}{3\lambda} \tag{16}$$

3. 4차원 시공에서의 Vortex-like 해

전자기장과 상호작용하는 Scalar장인 경우를 고려하면 계의 Lagrangian L는 Potential장의 운동에너지 항을 포함하고 도함수 대신에 공변도함수를 포함하게 된다.

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + m^2\phi\phi^* - \lambda\phi\phi^*)^2 \qquad (1)$$

Scalar장과 gauge potertial A_μ의 변분에 의해서 장의 방정식을 구하면

$$D_\mu D^\mu\phi = m^2\phi - 2\lambda\,|\,\phi\,|^2\phi \qquad (2)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu = ie(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) + 2e^2A_\mu\,|\,\phi\,|^2 \qquad (3)$$

여기에서 j_μ는 전하류(charge current)로서 보존이 된다.
Scalar장을 크기와 위상이 구분되는 형태로 쓰고 식 (3)을 이용하면

$$\phi(x) = g(x)\,e^{i\theta} \qquad (4)$$

$$A_\mu = \frac{1}{e^2}\frac{j_\mu}{g^2} - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \qquad (5)$$

와 같은 식을 얻게되며 flux를 계산할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned}\Phi &= \int F_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} = \oint A_\mu dx^\mu \\ &= -\frac{1}{e}\oint \partial_\mu\theta dx^\mu\end{aligned} \qquad (6)$$

ϕ의 위상이 구배(gradient)에 대한 선적분은 영이 아니다.

위상에 가해지는 유일한 조건은 ϕ가 일차함수가 되도록 하는 θ이면 된다는 것이다.
이 조건하에서 한번 회전시 위상의 변화는 일반적으로 $2\pi n$이 된다(n은 정수).

따라서 flux는 이 정수 값으로 양자화 되며 기본양자는 $+2\pi/e$임을 알 수 있다.

$$\Phi = n\Phi_{\circ} = -2\pi/e \tag{7}$$

식 (4)에서 gauge 변환에 의해서 ϕ의 위상을 영으로 보낼 수 없는 경우에는 양자화된 flux가 존재하고 이것이 votex 해의 암시가 되는 것이다.

정적이고 gauge potential의 시간성분이 영이 되는 (Weyl gauge) 원통대칭 해를 생각해 보는 것이 votex 해를 구하는 상황에 적합할 것이다.

$$A(r) = \varepsilon^{i3}\frac{r^{i}z}{r^{2}}\ a(r) \tag{8}$$

여기서 ε^{ij}는 반대칭 tensor, $a(r) = |A(r)|$ 이다.

그러면 flux Φ는

$$\Phi = 2\pi a(r)\text{이 되고} \tag{9}$$

자기장은

$$B(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dr}\Phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ra(r)) \tag{10}$$

로 구해진다.

식 (4)와 식(8)을 식 (2)와 식 (3)에 대입하면 다음 방정식이 된다.

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\{r\frac{d}{dr}g(r)\} + [(\frac{1}{r} - ea(r))^{2} - 2m^{2} + 4\lambda g^{2}]g(r) = 0 \tag{11}$$

$$-\frac{d}{dr}\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ra(r))\} + g^{2}(ae^{2} - \frac{e}{r}) = 0 \tag{12}$$

이들 2개의 방정식이 정확한 해는 구해지지만, 우리의 경우에는 근사적인 해로서도 충분하다.

$$g(r) \simeq \text{상수 (매우 큰 } r\text{에 대해서)}$$

로 놓으면 식 (12)의 해는 변형 Bessel 함수 K_0, K_1을 포함한다.

$$a(r) = \frac{1}{er} + \frac{C}{e}K_{1}(egr) \tag{13}$$

$$B(r) = C\,g\,K_0(egr) \tag{14}$$

여기서는 C는 적분상수이며 경계조건을 사용해서 구할 수 있다.

매우 큰 반경 r에서 식 (13)과 (14)는

$$a(r) \sim \frac{1}{er} + \frac{C}{e}\sqrt{\frac{\pi}{2egr}}\,e^{-egr} \tag{15}$$

$$B(r) \sim C\sqrt{\frac{\pi g}{2er}}\,e^{-egr} \tag{16}$$

로 근사되고 이 식을 이용해서 g(r)를 구해보면

$$g(r) \sim \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}} \tag{17}$$

이 된다.

식 (16)에서 $\zeta\lambda = \frac{1}{er} + \sqrt{\frac{2\lambda}{e^2m^2}}$를 자기장 B가 영이 아닌 영역의 척도로서 정의 할 수 있다.

진공의 해로 부터 조금 벗어난 scalar장 $\phi(x)$를 추정하기 위해서

$$\phi(x) = v + \rho(x) \tag{18}$$

로 전개한다. 여기서 v은 진공 해이고 $\rho(x)$는 매우 작은 진공주위에서의 요동이다. 이 섭동 해에 대한 위치에너지는 일차도함수가 사라지고 2차도함수는 질량에 비례 하게 된다.

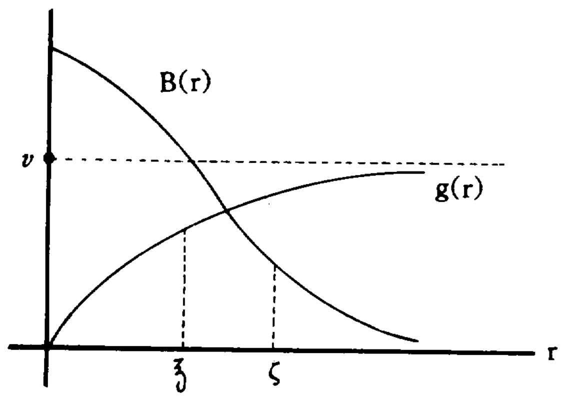
$$\begin{aligned} V(\phi) &= -m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \\ &= -m^2g^2 + \lambda g^4 \\ V(v+\rho) &= (-m^2 + 6v^2\lambda)\rho^2 + \cdots\cdots \\ &= 2m^2\rho^2 + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{19}$$

따라서 $2m^2$은 scalar입자의 질량의 곱이다.

Yukawa-형의 해를 고려하면

$$\rho \sim \exp - \sqrt{2m^2}\ r \tag{20}$$

와 같이 주어지고 scalar장 g(r)는 $\mathfrak{z} = 1/\sqrt{2m^2}$ 정도의 거리에서 진공값이 된다. 위의 고찰을 그래프로 그려보면 해 (4)와 (8)이 votex에 해당함을 쉽게 알 수 있다.



4. 4차원 시공에서의 monopole 존재

U(1) gauge 이론에서는 monopole의 존재가 필수적인 필요가 없다. duality변환에 의해서 전기적 전하만을 포함하는 Maxwell 방정식들로 매우 훌륭히 전기적 현상들을 기술 할 수 있다.

반면에 Non-Abelian gauge이론에서는 만약 대칭성이 자발적으로 깨어진다면 반드시 monopole이 존재해야만 한다. 물론 이론의 출발점에서 monopole이 있는 것이 아니라 처음에 없던 것이 Non-Abelian 특성과 대칭성이 깨어짐의 결과로서 나타나는 것이다. 따라서 이 두가지 특성 모두가 자연의 법칙이라면 monopole은 존재해야 하는 것이다.

O(3) 대칭성을 갖는 계의 Lagrangian은

$$L = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) + \frac{1}{2}m^2\phi^a\phi - \lambda(\phi^a\phi^a)^2 \tag{1}$$

으로 여기서 지수 a는 O(3)지수로서 a=1, 2, 3을 취한다.

식 (1)로부터 Euler-Lagrsnge 방정식을 유도하고, 정적인 해를 유추해 보면 다음과 같은 형태의 해가 있음을 알 수 있다.

$$A^a_i + -\varepsilon_{iab}\frac{r^b}{er^2} \qquad r \to \infty \tag{2}$$

$$A^a_0 + 0 \text{ (weyl gauge)}$$

$$\phi^a = vr^a/r \qquad r \to \infty \tag{3}$$

여기서 $v^2 = m^2/4\lambda$

이들 표현식들은 공간지수들과 isospin지수들이 서고 섞여 있는 특별한 형태들임을 명심해야 한다. scalar장에 대한 장 방정식은

$$D_\mu D^\mu\phi^a = (m^2 - 4\lambda\phi^b\phi^b)\phi^a \tag{4}$$

으로서 매우 큰 반경에서 (2)와 (3)이 이 식을 만족함을 쉽게 확인할 수 있다.따라서 무한점에서 $\phi(x)$는 진공값을 취하게 된다. $F_{\mu\nu}$의 정의를 일반화해서 $\phi^a(x)$가 isospin 공간에서 세번째 축을 향할 때 보통의 정의식이 되도록 하자.

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{|\phi|} \phi^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{e|\phi|^3} \varepsilon_{abc} \phi^a (D_\mu \phi^b)(D^\nu \phi^c) \tag{5}$$

gauge potential A_μ를 다음과 같이 정의 하면

$$A_\mu = \frac{1}{|\phi|} \phi^a A_\mu^a \tag{6}$$

식 (5)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e|\phi|^3} \varepsilon_{abc} \phi^a (\partial_\mu \phi^b)(\partial_\nu \phi^c) \tag{7}$$

이 되고 위에서 고찰한 점근해들을 이용해서 식(7)은 다음과 같이 구해진다.

$$F_{oi} = 0, \qquad F_{ij} = -\frac{1}{er^3} \varepsilon_{ijk}\, r^k \quad (8$$

이에 대응하는 자기장은

$$B_K = \frac{r^k}{er^3} \tag{9}$$

로서 자기 flux Φ값을 나타낼 수 있고, 여기에서 monopole이 존재함을 알 수 있다.

$$\Phi = \frac{4\pi}{e} \quad \rightarrow ge = 1 \tag{10}$$

여기서 g는 monopole 전하크기이며 g=1/e 값은 U(1) gauge 이론의 값의 2배에 해당한다. 이것은 U(1)군과 O(3)군과의 위상학적 차이에 기인하는 것으로 위상 수학의 Homotopy군을 이용해서 쉽게 보일 수 있다.

5. 4차원에서 순간자(instanton)

4차원 Euclidean공간에서 Yang-Mills장의 작용 S(A)는

$$S(A) = +\frac{1}{2}\int d^4x \ \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}\ F^{\mu\nu})$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^4x \ F^a_{\mu\nu}\ F^{\mu\nu}_a \qquad (1)$$

로서, SU(2) 대칭성을 갖는 특별한 경우를 생각해 보기로 하자. 위의 작용에서

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^a T^a \qquad (2)$$

$$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \qquad (3)$$

$$\mathrm{tr}\ T^a T^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab} \qquad (4)$$

로 주어진다.

쌍대장 $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\ F^{\alpha\beta}$를 도입하고
다음의 부등식을 조사해 보기로 하자

$$\int d^4x \ \mathrm{tr}\,[F_{\mu\nu} \pm \widetilde{F}_{\mu\nu}]^2 \geq 0 \qquad (5)$$

$$\int d^4x \ \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \geq \left| \int d^4x \ \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} \right| \qquad (6)$$

식 (6)의 우변은 발산으로 씌여 질 수 있기 때문에 작용에 더하더라도 운동방정식에는 아무런 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

$$\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \Omega^\mu \qquad (7)$$

$$\Omega_\mu = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,[A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma] \qquad (8)$$

매우 큰 반경에서 진공해를 갖고 에너지가 유한 하기 위해서는

$$F^a_{\mu\nu} \rightarrow 0 \qquad |x|^2 \rightarrow \infty \text{ 일 때} \tag{9}$$

가 되어야 한다. 따라서 gauge potential A_μ는 순수한 gauge형태을 취한다.

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}(x)\, \partial_\mu U(x), \qquad |x|^2 \rightarrow \infty \text{ 에서} \tag{10}$$

여기서 U(x)는 SU(2)군의 원소로서 SU(2)군은 위상학적으로 S^3와 동등하기 때문에 결국 $|x|^2 \rightarrow \infty$인 부근에서의 해의 특성을 조사하는 것은 S^3에서 S^3로의 사상의 동형류(homotopy class)들 연구하는 것과 같게 된다. 이 경우의 사상은 "winding number"라는 정수에 의해 분류된다.

가장 간단한 1－1 대응관계 (winding number＝1)에서 $U(x)$는

$$U(x) = \frac{1}{r}(x_4 + ix\sigma), \; r^2 = x_4^2 + x^2 \tag{11}$$

로 주어지고 여기서 σ는 pauli 행렬이다.

식 (10)에 이 식을 대입하면

$$A^a_i = 2(x_4\delta_{ai} + \varepsilon_{aij}x_j)/r^2 \tag{12}$$

$$A^a_4 = -2x_a/r^2 \tag{13}$$

이 되고 이로부터 식 (6)에 대한 간단한 형태를 구할 수 있다.

$$\int d^4x \; \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \int d\sigma^\mu \Omega^\mu = 16\pi^2 \tag{14}$$

Winding number가 n인 일반적인 경우에 식(14)의 표현은 n에 비례하게 된다.

$$\int d^4x \; \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 16\pi^2 n \tag{15}$$

결국 작용 S(A)는

$$S(A) \geq 8\pi^2 n \tag{16}$$

으로서 쌍대관계식을 만족하는 $F_{\mu\nu}$인 경우에 등호가 성립되고 이때 작용은 국소적으로 극소가 된다.

$$F^a_{\mu\nu} = \pm \widetilde{F}^a_{\mu\nu} \tag{17}$$

이 쌍대관계식은 일차미분방정식이고 이 방정식의 해를 구하면

$$A_i^a = \frac{2}{r^2+\lambda^2}(x_4\delta_{ai} + \varepsilon_{aij}x_j) \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{18}$$

로 주어지며 4차원 시공에서 공간적으로, 시간적으로 국소화된 순간자(instanton)가 존재하게 된다. 식(18)에서 λ는 순간자의 크기정도를 나타내는 양이다.

6. 3차원에서 Self-Dual chern-Simons 해

유한에너지를 갖는 또하나의 모델은 계의 Lagrangian이 Maxwell 장 또는 Yang-Mills장에 해당하는 $-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F_{a}^{\mu\nu}$ 대신에 Chern-Simons항을 포함하는 경우이다.

3차원에서 U(1) 대칭성을 내포하며 재규격화가 가능한 대칭성 파괴를 일으키는 potential은 ($|\phi| = v$에서 극소)

$$V(\phi) = \frac{e^4}{\kappa^2}|\phi|^2(|\phi|^2 - v^2)^2 \tag{1}$$

으로 Bogomol'nyi 극한을 이 potential로부터 얻을 수 있다.

작용 S는 Chern-Simon항을 포함하는 형태로

$$S = \int d^4x\,[(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha F_{\beta\gamma} - V(\phi)] \tag{2}$$

다음의 운동방정식들이 이로부터 유도된다.

$$D_\mu D^\mu\phi = -\partial V/\partial\phi\}^* \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\kappa\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma} = j^\alpha \tag{4}$$

여기에서 $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ 이고

$j_\mu = ie(\phi^* D_\mu\phi - \phi D_\mu\phi^*)$로서

보존되는 전류 밀도이다.

에너지-운동량 tensor는 계량 tensor를 변분해서 (2)로 부터 얻어진다.

$$T_{\mu\nu} = D_\mu\phi^* D_\nu\phi + D_\mu\phi D_\nu\phi^* - g_{\mu\nu}[(D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi)] \tag{5}$$

시간-시간 성분(T_{00})을 적분하면 에너지가 얻어지고 식 (4)로 부터 A_μ를 구해서 이 에너지 식에다 대입해서 다시 쓰면

$$E = \int d^2r\ T_{00} = \int d^2r[(D_0\phi)^* (D_0\phi) + |D\phi|^2 + V(\phi)]$$
$$= \int d^2r\ [(\partial_0\phi)^2 + \frac{\kappa^2 B^2}{4e^2|\phi|^2} + |D\phi|^2 + V(\phi)] \tag{6}$$

가 된다. Bogomol'nyi 극한을 쉽게 볼 수 있도록 식(6)을 바꿔 쓰면

$$E = \int d^2r \{ |(D_1 + iD_2)\phi|^2 + \frac{\kappa}{2e}\phi^{-1}B \mp \frac{e^2}{\kappa}\phi^*(v^2 - |\phi|^2)|^2$$
$$\pm (\partial_0\phi)^2 \pm ev^2\Phi \pm \frac{1}{2}\oint_{r\to\infty} - d\boldsymbol{\ell}\cdot J\} \tag{7}$$

로 Φ는 flux이고 괄호 속의 마지막 항은 국소화된 전류밀도에 대해서 사라진다.
식 (7)로부터 에너지의 하한 경계치는 다음과 같다.

$$E \geq ev^2|\Phi| \tag{8}$$

정적인 장에 대해서 생각하면 Lagrangian을 stationary하게 하는 점은 에너지도 stationary하게 하므로 Euler-Lagrange 방정식들은 정적인 경우에 식(7)을 최소로 하는 방정식들이 될 것이다.

따라서 Self-Duality 방정식들이 얻어진다.

$$D_1\phi = \mp i D_2\phi \tag{9}$$

$$eB = \pm\frac{m^2}{2}\frac{|\phi|^2}{v^2}(1 - \frac{|\phi|^2}{v^2}) \tag{10}$$

Vorticity가 n이고 정적이며 회전대칭성을 갖는 장들에 대해서 고찰해 보자.

$$\phi = vg(r)\,e^{in\varphi}, \qquad g(r) \text{ 은 실수} \tag{11}$$

$$eA^i = \varepsilon^{ij}\frac{\hat{r}^j}{r}\ [a(r) - n] \tag{12}$$

이 식들을 식(10)에 대입하면

$$E = 2\pi v^2\int_0^\infty drr\ \{(g')^2 + \frac{ag}{r})^2 + (\frac{a'}{mrg})^2 +$$

$$+\frac{1}{4}m^2g^2(1-g^2)^2\} \tag{13}$$

이 되고 self-duality 방정식 (9)와 (10)은

$$g^1 = \pm\frac{ag}{r} \tag{14}$$

$$\frac{a^1}{r} = \pm\frac{m^2}{2}g^2(-1+g^2) \tag{15}$$

로 원점에서 장들이 non-singular 해야 한다는 경계조건을 갖는다. 이 두식을 결합하는

$$(\ln g^2)'' + \frac{1}{r}(\ln g^2)' = -m^2g^2(1-g^2) \tag{16}$$

으로 되고 작은 값의 g인 경우를 가정하면 g^4 항은 무시할 수 있고, 이 경우 방정식 (6)은 Liouville 방정식의 회전대칭성을 갖는 형태가 된다. 이때의 해는

$$g(r) = \frac{\sqrt{8}N}{mr}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^N + \left(\frac{r_0}{r}\right)^N\right]^{-1}, \qquad r_0,\ N\text{은 임의의 상수} \tag{17}$$

로서 식 (14)를 이용해서 a(r) 역시 구해지며 이들 해는 에너지가 Bogomol'nyi 극한값을 갖도록 한다.

7. 결　　론

Scalar 장들로만 구성된 2차원 계에서 정적이고 에너지를 유한하게 하는 안정된 해가 존재하며 3차원 이상에서는 그러한 해가 존재하질 않는다. 따라서 3차원 이상의 경우에는 Scalar 장들이외의 다른 장들이 Lagrangian에 포함되어야 한다. 3차원, 4차원에서 Ableian 그리고 Non-Abelian 장들을 포함하는 경우 유한에너지를 주는 해가 존재하며 3차원인 경우는 votex, 4차원인 경우는 monopole 해가 구해진다.

Non-Abelian인 경우 대칭성이 자발적으로 깨어지는 모델에서는 monopole이 존재해야 함을 알 수 있고, 이 때 monopole 전하의 크기는 고려하는 대칭성군에 따라 다르다. Maxwell 장들 대신에 Lagrangian에서 chern-simon항을 넣었을 때 Self-duality 방정식을 만족하는 해가 존재하며 이때 에너지는 Bogomol'nyi 극한 값을 갖는다.

참 고 문 헌

1. J. Goldstone and R. Jackiw, phys. Rev. Dll, 1486(1975).
2. H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl, phys. B 61, 45 (1973)
3. G.'thooft, Nucl. Phys. B 79, 276(1974)
   A. M. Polyakov, ZhETR Pis. Red. 29, 430(1974)
4. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, phys, Lett. 59B, 85(1975), G.'tHooft, phys. Rev. Lett, 37, 8(1976)
5. R. Jackiw, Kimyeong Lee, E. J. Weinberg, phys. Rev, D 42, 3488(1990)