方程式의 解들의 近似的 推定

金 大 元* · 高 鳳 秀**

Approximations of Solutions of Equations

Kim, Dae-Won, Ko, Bong-soo

Abstract

In this paper approxiamations of solutions of the cubic equation

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0,$$

a system of some equations and the equation of 5th order

$$x^5 + x + 1 = 0$$

are obtained by the perturbation method which is used to get approximate solutions of perturbed differential equations.

* 제주제일고등학교

* * 제주대학교 사범대학 수학교육과

Ⅰ. 序　　論

中學校 또는 高等學校 敎育現場에서 나타나는 方程式(equation)들을 考察해 볼 대 大部分의 方程式들의 係數(coefficient)들은 簡單한 整數(integer)들로 이루어 지고, 學習者(學生)들은 그러한 方程式의 解(solution)의 計算方法을 익히게 된다.

本 著者의 見解에서 學習者들을 觀察할 때 學習者들이 日常 익혀온 方程式의 形態와 若干 다른 形의 方程式들, 例를 들면 方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0$$

을 學習者들이 만난다면 위 方程式의 解를 求할 수 있다는 自信感을 學習者들이 느낄 수 있을 지 疑問스럽다. 學習者들은 "方程式의 解를 求한다"라는 目的을 前提條件으로 하고 問題를 풀기 때문에 위 方程式을 푼다는 것은 쉽지 않다고 大部分 생각하리라 본다. 萬若 위 方程式이 日常生活에 關聯되어 있고 그 解들은 매우 重要한 事實을 說明한다고 假定하면 위 方程式은 人間들이 어떤 現像을 類推 解釈하여 이루어진 것이기 때문에 그 現像을 위 方程式에 依하여 完璧하게 說明하였다고 볼 수 없고, 따라서 그 解들도 그러한 重要한 事實을 正確하게 說明한다고 볼 수가 없다. 그러면 모든 事實들이 近似的인 關係로 맺어져 있기 때문에 위 方程式의 解를 近似的으로 求하여도 그 重要한 事實을 說明하는데 無理는 아니라고 생각하는 것이 通念이다. 特히 學習者들이 이러한 觀點을 느낌으로써 日常生活에서 일어나는 여러가지 事物의 現像을 數理的, 論理的으로 思考하고 問題를 合理的으로 處理할 수 있는 態度와 能力을 기를 수 있다고 본다.

方程式의 近似的 解를 求하는 方法에는 區間二等分法(half-interval search method), 斜線法(secant method), 固定點逐次法(fixed-point iteration), Newton-Raphson方法, 漸近的 擴張法 等 여러가지가 있는데 이들 方法의 共通되는 點은 中間値整理(intermediate value theorem)를 利用하여 根이 存在하는 區間을 確認한 後 區間 內에 있는 任意의 한 點을 近似根으로 取해 適當한 方法에 따라 참 根에 接近시켜 간다는 點이다.

本 論文에서는 攝動微分方程式論(perturbed differential equation)에서 使用되는 攝動方法(perturbation method)을 利用해 一般的인 方程式의 解들을 近似的으로 推定

하고 여러가지 問題點을 提起하고자 한다.

本 論文의 II에서는 攝動微分方程式

$$y'' = \epsilon f(x)y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

을 紹介하고 그 方程式의 解를 찾는데 利用되는 攝動方法을 紹介한다.

III에서는 三次方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0$$

의 解를 近似的으로 求하는 過程에서 攝動方法을 利用하여 近似的인 解를 計算하고 그 誤差(error)를 求하며 또한 주어진 三次方程式을 三次方程式의 一般的인 解法, 卽 카르다노(Cardano)의 方法으로 그 解을 求하여 攝動方法을 利用한 近似的인 解와 比較한다.

IV에서는 三元二次聯立方程式

$$\begin{aligned} x^2 + x + y + 2u &= 1 \\ 2x + y - y^2 + u &= 0 \\ x + 2y + u + u^2 &= 1 \end{aligned}$$

의 解을 近似的으로 求한다.

마지막 V에서는 五次以上인 方程式의 解들을 求하는 方法은 一般的으로 公式化 되어 있지 않으나 次數(order)가 흘수인 境遇에서 中間值定理에 의하면 그 方程式들은 적어도 하나의 實根을 갖는다는 事實을 알 수 있으므로, 五次方程式

$$x^5 + x + 1 = 0$$

의 解를 近似的으로 求한다.

위에서 나타나는 計算過程들은 特殊한 方程式 또는 聯立方程式에서 이루어지고 있지만, 簡單한 몇 가지 條件들만 갖춘다면 모든 形態의 方程式 또는 聯立方程式에도 그 方法들은 適用 可能하다.

II. 攝動微分方程式의 紹介

攝動微分方程式에서 使用되는 攝動方法은 작은 媒介變數(parameter) ε을 包含하는 問題들에 대한 近似的인 解를 얻기 위하여 反復的으로 施行하는 過程이다. 例를 들면, 다음과 같은 初期値 問題(inital-value problem)

$$y'' = f(x)y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

(단, $f(x)$는 連續函數(continuous function) 이다.)
을 紹介한다. 위의 方程式은 $f(x)$가 特殊한 形態를 갖는 境遇를 除外하고는 方程式의 解를 適切한 形態로 表現할 수 없다. 그러나 媒介變數 ε을 갖는 微分方程式

$$y'' = \varepsilon f(x)y \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

로 고쳐서 常數(constant) ε이 0과 1사이에서 變數(variable)로 取扱한다면 위의 微分方程式은 1개의 微分方程式이 아니고 無限(uncountable)개의 微分方程式으로 생각할 수 있다. 媒介變數 ε이 변함에 따라 解들의 형태와 關聯性을 研究하는 것은 攝動以論(perturbation theory)이라 하고 媒介變數 ε을 갖는 微分方程式을 攝動微分方程式이라고 한다· 위의 攝動微分方程式의 解는 ε에 따라 변하기 때문에 다음과 같은 攝動擴張(perturbation expantion)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$$

으로 表現되고 各 項別로 微分할 수 있다고 假定하면 $y''(x)$를 다음과 같이 얻는다.

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n''(x)$$

$y(x)$와 $y''(x)$의 攝動擴張 形態를 攝動微分方程式에 代入(substitution)하면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n''(x) = \varepsilon f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$$

이 되고, 위의 等式(equality)이 滿足되려면, $y_n(n = 1, 2, \cdots\cdots)$들은 다음 微分方程式

$$y_0''(x) = 0 \qquad y_0(0) = 1 \qquad y_0'(0) = 1$$
$$y_n''(x) = f(x)y_{n-1}(x) \qquad y_n(0) = y_n'(0) = 0 \quad (n > 1)$$

을 滿足하여야 한다. 여기서 간단히

$$y_0(x) = x + 1$$

임을 알 수 있다.

$y_1(x)$는 다음 微分方程式

$$y_1''(x) + f(x)y_0(x) + f(x)(1+x)$$
$$y_1''(0) + y_1'(0) = 0$$

의 解이다. 따라서

$$y_1(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s)(1+s)\ ds$$

가 되며 一般的으로 $y_n(x)$는

$$y_n(x) = \int_0^x dt \int_0^t f(s)y_{n-1}(s)\ ds$$

가 된다. 그러므로

$$y(x) = (1+x) + \varepsilon\int_0^x dt \int_0^t f(s)(1+s)\ ds + \varepsilon^2\int_0^x dt \int_0^t f(s)ds \int_0^s dv$$
$$\times \int_0^v f(u)(1+u)du + \cdots\cdots$$

가 된다. 만일 常數 k가 區間(interval) $0 < |t| < |x|$ 上에서 函數 $|f(t)|$의 上界(upper bound)라고 하면, $y(x)$의 n번째 項의 絶對値(absolute value)는 $\varepsilon^{n-1}K^{n-1}\{(x^n/n!) + (x^{n+1}/(n+1)!)\}$보다 작다. 따라서 $y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x)$ 는 모든 x에 대하여 收斂(convergence)하므로 위의 攝動方程式의 解가 媒介變數 ε에 따라서 解들의 形態 및 關聯性을 研究할 수 있다.

위의 方法은 작은 媒介變數를 갖지 않은 어려운 問題에 人爲的으로 媒介變數 ε을 導入하여 媒介變數 ε을 갖는 問題(perturbed-problem)로 바꾸어서 그 問題를 解決하고 原來 주어진 問題를 풀기 위하여 작은 媒介變數 ε을 1로 바꾸면 解의 妥當性(validity) 與否를 確認할 수 있다. 왜냐하면 ε=1일 때

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

는 初期値 問題의 解가 되기 때문이다.

攝動方法은 매우 어려운 問題를 그 問題와 關聯된 매우 쉬운 無限 個의 問題로 分離하고, 첫 번째, 두 번째, 또는 세번째까지만 計算하여 近似的인 解를 求하여도 그 解들의 重要한 性質들을 說明할 수 있다는 것이 攝動微分方程式論에서의 一般的인 觀點이다.

III. 三次方程式의 解의 近似的 推定

三次方程式

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0 \tag{1}$$

의 解을 攝動方法에 依하여 近似的으로 推定해 보면, 方程式(1)은 媒介變數 ε이 없기 때문에 攝動問題는 아니지만, 다음과 같이 人爲的으로 ε을 導入하여, 三次方程式의 媒介變數群(one-parameter family)

$$x^3 - (4 + \varepsilon)x + 2\varepsilon = 0 \tag{2}$$

을 만든다. 여기서 ε=0.001라 하면, 方程式(2)는 方程式(1)이 된다.

學習者들은 方程式(1)보다 오히려 方程式(2)가 더 익숙하게 보이고, 方程式(2)의 解決 可能性이 더 많을 것이라고 여긴다. 마찬가지로 方程式(1)의 近似的인 解를 求하는 것보다 方程式(2)의 近似的 解를 求하는 것이 더 쉽게 느껴진다. 그 理由는 方

程式(2)의 解들은 ε을 變數(variable)로 갖는 函數 $x(\varepsilon)$이라고 생각되고, $x(\varepsilon)$은 ε에 관한 攝動級數(pertubation series)

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \qquad (a_n\text{은 常數}) \tag{3}$$

로 表現할 수 있다고 家庭할 수 있기 때문이다. 그러면 攝動級數(3)을 方程式(2)에 代入하여 다음 式을 얻는다.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n\right)^3 - (4+\varepsilon)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n\right) + 2\varepsilon = 0 \tag{4}$$

攝動級數(3)의 첫째 項 a_0을 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法(method of indeter minate coefficients)을 使用하면

$$a_0^3 - 4a_0 = 0 \tag{5}$$

을 얻고, 方程式(5)를 풀면 $a_0 = -2, 0, 2$를 얻는다. 여기서 $-2, 0, 2$들을 方程式(2)의 零번째 近似的 解(zeroth-order perturbation approximation)라고 부른다.

攝動級數(3)의 두번째 項 a_1을 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法을 使用하고 $a_0 = -2$라고 하면

$$12a_1 - 4a_1 + 4 = 0 \tag{6}$$

을 얻고, 方程式(6)을 풀면

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

을 얻는다. 여기서 $a_0 = -2$와 $a_1 = -1/2$을 使用하여 얻은

$$x = -2 - -\frac{1}{2}\varepsilon$$

을 方程式(2)의 첫 번째 近似的 解(the first-order perturbation approximation)라고 부른다.

攝動級數(3)의 세 번째 項 a_2를 얻기 위하여 式(4)에서 未定係數法을 使用하여 $a_0 = -2$, $a_1 = -1/2$을 代入하면

$$8a_2 - a_1 - 6a_1^2 = 0 \tag{7}$$

을 얻고 方程式(7)을 풀면

$$a_0 = \frac{1}{8}$$

을 얻는다. 여기서 $a_0 = -2$, $a_1 = -1/2$, $a_2 = 1/8$을 使用해서 얻은

$$x = -2 - -\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \tag{8}$$

을 方程式(2)의 두 번째 近似的 解(the second-order perturbation approximation)라고 부른다.

두 번째 近似的 解 x와 方程式(2)의 解와의 誤差를 計算하기 위하여 近似的 解(8)을 方程式(2)에 代立하면

$$(-2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2)^3 - (4+\varepsilon)(-2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2) + 2\varepsilon = 0$$

이 되고, 그 誤差는

$$\frac{1}{2}\varepsilon^3 - \frac{3}{128}\varepsilon^5 + \frac{1}{8^3}\varepsilon^6$$

이다. 따라서 方程式(1)의 近似的 解는 $\varepsilon = 0.001$이므로

$$\begin{aligned} x &= -2 - \frac{1}{2} \times 0.001 + \frac{1}{8} \times 0.001^2 \\ &= -2.00049875 \end{aligned}$$

이고, 誤差는

$$\frac{1}{2}\times 0.001^3 - \frac{3}{128}\times 0.001^5 + (\frac{1}{8})^3 + 0.001^6$$

$$< \frac{1}{2}\times 10^{-9}$$

인데, 이것은 近似的인 解 x가 갖는 誤差는 많아야 $1/2\times 0.001^3$임을 뜻한다.

위에서 얻은 방법과 마찬가지로 零 번째 近似的인 解 *0*과 *2*를 使用하여 方程式(*2*)의 나머지 *2*개의 近似的인 解를 計算할 수 있고, 近似的 解들이 갖는 誤差들도 計算된다.

한편, 三次方程式의 一般的인 解法에 의해서 方程式(*1*)의 解를 求하여 위에서 求한 近似的인 解와 比較하기 위하여 우선 三次方程式의 一般的인 解法을 紹介한다.

三次方程式

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{9}$$

에서

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \qquad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad S = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

이라 하면, 方程式(9)의 解는 다음과 같다.

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3(S-T)}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3(S-T)} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

여기서 a_1, a_2, a_3가 實數이고 判別式(discriminant) $D = Q^3 + R^2$이라 하면

(1) $D>0$일 때 한 개의 實根과 두 개의 켤레 複素數(complex conjugate)를 根으로 갖는다.

(2) $D=0$일 때 세 개의 實根을 갖는데 적어도 두 개의 根은 같다.

(3) $D<0$일 때 서로 다른 세 개의 實根을 갖는다.

만약 $D<0$이면 三角法(trigonometry)을 使用하여 간단하게 다음과 같이 解를 求할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) - \frac{1}{3}a_1 \\
x_2 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120°\right) - \frac{1}{3}a_1 \qquad (10) \\
x_3 &= 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240°\right) - \frac{1}{3}a_1 \qquad \text{단, } \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}
\end{aligned}
$$

이제 三次方程式의 一般的인 解法에 依하여 方程式(1)의 解를 求하는데, 여기서 使用한 計算機는 scientific calculator Casio-500 S(10-digits)이다.

方程式(1)에서 $a_1 = 0$, $a_2 = -4.001$, $a_3 = 0.002$이므로

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} = -1.333666667$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} = -0.001$$

이고, $D = Q^3 + R^2 = -2.372147592$이다. $D<0$이므로 方程式(1)은 서로 다른 세 實根을 갖는다.

式(10)을 利用하여 解를 求하면

$$\theta = \cos^{-1}\frac{R}{\sqrt{-Q^3}} = \cos^{-1}(6.492755594 \times 10^{-4}) = (89.963)°$$

이고,

$$\frac{\theta}{3} = (29.98766667)°$$

가 된다. 따라서

$$\cos\frac{\theta}{3} = 0.866133012$$

$$\cos(\frac{\theta}{3}+120°) = -0.865917755$$

$$\cos(\frac{\theta}{3}+240°) = -0.2152572146\times 10^{-3}$$

이므로 三次方程式(1)의 세 根 X_1, X_2, X_3는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta) = 2.000498527 \\
x_2 &= 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta+120°) = -2.00000135 \\
x_3 &= 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}+240°) = -0.0004971773787
\end{aligned}
\tag{11}
$$

여기서 解(11)의 x_2를 方程式(1)에 代入하여 誤差를 求하면

$$(-2.00000135)^3-4.001\times(-2.00000135)+0.002$$
$$= 3.9892013\times 10^{-3}$$

인데 攝動方法에 의한 두 번째 近似的인 解가 갖는 誤差가 많아야 $1/2\times 10^{-9}$과 比較해 볼 때 攝動方法에 의한 近似的인 解가 얼마나 正確한지를 알 수 있다.

Ⅳ. 聯立方程式의 解의 近似的 推定

다음은 聯立方程式의 解를 近似的으로 推定하여 計算하는 것이다.

$$
\begin{aligned}
&x^2+x+y+2u = 1 \\
&2x+y-y^2+u = 0 \\
&x+2y+u+u^2 = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

聯立方程式(12)의 近似的인 解를 推定하기 위하여 다음과 같이 攝動問題로 바꾼다.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon x^2+x+y+2u=1 \\
&2x+y-\varepsilon y^2+u=1 \\
&x+2y+u+\varepsilon u^2 = 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

聯立方程式(13)의 解들은 攝動級數

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \quad y(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon^n \quad u(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$$

으로 表示된다고 假定하고 그 解들을 聯立方程式(13)에 代入하면

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n\right] + 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n\right] = 1 \\
&2\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n\right] - \varepsilon\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n\right] = 0 \qquad (14) \\
&\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n\right] + 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n\right] + \varepsilon\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varepsilon^n\right]^2 = 0
\end{aligned}$$

을 얻는다.

零 번째 近似的인 解를 얻기위하여 方程式(14)에서 未定係數法을 利用하면

$$\begin{aligned}
&a_0+b_0+2c_0 = 1 \\
&2a_0+b_0+c_0 = 0 \qquad (15) \\
&a_0+2b_0+c_0 = 0
\end{aligned}$$

을 얻고, 이 聯立方程式(15)를 풀면

$$a_0 = -\frac{1}{4} \quad b_0 = -\frac{1}{4} \quad c_0 = \frac{3}{4}$$

을 얻는다. 따라서 $a_0 = -1/4$, $b_0 = -1/4$, $c_0 = 3/4$은 方程式(13)의 零 번째 近似的인 解가 된다.

攝動級數들의 두 번째 項 a_1, b_1, c_1을 얻기위하여 零 번째 近似的인 解를 使用하여 式(14)를 다음과 같이 表示한다.

$$\varepsilon\left[-\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right]^2 + \left[-\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] + \left[-\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] + 2\left[-\frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] = 1$$

$$2\left[-\frac{1}{4} + a_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] + \left[-\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] - \varepsilon\left[-\frac{1}{4} + b_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right]^2 + \left[\frac{3}{4} + c_1\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right] = 0$$

$$\left[-\frac{1}{4}+a_1\varepsilon+o(\varepsilon^2)\right]+2\left[-\frac{1}{4}+b_1\varepsilon+o(\varepsilon^2)\right]+\left[\frac{3}{4}+c_1\varepsilon+o(\varepsilon^2)\right]+\varepsilon\left[\frac{3}{4}+c_1\varepsilon+o(\varepsilon^2)\right]^2=0$$

여기서 $o(\varepsilon^2)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\varepsilon^n$

未定係數法을 利用하면 다음과 같은 聯立方程式을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{4}\right)^2+a_1+b_1+2c_1=0\\&2a_1+b_1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2+c_1=0\\&a_1+2b_1+c_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=0\end{aligned}\tag{16}$$

따라서 行列(matrix)을 使用하여 다음 關係式을 얻는다.

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{16}\\\frac{1}{16}\\-\frac{9}{16}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4^3}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&-1&3\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\9\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4^3}\begin{pmatrix}13\\-27\\5\end{pmatrix}$$

그러므로 $a_1=13/4^3$, $b_1=-27/4^3$, $c_1=5/4^3$이다. 그리고

$$x_1=-\frac{1}{4}+\frac{13}{4^3}\varepsilon$$

$$y_1=-\frac{1}{4}-\frac{27}{4^3}\varepsilon$$

$$u_1=\frac{3}{4}+\frac{5}{4^3}\varepsilon$$

은 聯立方程式(13)의 첫 번째 近似的인 解이다.

마찬가지로 攝動級數들의 세 번째 項 a_2, b_2, c_2는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2a_0a_1 \\ 2b_0b_1 \\ -2c_0c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\times(-\frac{1}{4})\times\frac{13}{4^3} \\ 2\times(-\frac{1}{4})\times(-\frac{27}{4^3}) \\ -2\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4^3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{4^5}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^9}\begin{pmatrix} 83 \\ -85 \\ 27 \end{pmatrix}$$

따라서 聯立方程式(13)의 두 번째 近似的인 解는 다음과 같다.

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{13}{2^6}\varepsilon + \frac{83}{2^9}\varepsilon^2$$

$$y = -\frac{1}{4} - \frac{27}{2^6}\varepsilon - \frac{85}{2^9}\varepsilon^2$$

$$u = \frac{3}{4} + \frac{5}{2^6}\varepsilon + \frac{27}{2^9}\varepsilon^2$$

여기서 $\varepsilon=1$이라고 하면

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{13}{2^6} + \frac{83}{2^9}$$

$$y = -\frac{1}{4} - \frac{27}{2^6} - \frac{85}{2^9}$$

$$u = \frac{3}{4} + \frac{5}{2^6} + \frac{27}{2^9}$$

은 聯立方程式(12)의 近似的인 解이다. 近似的인 解의 誤差는

$$2(-\frac{1}{4})(\frac{83}{2^9}) + (\frac{13}{2^6})^2 + 2(\frac{13}{2^6})(\frac{83}{2^9}) + (\frac{83}{2^9})^2$$

$$2(-\frac{1}{4})(-\frac{85}{2^9}) + (-\frac{27}{2^6})^2 + 2(-\frac{27}{2^6})(-\frac{85}{2^9}) + (-\frac{85}{2^9})^2$$

$$2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{27}{2^9}\right)+\left(\frac{5}{2^6}\right)^2+2\left(\frac{5}{2^6}\right)\left(\frac{27}{2^9}\right)+\left(\frac{27}{2^9}\right)^2$$

들 가운데 가장 큰 값이 된다.

다음 定理(theorem)는 聯立方程式(13)의 n번째 近似的인 解를 求하는 課程에서 攝動級數들의 n번째 項을 求하는 一般的인 公式이다.

(定理) 聯立方程式(10)의 解들은 攝動級數

$$x(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varepsilon^n \qquad y(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varepsilon^n \qquad u(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varepsilon^n$$

로 表現된다고 하면, 攝動級數들의 n번째 項 a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}들은 다음과 같은 벡터 方程式(vector equation)을 滿足한다.

$n=1$일때

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n\geq 2$일때

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-2}a_k a_{n-2-k} \\ \sum_{k=0}^{n-2}b_k b_{n-2-k} \\ -\sum_{k=0}^{n-2}c_k c_{n-2-k} \end{pmatrix}$$

(證明) 聯立方程式(10)의 解들이 攝動級數

$$x(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varepsilon^n \qquad y(\varepsilon)=\sum_{n-0}^{\infty}b_n\varepsilon^n \qquad u(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varepsilon^n$$

으로 表示된다고 했으므로 그 解들을 聯立方程式(13)에 代入하여 未定係數法을 使用하면 攝動級數등의 첫 번째 項 a_0, b_0, c_0들은 다음 벡터 方程式을 滿足한다.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

같은 方法으로 하면, 攝動級數들의 두 번째 項 a_1, b_1, c_1들은 다음 벡터 方程式을 滿足한다.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_0^2 \\ b_0^2 \\ -c_0^2 \end{pmatrix}$$

마찬가지로 攝動級數들의 세 번째 項 a_2, b_2, c_2들은 다음 벡터 方程式

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(a_0a_1 + a_1a_0) \\ b_0b_1 + b_1b_0 \\ -(c_0c_1 + c_1c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{1} a_k a_{1-k} \\ \sum_{k=0}^{1} b_k b_{1-k} \\ -\sum_{k=0}^{1} c_k c_{1-k} \end{pmatrix}$$

을 滿足하고, 또한 攝動級數들의 네 번째 項 a_3, b_3, c_3들은 다음 벡터 方程式

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -(a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_1) \\ b_0b_2 + b_1b_1 + b_2b_1 \\ -(c_0c_2 + c_1c_2 + c_2c_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{2} a_k a_{2-k} \\ \sum_{k=0}^{2} b_k b_{2-k} \\ -\sum_{k=0}^{2} c_k c_{2-k} \end{pmatrix}$$

을 滿足하므로 一般的으로 攝動級數들의 n번째 項 a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}들은 다음 벡터 方程式을 滿足할 것이다.

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-2-k} \\ \sum_{k=0}^{n-2} b_k b_{n-2-k} \\ -\sum_{k=0}^{n-2} c_k c_{n-2-k} \end{pmatrix}$$

(단, $n \geq 2$)

(參考) 위 定理는 特殊한 聯立方程式(13)에 關係된 內容이지만 計算上의 複雜性을 勘案한다면 一般的인 形態의 聯立方程式에도 위 定理의 方法을 적용할 수 있다. 그러나 近似的인 解를 求하는 過程에서 零 번째 近似的인 解는 반드시 存在하여야 한다. 즉 非攝動問題(unperturbed problem)을 攝動問題로 바꿀 때, $\epsilon=0$인 媒介경우에 解가 存在하도록 變數 導入하여야 한다.

V. 五次方程式의 解의 近似的 推定

다음은 五次方程式

$$x^5+x+1=0 \tag{17}$$

의 解들을 近似的으로 推定하는 것이다.

위 五次方程式(17)의 近似的인 解를 推定하기 위하여 먼저 다음과 같은 攝動問題로 바꾼다.

$$x^5+\epsilon x+1=0 \tag{18}$$

여기서 方程式(18)의 解들은 攝動級數

$$x(\epsilon)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n\epsilon^n$$

로 表示된다고 假定하고 그 解들을 方程式(18)에 代入하면

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\epsilon^n\right)^5+\epsilon\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\epsilon^n\right)+1=0 \tag{19}$$

을 얻는다. 方程式(19)에서 未定係數法을 利用하여 零 번째 近似的인 解를 求하면

$$x_0=-1$$

을 얻고, 攝動級數들의 두 번재 項 x_1을 얻기 위하여 方程式(19)를 다음과 같이 表示한다.

$$(-1+x_1\varepsilon+o(\varepsilon^2))^5+\varepsilon(-1+x_1\varepsilon+o(\varepsilon^2))+1=0$$

을 얻는다. 여기서 $o(\varepsilon^2)=\sum_{n=2}^{\infty}x_n\varepsilon^n$이다. 多項定理(multinominal theorem)에 依해서

$$(-1+x_1\varepsilon+o(\varepsilon^2))^5=\sum_{p,\ q,\ r}\frac{5!}{p!q!r!}(-1)^p(x_1\varepsilon)^q(o(\varepsilon^2))^r$$

(단, p, q, r은 p+q+r=5인 음이 아닌 정수)

로, 表示된다.

따라서 $(-1+x_1\varepsilon+o(\varepsilon^2))^5$의 展開式에서 ε의 係數는 p=4, q=1, r=0일 때이므로

$$\frac{5!}{4!1!}(-1)^4x_1=5x_1$$

이다. 方程式(19)에서 未定係數法에 依하여

$$5x_1+x_0=0$$

을 滿足하고, $x_0=-1$을 代入하면

$$x_1=\frac{1}{5}$$

이다. 따라서 方程式(18)의 첫 번째 近似的인 解는

$$x=-1+\frac{1}{5}\varepsilon$$

이다. 攝動級數들의 세 번째 項 x_2를 얻기 위하여 方程式(17)을 다음과 같이 表示한다.

$$(-1+\frac{1}{5}\varepsilon+x_2\varepsilon^2+o(\varepsilon^3))^5+\varepsilon(-1+\frac{1}{5}\varepsilon+x_2\varepsilon^2+o(\varepsilon^3))+1=0$$

여기서 $o(\varepsilon^3)=\sum_{n=3}^{\infty}x_n\varepsilon^n$ 이다. 위와 마찬가지로 多項定理를 利用하면

$$(-1+\frac{1}{5}\varepsilon+x_2\varepsilon^2+o(\varepsilon^3))^5$$

의 展開式에서 ϵ^2의 係數는

$$\frac{5!}{4!1!}(-1)^2 x_2+\frac{5!}{3!2!}(-1)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$=5x_2-\frac{2}{5}$$

이다. 따라서 方程式(19)에서 未定係數法에 依하여

$$\left(5x_2-\frac{2}{5}\right)+x_1=0$$

이므로 $x_2=\frac{1}{5^2}$

이고, 方程式(18)의 두 번째 近似的인 解는

$$x=-1+\frac{1}{5}\epsilon+\frac{1}{5^2}\epsilon^2$$

이 된다. 마찬가지 方法으로 攝動級數들의 네 번째 項 x_3을 計算하여 세 번째 近似的인 解를 求하면

$$x=-1+\frac{1}{5}\epsilon+\frac{1}{5^2}\epsilon^2+\frac{1}{5^3}\epsilon^3 \tag{20}$$

이 된다. 여기서 近似的인 解(20)에서 $\epsilon=1$이라고 하면

$$x=-1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}=-0.752$$

은 五次方程式(17)의 近似的인 解이며 그 誤差는

$$(-0.752)^5+(-0.752)+1=0.00751432991$$

이다.

五次方程式(17)의 n번째 近似的인 解를 求하는 過程에서 攝動級數 $x(\epsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\epsilon$의 n번째 項 $a_{n-1}(n\geq 2)$을 求하는 一般的인 公式을 誘導하기 위해서 먼저 다음과 같은 定義(Definition)가 必要하다.

(定義)陰이 아닌 整數를 元素(element)로 갖는 m×n行列 $A=\langle a_{ij}\rangle$가 다음을 滿足한다고 하자

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}=5 \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{n}(j-1)a_{ij}=n-1 \quad (n\geq 2)$$

여기서 行列 A와 벡터 $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$의 새로운 결합을 다음과 같이 定義한다.

$$A*\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\frac{5!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{in}!}(x_0)a_{i1}(x_1)a_{i2}\cdots(x_{n-1})a_{in}$$

(參考)

$A*\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ 은 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x_n\varepsilon^n\right)^5$을 전개했을 때 ε^{n-1}의 係數 x_{n-1}의 값을 뜻한다.

(定理) 五次方程式(18)의 攝動級數를

$$x(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\varepsilon^n$$

이라하면, n번째 項 x_{n-1}은

$$x_{n-1}=-\sum_{i=2}^{n}\frac{4!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{i(n-1)}!}(x_0)^{ai1-4}(x)^{ai2}\cdots(x_{n-2})^{ai(n-1)}-\frac{1}{5}x_{n-2}$$

이다. (단, n≥2)

(證明) 五次方程式(18)의 攝動級數를

$$x(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon^n$$

$\langle a_{ij} \rangle$를 위 定義에서의 條件을 만족하는 m×n行列이라 하면, n번째 項 x_{n-1}은 다음 方程式을 만족한다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + x_{n-2} = 0$$

(단, n≥2)

위 行列에서 $a_{1n} = 1$, $a_{in} = 0(i \geq 2)$이라 해도 一般性을 잃지 않으므로 $a_{11} = 4$, $a_{1j} = 0(2 \leq j \leq n-1)$이다. 따라서

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{5!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{in}!}(x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i2}}\cdots(x_{n-1})^{a_{in}} + x_{n-2} = 0$$

$$\sum_{i=2}^{m} \frac{5!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{in}!}(x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i2}}\cdots(x_{n-1})^{a_{in}} + \frac{5!}{a_{11}!a_{12}!\cdots a_{1n}!} \times (x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i1}}\cdots(x_{n-1})^{a_{in}} + x_{n-2}$$

$$= 0$$

여기서 $a_{1n} = 1$ $a_{in} = 0(i \geq 2)$ $a_{11} = 4$ $a_{1j} = (2 \leq j \leq n-1)$이므로

$$\sum_{i=2}^{m} \frac{5!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{i(n-1)}!}(x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i2}}\cdots(x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} + \frac{5!}{4!1!}(x_0)^4 x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

$$-5x_0^4 x_{n-1} = \frac{5!}{a_{i1}!a_{i1}!\cdots a_{i(n-1)}!}(x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i2}}\cdots(x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} + x_{n-2}$$

따라서

$$x_{n-1} = -\sum_{i=2}^{m} \frac{4!}{a_{i1}!a_{i2}!\cdots a_{i(n-1)}!}(x_0)^{a_{i1}}(x_1)^{a_{i2}}\cdots(x_{n-2})^{a_{i(n-1)}} - \frac{1}{5}x^{n-2}$$

(단, n≥2)

(증명 끝)

Ⅵ. 結　　論

以上에서 살펴본 바와 같이 攝動微分方程式論에서 使用되는 攝動問題를 利用해 一般的인 方程式의 近似的인 該를 求하는 過程을 綜合해 보면 다음과 같다.

1. 주어진 非攝動問題에 媒介變數 ε을 導入하여 攝動問題로 바꾼다. 여기서 媒介變數를 導入할 때는 반드시 零 번째 近似的인 解가 求할 수 있도록 해야 한다.

2. 攝動問題에 대한 方程式의 解들은 攝動級數로 表示된다고 假定하고 未定係數法을 利用해 그 攝動級數의 係數들을 計算한다.

3. 주어진 問題에 해당하는 媒介變數 ε의 값을 使用하여 級數의 合으로 주어진 問題의 답을 求한다. 이 過程은 쉬울 수도 있고 어려울 수도 있다. 만약 攝動變數가 收斂한다면 그 合은 주어진 方程式에 대한 近似的인 解가 된다.

4. 많은 攝動級數들은 종종 發散(divergence)한다. 만약 計算된 攝動級數들이 發散할 경우 最初로 誤差가 極少가 되는 項까지 計算하여 주어진 方程式의 近似的인 解를 求하면 되는데, 媒介變數 ε이 매우 작을 경우에 첫 번째, 두 번째 可能하면 세 번째 項까지 取하여 두 번째 近似的인 解만 求하여도 좋은 近似値를 얻을 수 있다.

參 考 文 獻

(1) Carl M.Bender and Steven A.Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, Inc., 1987

(2) Murray R.Spiegl, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc., 1968

(3) 文炳洙, 數値解析, 二友出版社. 1982