

SMAC법에 의한 유체입자 충돌의 수치시뮬레이션

김남형 · 김남국

제주대학교 해양토목공학과

The numerical simulation of the collision of water particles by SMAC method

Nam-hyeong, Kim and Nam-kuk, Kim

Department of Ocean Civil Engineering, Cheju National University, Cheju 690-756, Korea

It is important to clarify the collision of water particles which change rapidly due to the time and space. SMAC method modified the original MAC, which is one of the numerical techniques for the handling time dependent variation of fluid flows, is employed. The Navier-Stokes equation for incompressible time-dependent viscous flow is applied and, Also marker particles which move with the fluids are used. The transient aspects can be computed for as much elapsed time as desired. Two-dimensional numerical analysis problems of the collision of water particles are carried out.

Key words : SMAC method, Splashing drop, Collision of water particles, Marker particles

서 론

근년에 컴퓨터의 고속화 · 대용량화와 수치해석 기법의 발달에 의해, 유체역학의 이론으로 부터 해석하는 것이 어려웠던 유체형상이 급격히 변하는 흐름의 현상도 쉽게 가시화 할 수가 있다.

유동현상을 기술하는 경우에 유체는 일반적으로 압축성을 무시 할 수 있다. 이와같이 비압축성의 유체흐름을 기술하는 기초방정식으로서 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식이 있다. 이 Navier-Stokes 방정식을 직접푸는 계산기법중에서, 유한차분법으로 자유표면의 계산이 가능한 MAC법(Welch *et al.* 1966)이 있다. MAC법은 대상으로 하는 계산영역을 사각형의 격자로 분할하고, 각 분할된 격자를 Cell이라 하며, 각각의 Cell에 초기값으로서 몇개의 입자(Marker)를 배치한다. 이 입자는 중량을 가지고 있지 않은 이상화된 입자로서 유체의

형상을 나타내기 때문에 MAC법(Marker and Cell)으로 불려진다. 이 입자는 속도장 · 압력장 등의 계산에는 직접관여하고 있지는 않지만, 계산결과와 시각화 · 흐름의 가시화에 중요한 역할을 한다. MAC법이 발표된 이후에 수많은 수정을 거쳐, Amsden · Harlow(1970)에 의해 SMAC법(Simplified Marker and Cell)이 제안 되었다. SMAC법은 MAC법의 사용법을 비교적 용이하게 수정하여, 수치계산의 시간을 현저하게 단축시킬수 있도록 계산스킴을 개량한 것을 말한다. SMAC법은 유체의 자유표면형상이 시간과 더불어 연속적으로 변화하는 유동현상을 가시화 하는데 유효한 기법이다.

본 연구는 SMAC법을 이용한 기초적인 연구로서, 유체입자가 충돌하는 현상을 예로 들어, SMAC법의 수치시뮬레이션을 수행함과 동시에, 본 해석기법의 타당성을 검증한다.

기초방정식

온도의 변화, 표면장력의 효과는 무시하고, 밀도와 점성은 일정한 것으로 가정하면, 중력항을 고려하지 않는 경우, Newton유체로서 2차원 비압축성의 흐름은 Navier-Stokes방정식과 연속방정식으로 다음과 같다.

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, u, v 는 x, y 방향의 속도성분, θ 는 압력, ρ 는 밀도, ν 는 동점성계수, F_x, F_y 는 x, y 방향에 작용하는 단위질량당의 외력을 나타낸다. 식(1)을 이용하여, 식(2)와 식(3)을 약간 변형하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + F_x \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + F_y \end{aligned} \tag{5}$$

으로 된다. 식(4)을 y 로 미분하고, 식(5)를 x 로 미분하여, 식(4)에서 식(5)를 빼면, 압력항이 없어지며, 다음의 와도방정식(vorticity transport equation)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, 와도 ω 는 다음식으로 정의한다.

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

유속 u, v 와 흐름함수 ψ 와의 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8}$$

식(8)을 식(7)식에 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{9}$$

다시말해, 와도 ω 는 압력에 대해서 독립적이므로, Navier-Stokes방정식에 어떤 압력을 대입하여도 얻어지는 유속의 값은 정확한 와도를 보존한다. 그러나, 이들의 값은 식(1)을 만족하고 있다고 말할 수 없다. 그러므로 포텐셜함수 ψ 의 구배를 도입하는 것에 의해 식(1)의 D 의 값이 0이 되도록 조정된다면, 그 결과로 얻어지는 유속의 장은 똑같은 와도를 이루며, 또 연속방정식도 만족하게 된다. 따라서 이들의 유속의 값을 올바르게 한번에 결정할 수가 있다. 이것이 SMAC법의 본질적인 부분이다.

기초방정식의 이산화

식(1)과 식(4)-(5)을 시간은 전진차분, 공간은 중심차분을 이용하면, 다음과 같은 차분방정식이 얻어진다. 단, 이송항의 차분에는 Doner-Cell법을 이용한다. 이때 $4x \times 4y$ 의 직사각형 Cell의 격자망을 고려하여, 변수의 배치는 Fig. 1과 같이 배치한다.

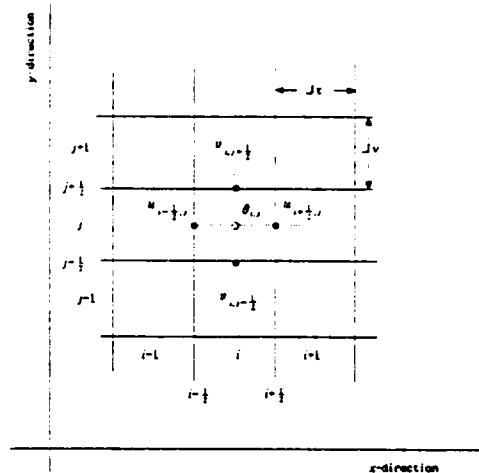


Fig. 1. The location of the cell variables in a SMAC cells.

SMAC법에 의한 유체입자 충돌의 수치시뮬레이션

$$D_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}$$

$$= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} \times u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{3}{2},j} \times -u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x}$$

$$+ \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \times v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \times u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$+ \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i+1,j}}{\Delta x}$$

$$+ \nu \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y^2} - \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x \Delta y} \right] + F_x \quad (11)$$

$$= \frac{\bar{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

$$= \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \times v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$+ \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} \times v_{i,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{3}{2}} \times v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j+1}}{\Delta y}$$

$$- \nu \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x \Delta y} - \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right] + F_y \quad (12)$$

여기서,

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2},$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{2}$$

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{2}, \quad v_{i,j} = \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}}{2}$$

식(11)과 식(12)에 있어서 유속 u^{n+1}, v^{n+1} 에 기호가 붙어 있는 것은 시간의 전진차분에 의해 시간 $(n+1)$ 의 값이 구해지는 것으로, 각각의 u, v 는 식(10)을 만족하고 있지 않기 때문에, "임시유속"의 의미이다. 이들의 식에서 임시로 얻어진 유속 \bar{u}, \bar{v} 를 구해야 하며, 반복수렴계산은 식(8)의 포텐셜함수 ψ 을 이용한다. 유속 u^{n+1}, v^{n+1} 는 $\bar{u}^{n+1}, \bar{v}^{n+1}$ 을 Taylor전개를 하면 다음식이 얻어진다.

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x},$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \bar{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} \quad (13)$$

윗첨자 $n+1$ 은 새로운 시간 $t=(n+1)\Delta t$ 의 유속값을 나타내며, 각각의 변수값 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 의 배치의 값은 Fig. 2(1)에 나타내며, $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 의 배치의 값은 Fig. 2(2)에 나타낸다. 식(13) 이용하여 식(10) 차분하면, 다음식이 구해진다.

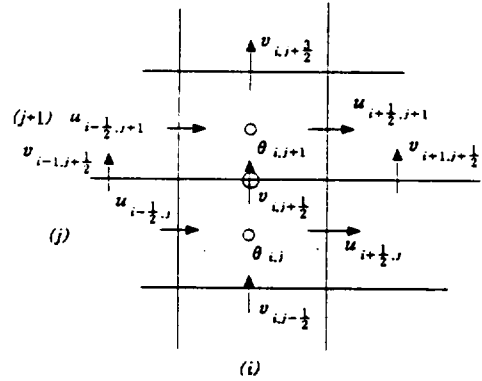
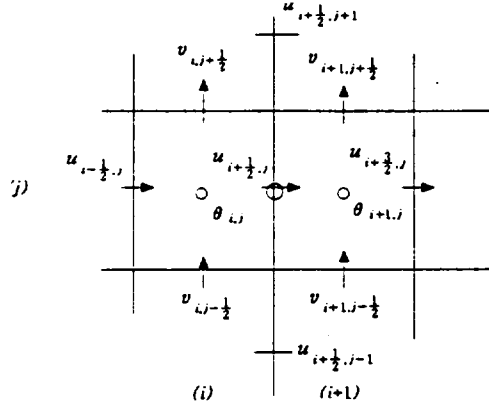


Fig. 2(1). The location of variables for $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ calculation.

(2). The location of variables for $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ calculation.

$$D_{i,j}^{n+1} = \bar{D}_{i,j} - \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} - \frac{\psi_{i,j+\frac{1}{2}} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \quad (14)$$

여기서, $\bar{D}_{i,j}$ 도 앞에서 설명한 \bar{u}, \bar{v} 와 같은 계산스킴을 의미한다. $D_{i,j}^{n+1}$ 을 만족하는 $\psi_{i,j}$ 의 값이 결정되면, 식(13)에서 u^{n+1}, v^{n+1} 을 계산할 수가 있다. 포텐셜함수 ψ 는 연속방정식을 반복계산에 의해 수렴시키기 위해 도입했다. Taylor전개와 고차항을 생략하면, 다음식이 얻어진다.

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{1+\alpha}{\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)} \left[-\bar{D}_{i,j} + \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i+1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^k + \psi_{i,j+1}^{k+1}}{\Delta y^2} \right] - \alpha \psi_{i,j}^k \quad (15)$$

여기서, 변수 ψ 의 기호 k 는 반복계산에 의한 ψ 의 수렴값으로 반복계산횟수를 나타내고 있다. 변수 α 는 완화계수로서 다음범위 ($0 \leq \alpha < 1$)의 값을 사용해야 하며, 본 계산에서는 $\alpha=0.75$ 를 사용했다. 반복계산할때에 수렴기준은 다음식을 사용한다.

$$\left| \frac{|\psi_{i,j}^{k+1}| - |\psi_{i,j}^k|}{|\psi_{i,j}^{k+1}| + |\psi_{i,j}^k|} \right| < \epsilon \quad (16)$$

여기서 ϵ 은 0.0002로 했다.

경계조건의 처리

해석하는 유체의 좌우상하벽면에 있어서 경계조건은 점선유속이 경계상에서 0인 no-slip경계조건을 도입했다. no-slip조건은 벽면이 점착성 또는 조면(粗面)인 경우로, 마찰력이 작용하는 것을 의미한다. Fig. 3의 기호를 이용하여 no-slip조건을 나타내면, 다음과 같다.

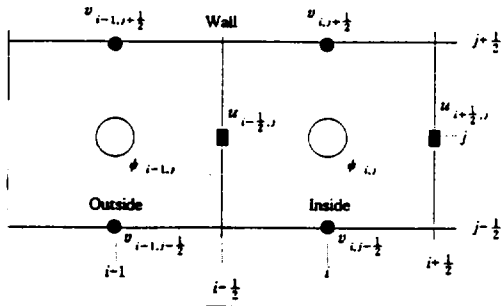


Fig. 3. The position of variables at a SMAC left wall.

$$u_{i-1/2,j} = 0, \psi_{i-1,j} = \psi_{i,j}$$

$$v_{i-1,j+1/2} = -v_{i,j+1/2}, v_{i-1,j-1/2} = -v_{i,j-1/2} \quad (17)$$

SMAC법에서는 공간으로 이산화된 유체를 Fig. 4에 나타내듯이 4종류의 Cell로 나눈다.

- ① S : Surface Cell(자유수면의 셀)
- ② E : Empty Cell(빈 공간의 셀)

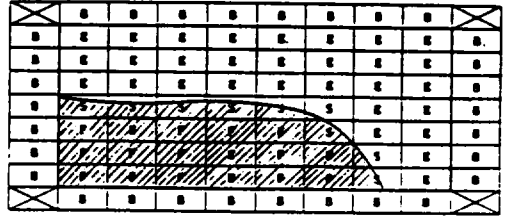


Fig. 4. SMAC computing mesh.

③ F : Full Cell(유체의 셀)

④ B : Boundary Cell(경계의 셀)

또, 자유수면의 경계조건은 입자의 운동의 궤적에서 S Cell을 식별하며, 점선유속의 조건은 다음식으로 주어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

식(18)에서 $u_{i+1/2,j+1/2}$ 은 다음의 이산형을 취한다.

$$u_{i+1/2,j+1/2} = u_{i+1/2,j} - \frac{\Delta y}{\Delta x} (v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}) \quad (19)$$

식(19)을 점성항(11)식에 대입하면, 점성항은 소거된다. 법선유속의 조건은 다음과 같다.

$$\phi_{i,j} = \psi_{i,j}(\text{외부압력}) + \frac{2\nu}{\Delta y} (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}) \quad (20)$$

압력 θ 는 일반적으로 F Cell에서 0으로 정해지지만, 유체입자 충돌의 문제에서는 다음식으로 θ_s 을 구할수 있다.

$$\theta_s = g_x x + g_y y \quad (21)$$

여기서 g_x, g_y 는 x, y 방향의 가속도이다. S Cell에 있어서 θ_s 는 자유수면의 법선방향유속조건을 만족해야 한다. 따라서, θ_s 는 다음의 3개의 조건을 생각할수 있다.

① $\theta_s = 0$

(S Cell이 인접한 2개 이상의 E Cell과 접하고 있는 경우)

$$\theta_{s,i,j} = \frac{2\nu}{\Delta x} (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})$$

(S Cell이 하나만의 E Cell과 접하며, S Cell의 왼쪽이나 오른쪽에 있는 경우)

$$\theta_{s,i,j} = \frac{2\nu}{\Delta y} (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})$$

(E Cell이 하나이고 S Cell이 위나 아래에 있는 경우)

계산의 안정조건

차분 격자망을 이용하는 경우는 다음의 계산의 안정조건을 만족해야 한다.

$$u_{\max} \times \Delta t < \Delta x \quad (22)$$

Hirt(1968)의 해석이론에 의하면 안정조건으로서 다음의 2조건을 제시하고 있다.

$$v) \frac{1}{2} u_{\max}^2 \times \Delta t \quad (23)$$

$$v) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\max} \times \Delta x^2 \quad (24)$$

식(23)는 선형 안정성을 요구하며, 식(24)은 비선형성의 안정성을 요구하고 있다.

해석결과 및 고찰

계산의 수순을 Fig. 5에 나타낸다. Fig. 5에서 나타내듯이 계산의 전 과정은 크게 나누어 3개의 부분으로 구성이 된다. 처음의 2부분은 각각 와도이송, 유량보존을 계산하며, 나머지 부분은 입자를 이동울 계산한다.

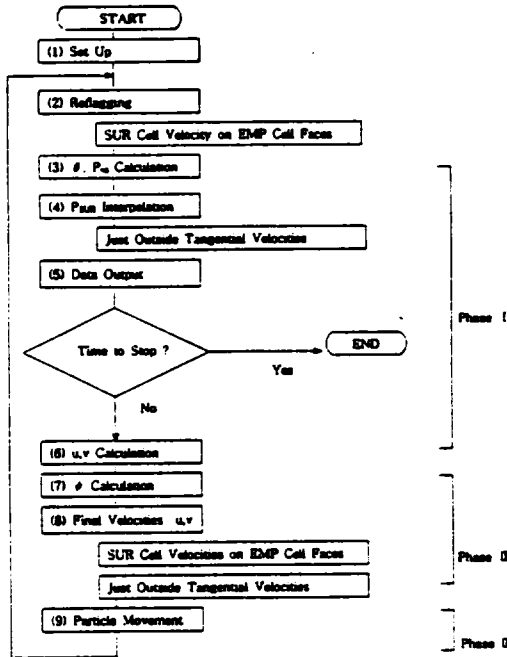


Fig. 5. The SMAC computing cycle.

먼저 제1단계에서는 초기계산영역에 있어서 와도이송을 보증하는 \bar{u}, \bar{v} 을 구하고, 다음의 제2단계에서 질량보존 $D=0$ 을 만족하는 u, v 을 결정하여, 마지막 단계에서 이들을 이용하여 입자를 이동시켜, 계산영역을 재설정한다. 이 3단계를 반복하는 것에 의해 각 시각에서의 속도, 압력을 구하는 것이다.

첫번째의 적용예로서 2유체입자의 공간에서 충돌하는 경우를 선택했다. $\Delta x = \Delta y = 0.1cm$ 로 x 방향으로 30 Cell, y 방향으로 30 Cell로 했기 때문에 $3cm * 3cm$ 의 영역이다. 동점성계수($\nu = 0.01cm^2/s$)을 가진 유체입자의 직경은 똑같이 $6mm$ 이며, 왼쪽의 유체입자는 정지하고 있으며, 오른쪽의 유체입자가 초속도 $800cm/s$ 로 날아와서 충돌 했을 때의 과정을 시간경과를 따라 나타낸 것이 Fig. 6이다. Fig. 6에서도 알수있듯이 2차원 계산이기 때문에 원판형의 유체입자이지만, 찌그러져 있는 것은 어쩔수가 없었다. 정지하고 있는 유체입자에 또 다른 유체입자가 날아와서 부딪쳐져, 하나가 되어 튀어 나가는 것을 잘 나타내고 있다. 이것은 날아온 유체입자도 항력을 받기 때문에, 전부가 앞으로 나가지않고 체적을 적게하여 정지하고, 소유하고 있던 운동량을 부딪친 유체입자에 건네주고있는 것을 알수 있다.

두번째의 적용예로서는 유체입자가 자유수면에 떨어지는 경우를 예로 들었다. $\Delta x = \Delta y = 0.5cm$ 로, x 방향으로 40 Cell, y 방향으로 40 Cell로 했기 때문에 $20cm * 20cm$ 의 영역이다. 동점성계수($\nu = 5.0cm^2/s$)을 가진 직경 $2.5cm$ 의 유체입자를 수심이 $2.5cm$ 인 자유수면 $1cm$ 위에 올려놓고, 초기속도 $30cm/s$, 중력가속도 $980cm/s$ 의 조건아래에서 낙하시켰다. Fig. 6은 유체입자의 크기와 거의 같은 정도의 두께를 가진 자유수면에 유체입자가 충돌하는 과정을 시간경과와 더불어 나타내고 있다. Fig.7에서 알수있듯이 낙하하는 유체입자가 가지는 운동에너지가 초기에 정지하고 있는 자유수면의 운동으로 이동하며, 자유수면에 물결이 일어나서 저면의 일부가 노출되어 있는 것을 볼수 있다. 이것은 상상할수 있는 와도현상을 잘 나타내고 있다고 할수 있겠다.

결 론

본 연구는 SMAC법의 타당성을 검증하기 위하여 유체입자 충돌의 수치시뮬레이션을 수행한 것이다. 수치시뮬레이션의 계산결과를 물리현상을 합리적으로 나타낸 것으로 매우 만족스러우며, 계산수법

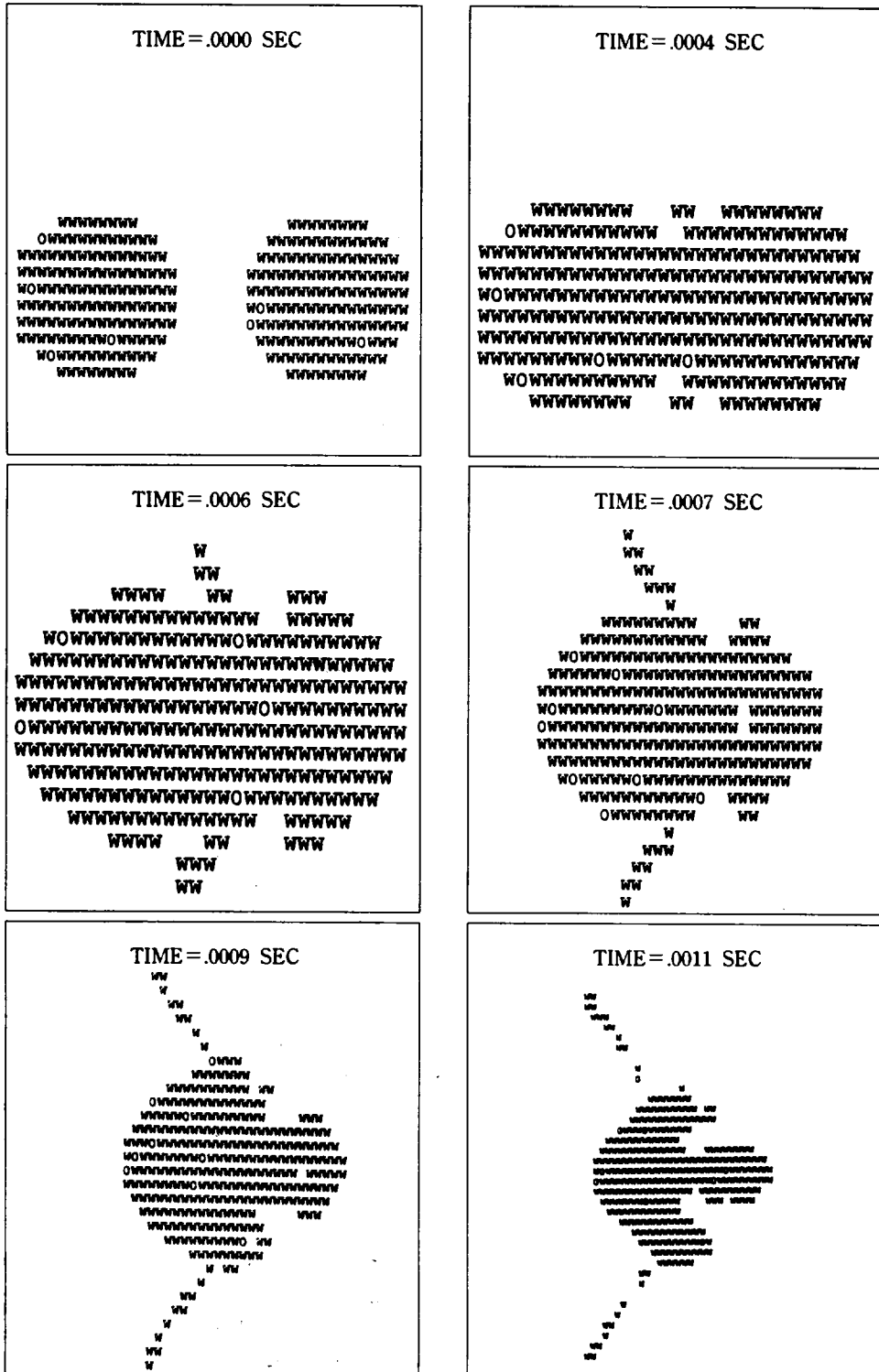


Fig. 6. Sample calculation I : configuration for the collision of water particles at six different time.

SMAC법에 의한 유체입자 충돌의 수치시뮬레이션

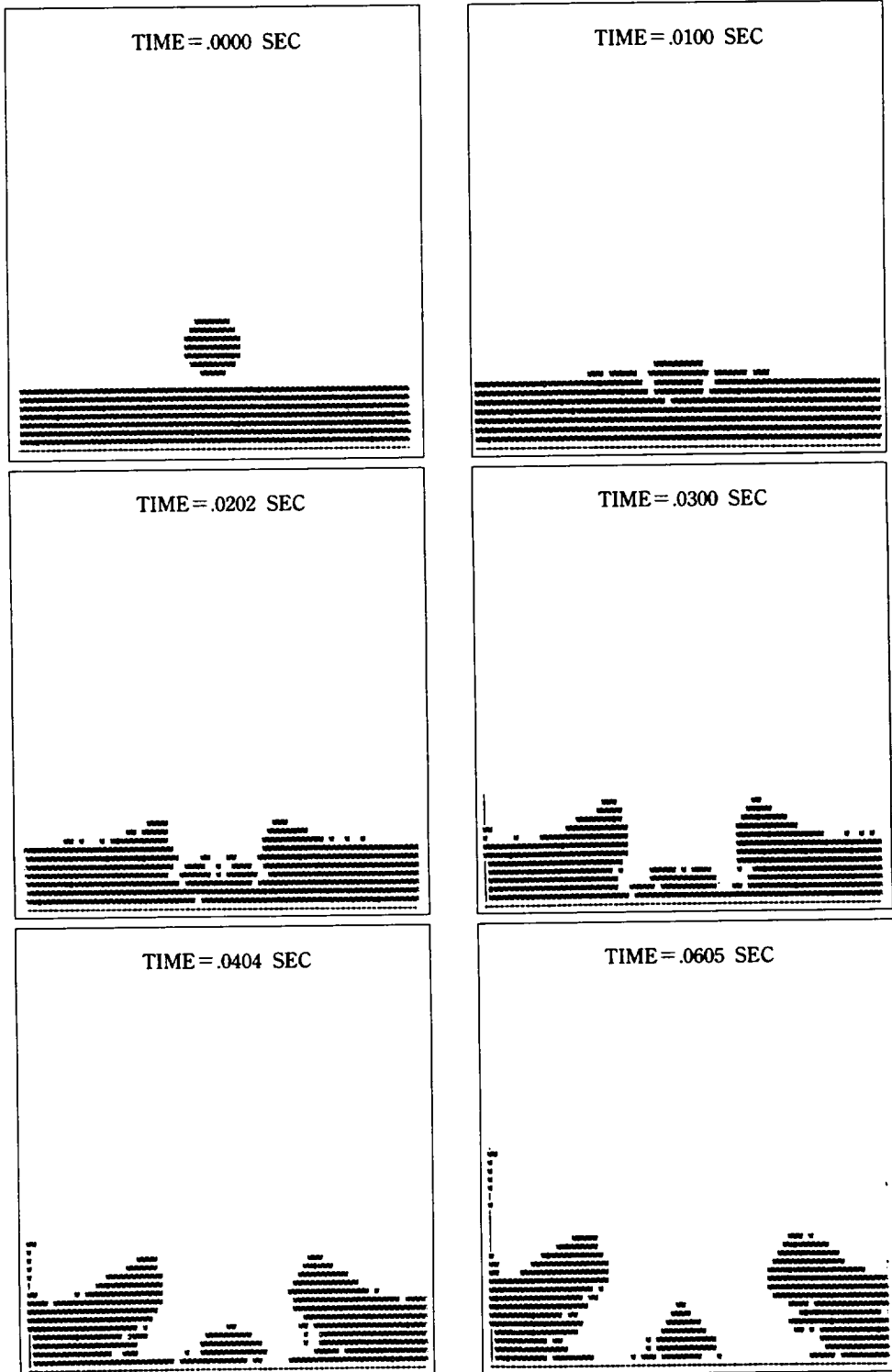


Fig. 7. Sample calculation II : configuration for the splashing drop at six different time.

의 유효성이 입증되었다고 생각할 수 있겠다. 또 SMAC법의 수치해석기법의 개량 및 실험값과의 비교검토가 필요하겠으며, 본 계산에서는 원형판의 유체입자가 일그러져 있으나 원형판에 가깝도록 개선할 필요성이 있겠다.

SMAC법을 개수로정상류 · 밀도류 · 댐붕괴시 저류수 거동 · 탱크내 액체 진동 등에 적용한 해석에는 아직 많지 않으므로, 앞으로의 연구과제임과 동시에 큰 진전이 기대된다.

참 고 문 헌

- Amsden, A.A. and F.H. Harlow, 1970, The SMAC method. A numerical technique for calculating incompressible fluid flows, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-4370, 85P.
- Harlow, F.H. and J.E. Welch, 1965, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, Phys. of Fluids, Vol.8 No.12, pp.2182~2189.
- Hirt, C.W., 1968, Heuristic stability theory for finite difference equations, Jour. Comp. Phys., Vol.2, pp.339~355.
- Hirt, C.W., A.A. Amsden and J.L. Cook, 1974, An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, Jour. Comp. Phys., Vol.14, pp.227~253.
- Hirt, C.W. and F.H. Harlow, 1967, A general corrective procedure for the numerical solution of initial value problems, Jour. Comp. Phys., Vol.2, pp.114~119.
- Welch, J.E., J.P. Harlow and B.J. Daly, 1966, The MAC method. A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid flow problems involving free surface, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, Report LA-3425, 145P.