

## 극배치를 이용한 ALPD 시스템의 제어기 설계

강진식\*

### Controller Design of ALPD System By Pole-Placement

Jin-Shig Kang\*

#### ABSTRACT

In this paper, affine parameter dependent system is considered. Pole-sensitivity is defined as a rate of pole movement by parameter variation and controller design methods are suggested which minimizes the pole-sensitivity and closed loop poles are located in desired location. For state feedback case, conditions which minimizes pole-sensitivity are derived and proved, methods of computing the additional state feedback gain which minimizes the pole-sensitivity are presented. Conditions of minimizing pole-sensitivity and methods of additional gain computation for constant output feedback, and observer based output feedback are summerized. We show the appropriateness of suggested method by simple example.

**Key words** : Affine parameter dependent system, Pole-sensitivity, Pole-placement, State-feedback, Constant output feedback, Observer based output feedback.

#### 1. 서론

선형 시불변 시스템에 대한 제어문제는 비교적 오랫동안 연구되어왔다. 그러나 제어대상 시스템이 비선형이거나 시변인 경우에는 제어기 설계문제를 쉽게 풀 수 없다. 이러한 문제를 해

소하기 위한 방법이 gain schedulling 방법으로 여러개의 동작점에서 선형 시불변 시스템으로 모델링하고 각 동작점에 대한 제어기를 설계한 후 동작점의 변화에 대하여 제어기를 변화시키는 방법으로 안정도나 강인성, 수행성능등에 대한 연구가 거의 없었다. Shamma 와 Athan<sup>(1)</sup>은 gain schedulling의 안정도 강인성 및 수행성능에 대하여 연구 하였다. 그러나 이 방법은 동작점의 변화에 대하여 제어기를 바꾸어야 하며

\* 제주대학교 통신공학과  
Dept. of Telecommunicaion Eng., Cheju Nat'l Univ.

하나의 동작점에서 다른 동작점으로 천이할 때에는 비안정이 될 가능성을 내재하고 있다.

파라미터 종속 시스템에 대한 연구는 gain schedulling에 기인하며 Oxford의 G. D. Wood<sup>(2)</sup>에 의하여 기계장치에 적용하여 그 가능성을 보였다. 그리고 B.G. Scott<sup>(3)</sup>은 LPD 시스템의 Quadratic 안정도 및 수행성능을 Lyapunov 방정식을 이용하여 구하였으며  $H_\infty$  제어기 설계 방법을 제시하였다. 그리고 W. Fen<sup>(4)</sup>은 LPD 시스템을  $L_2$  노름을 이용하여 분석하고 제어기 설계 조건을 표현하였으며 LQG 제어기 설계 방법을 제시하였다. 그리고 상수이득 제어기인 경우에 비안정인 시스템이 파라미터 종속인 제어기를 이용하면 안정화 할 수 있음을 보였다. 그러나 이 방법들은 파라미터의 크기를 변화 범위 내에서 구간을 분할하고 각 파라미터 값에 대하여 조건을 만족하는 제어기를 계산하여야 하므로 계산량이 많아지며 모든 그리드에 대하여 조건을 만족하여도 사이값에서는 비안정일 수 있다.

본 논문에서는 LPD시스템의 특수한 경우인 Affine Linear Parameter Dependent( ALPD ) 시스템에 대하여 고찰한다. 파라미터의 변화에 대한 극점변화를 극점감도로 정의한다. 그리고 극점감도를 최소로 할 때 파라미터의 변화에 대한 극점위치 변화가 최소가 됨을 보이며 상태되먹임 제어기인 경우 극점감도를 최소로 하기 위한 조건과 그때의 보조이득을 구하는 식을 유도한다. 또한 상수이득 출력 되먹임, 관측기를 이용한 출력되먹임에서 극점감도를 최소로 하는 조건과 이때의 보조이득 계산방법을 제시하여 간단한 예를 통하여 타당성을 보인다.

## II. 제어문제

이 장에서는 ALPD 시스템의 동력학식을 소개하고 극점감도를 정의한다. 그리고 상태되먹임을 이용한 극-배치 제어방식에서 극점감도의 표현식을 구하고 제어문제를 서술한다.

### 2.1 ALPD 시스템

ALPD 시스템을 소개하기에 앞서 시스템의 파라미터 변화를 포함하는 파라미터 변화 집합을 정의하여야 한다. ALPD 시스템은 Linear Parameter Dependent( LPD ) 시스템의 특수한 형태로 시간에 따라 변하는 파라미터를 포함한다. 이때 파라미터는 구간 연속이며 제한된 크기를 갖는다고 가정한다. 또한 이 파라미터들은 실시간 측정이 가능하다고 하면 파라미터 변화집합은 다음과 같이 정의된다.

정의 2.1. : 집합  $P$ 에 대하여 파라미터 변화 집합  $F_p$ 는  $R^+$ (시간)에서  $P$ 로의 함수로 구간연속이며 제한된 수의 불연속점을 갖는다.

정의 2.1로부터 파라미터  $\rho_i \in F_p$ 는 시간에 대하여 미분이 가능하며, 파라미터를 독립변수로 하는 함수는  $\rho_i$ 에 대하여 미분가능하게 된다. 다음은 이러한 파라미터를 포함하는 시스템을 정의한다.

ALPD 시스템의 동력학식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $A(\rho(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \rho_i(t)$ 이며 모든  $i$ 에 대하여  $\rho_i \in F_p$ ,  $|\rho_i| < \infty$ 이다. 그리고  $A(\rho(t)) \in R^{n \times n}(t)$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{l \times n}$ 이다. 이 시스템은 시스템 행렬  $A$ 가 파라미터의 함수로 표현되어 있으며 고유치 및 고유벡터 역시 파라미터의 변화에 의해 변한다. 따라서 파라미터의 변화에 대한 고유치의 변화를 나타낼 수 있는 변수를 정의 하여야 한다.

### 2.2 극점감도( pole sensitivity )

ALPD 시스템의 극점은 파라미터  $\rho_i(t)$ 의 변화에 따라 변하게 된다. 이때  $\rho_i(t)$ 의 변화에 대한 극점의 변화는  $A(\rho(t))$ 의 고유치와 고유구조를 이용하여 구할 수 있다.  $A(\rho(t))$ 의  $j$ -번째 고유치와 고유벡터의 관계는 다음과 같다.

$$A(\rho(t))v_j(\rho(t)) = v_j(\rho(t))\lambda_j(\rho(t)) \quad (2)$$

여기서  $i$ -번째 파라미터  $\rho_i(t)$ 는 구간연속이므로 식 (2)는  $\rho_i(t)$ 에 대하여 미분 가능하며  $i$ -번째 파라미터 변화에 대한  $j$ -번째 극점 변화는 식 (2)를  $\rho_i(t)$ 에 대하여 미분함으로써 구할 수 있다. 식 (2)를  $\rho_i(t)$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A(\rho(t))}{\partial \rho_i} v_j + A(\rho(t)) \frac{\partial v_j}{\partial \rho_i} \\ &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial \rho_i} v_j + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial \rho_i} \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 여기서 우방고유벡터  $u_j$ 를 식 (3) 양변의 앞에 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial A(\rho(t))}{\partial \rho_i} v_j + u_j A(\rho(t)) \frac{\partial v_j}{\partial \rho_i} \\ = u_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial \rho_i} v_j + u_j \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial \rho_i} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에 우방고유벡터, 고유치의 관계  $u_j A = \lambda_j u_j$ 를 이용하여 정리하면

$$u_j \frac{\partial A(\rho(t))}{\partial \rho_i} v_j = u_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial \rho_i} v_j \quad (5)$$

로 된다. 식 (5)는  $i$ -번째 파라미터의 변화에 대한  $j$ -번째 고유치의 변화를 나타낸다. 따라서  $i$ -번째 파라미터의 변화에 대한  $j$ -번째 고유치의 변화를 극점감도  $S_{ji}$ 라 하면 다음과 같이 정의된다.

정의 2.2 : 극점감도  $S_{ji}$ 는  $i$ -번째 파라미터의 변화에 대한  $j$ -번째 고유치의 변화를 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$S_{ji} = u_j \frac{\partial A(\rho(t))}{\partial \rho_i} v_j \quad (6)$$

$i$ -번째 파라미터의 변화에 대한  $j$ -번째 고유

치의 변화는  $j$ -번째 고유벡터 방향에서  $i$ -번째 파라미터의 변화에 대한 시스템 행렬  $A(\rho(t))$ 의 변화를 나타낸다. 따라서  $j$ -번째 고유치의 변화는 다음과 같다.

$$d\lambda_j = S_{j1}d\rho_1 + S_{j2}d\rho_2 + \dots + S_{jk}d\rho_k \quad (7)$$

따라서 파라미터의 변화에 대하여 고유치의 변화를 최소로 하기 위해서는 식 (7)의 극점감도를 최소로 하여야 한다. 여기서  $\rho_i$ 의 변화  $d\rho_i$ 는 시스템 파라미터의 변화이므로  $S_{ji}$ 들을 최소로 하여야 한다.

### 2.3. 극-배치 제어문제

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자.<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8)$$

상태 되먹임 이득을  $u = -Fx(t)$ 으로 선택하면 상태 되먹임에 의한 폐루프 동력학 식은

$$\dot{x}(t) = [A - BF]x(t) \quad (9)$$

이다. 폐루프 극점은  $A - BF$ 의 극점과 같으며 원하는 극점 집합을  $\Lambda^d$ 라 하면 극-배치에 의한 상태 되먹임 제어기의 제어문제는 다음식을 만족하는  $F$ 를 구하는 문제로 된다.

$$\begin{aligned} (A - BF)v_j^d &= v_j^d \lambda_j^d \\ (\alpha, u_j^d(A - BF)) &= \lambda_j^d u_j^d \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\lambda_j^d$ 는  $j$ -번째 원하는 고유치이며  $v_j^d, u_j^d$ 는 각각  $j$ -번째 좌방고유벡터, 우방 고유벡터이다.

### 2.4. ALPD 시스템의 극-배치 제어문제

ALPD 시스템은 LPD 시스템의 특수한 경우

로 파라미터의 변화에 의하여 페루프 극점 위치가 변한다. 그리고 상수입력 제어로는 비안정인 시스템도 파라미터 종속 제어로는 안정화 가능해진다. 따라서 파라미터의 변화를 고려한 파라미터 종속 제어가 설계 방법이 필요하다. 상태 되먹임 이득을  $F(\rho(t)) = F_0 + \sum_{i=1}^k F_i \rho_i(t)$ 라 하면 페루프 동력학식은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [(A_0 - BF_0) + \sum_{i=1}^k (A_i - BF_i)\rho_i]x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (11)$$

이며 페루프 극점은  $A_0 - BF_0 + \sum_{i=1}^k (A_i - BF_i)\rho_i$ 의 극점과 같다. 따라서 상태 되먹임에 의한 극점감도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{ji} &:= u_j \frac{\partial [(A_0 - BF_0) + \sum_{i=1}^k (A_i - BF_i)]}{\partial \rho_i} v_j \\ &= \frac{u_j [A_j + BF_j] v_j}{u_j v_j} \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 제어기 설계 문제는 파라미터의 변화에 대하여 페루프 극점 변화가 최소가 되도록 하며 페루프 극점 위치가 원하는 위치가 되도록 해야 한다. 여기서 극점 집합을  $\Lambda^d$ 라 하면 극-배치에 의한 상태 되먹임 제어기의 제어문제는 다음 두 식을 만족하도록 상태되먹임 제어이득

$F(\rho) = F_0 + \sum_{i=1}^k F_i$  구하는 문제로 된다.

$$1) [A_0 - BF_0 + \sum_{i=1}^k (A_i - BF_i)\rho_i]V = V\Lambda^d \quad (13)$$

$$2) \min[S_{ji}] = \min \left[ \frac{u_i (A_i - BF_i) v_j}{u_i v_j} \right] \quad \text{for all } i, j \quad (14)$$

즉, 제어기 설계 문제는 페루프 극점 위치를 원

하는 위치가 되도록  $F_0$ 를 구하고, 파라미터의 변화에 의한 페루프 극점위치 변화가 최소가 되도록 하는  $F_i$ 들을 구하는 문제로 되어 서로 분리하여 계산할 수 있다.

### III. 제어기 설계

#### 3.1. 상태되먹임 제어기 설계

극배치에 의한 제어기의 설계는 고유벡터의 선정에 민감하다. 따라서 적절한 고유벡터의 선정이 중요하며 행렬  $A_0, B$ 의 변화에 대하여 페루프 고유치의 변화가 작도록 선정하여야 한다. 시스템 입력 행렬  $B$ 를 다음과 같이 분해된다.

$$B = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서  $U_1, U_2$ 는 unitary 행렬이며  $Z$ 는 rank가  $m$ 인 행렬로 nonsingular이다. 주어진 시스템 행렬  $A_0, B$ 와 원하는 고유치  $\Lambda^d$ , 고유벡터  $V^d$ 에 대하여 식 (12)를 만족하는  $F_0$ 가 존재할 조건은 다음과 같다.

정리 3.1 : 행렬  $B$ 의 rank가  $m$ 일 때 식 (12)를 만족하는 상태 되먹임 이득  $F_0$ 가 존재하기 위한 필요 충분조건은 다음식을 만족하여야 한다.

$$U_2^T (A_0 V^d - V^d \Lambda^d) = 0 \quad (16)$$

이때 제어이득  $F_0$ 는

$$F_0 = Z^{-1} U_1^T (A_0 - V^d \Lambda^d V^{d-1}) \quad (17)$$

로 구하여진다.

정리 3.1에 대한 증명은 자명하다. 그리고 식 (15)의 인수분해는 QR 분해나 특이치 분해를 이용하면 구할 수 있다.<sup>(6)</sup> 여기서 페루프 고

유치가 시스템 행렬의 변화에 대하여 민감한 변화를 하지 않으려면 고유벡터  $V^d$ 의 선정이 중요하다. 여기서  $\text{rank}(B) \leq n$ 이므로  $n$ 개의 고유치에 대한 고유벡터를 모두 구할 수는 없다. 식 (15)와 식 (16)으로부터

$$U^T[B, A_o - \lambda_i^d I] = \begin{bmatrix} Z & U_1^T(A_o - \lambda_i^d I) \\ 0 & U_2^T(A_o - \lambda_i^d I) \end{bmatrix} \quad (18)$$

이다. 여기서  $\text{rank}(Z) = m$ 이며  $\text{rank}([B, A_o - \lambda_i^d I]) = n$ 이다. 따라서  $\text{rank}(U_2^T(A_o - \lambda_i^d I)) = m$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$U_2^T(A_o - \lambda_i^d I)v_i = 0 \quad (19)$$

는  $m$ 개의 선형 독립인 해를 갖는다. 즉,  $B$ 의  $\text{rank}$ 가  $m$ 일때는  $m$ 개의 선형 독립인 고유벡터를 구할 수 있으며 그 고유벡터 및 고유치는 식 (19)를 만족한다. 이상의 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

**알고리즘 1.**

- 1) 주어진 시스템 행렬  $B$ 에 대하여 식 (15)의 인수분해를 구한다.
- 2) 식 (19)를 만족하는 고유벡터들을 구한다.
- 3) 행렬  $KV^d = V^d \Lambda^d$ 로부터  $K$ 를 구한다. (여기서  $V^d$ 는  $m$ 개를 구하였으므로  $n-m$ 개의 벡터를 더 구하여야 한다.)
- 4)  $F_o = Z^{-1}U_1^T(A_o - K)$ 로부터  $F_o$ 를 구한다.

다음은 파라미터의 변화에 대하여 페루프 극점위치의 변화를 최소로 하기 위한  $F_i$ 를 구하는 과정에 대하여 서술한다. 파라미터의 변화에 대하여 페루프 극점위치변화가 최소가 되려면 모든  $i, j$ 에 대하여 극점감도  $S_{ji}$ 가 최소가 되

도록  $F_i$ 를 정하여야 한다. 다음 보조 정리는  $S_{ji} = 0$ 를 만족하는  $F_i$ 가 존재하기 위한 조건 및 구하는 방법을 제시한다.

보조정리 3.2 :  $[I_n - (U_1 Z)(Z^{-1}U_1^T)]$ 가 영행렬을 만족하면  $S_{ji} = 0$ 을 만족하는  $F_i$ 는

$$F_i = Z^{-1}U_1^T A_i \quad (20)$$

이다.

증명) 극점감도  $S_{ji}$ 는  $A_i - BF_i = 0$ 일 때 0이 된다. 따라서 식 (20)의 제어이득을 이용하면

$$\begin{aligned} A_i - BF_i &= A_i - U_1 Z Z^{-1} U_1^T A_i \\ &= (I_n - I_m) A_i \end{aligned}$$

이다. 여기서  $m = n$ 이라면 보조정리의 조건을 만족함을 알 수 있다. (증명끝)

여기서 위 보조정리의 조건은 일반적으로 만족하지 않는다. 즉,  $n$ 은 시스템 행렬  $A$ 의  $\text{rank}$ 이며  $m$ 은  $B$ 의  $\text{rank}$ 이다. 따라서  $n > m$ 이므로 위 조건을 만족하는  $F_i$ 는 일반적인 경우에 구할 수 없다. 다음은  $n > m$ 인 경우에도 극점감도를 영으로 하는 고유벡터를 이용한 방법에 대하여 논의한다.

보조정리 3.3 : 원하는 고유벡터  $V^d$ 에 대하여  $V^d V_\perp = 0$ 을 만족하는  $V_\perp$ 가 존재하며  $A_i - BF_i = V_\perp$ 를 만족하면  $i$ -번째 파라미터에 대한 고유치 변화가 최소가 된다. 이때 상태 피드백 이득  $F_i$ 는

$$F_i = Z^{-1}U_1^T(A_i - V_\perp) \quad (21)$$

이다.

증명)  $S_{ji} = \frac{u_j(A_i - BF_i)v_i}{u_j v_i}$ 를 만족하며  $i$ -번째 파라미터에 대한  $n$ 개의 고유치 변화는  $\bar{S}_i = \text{diag}[U(A_i - BF_i)V]$  이다. 따라서

$A_i - BF_i = V_{\perp}$  라면  $\bar{S}_i$ 는 영벡터가 되며  $i$ -번째 파라미터의 변화에 대한 고유치의 변화가 0이 된다. (증명끝)

다음 보조정리는 시스템의 유사변환을 이용한 방법에 대하여 서술한다.

보조정리 3.4 :  $A_i T^{-1} - BF_i = 0$ 를 만족하는 nonsingular인 행렬  $T$ 가 존재하며

$\hat{F}_i = U_i^T Z^{-1} A_i T^{-1}$  일 때 극점감도가 최소가 된다. 그리고 이때 상태되먹임 행렬은 다음과 같다.

$$F(\rho) = \hat{F}(\rho)T = \hat{F}_0 T + \sum_{i=1}^k \hat{F}_i T \rho_i \quad (22)$$

증명)  $z(t) = T x(t)$ 로 변환하면 시스템 동력학식은 다음과 같다.

$$\dot{z}(t) = T(A_0 + \sum_{i=1}^k A_i \rho_i) T^{-1} z(t) + T B u(t)$$

$$y(t) = C T^{-1} z(t)$$

여기서  $T$ 는 rank가  $n$ 인 nonsingular 행렬이다.

상태 되먹임을  $u(t) = (\hat{F}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{F}_i \rho_i) z(t)$ 라 하면 페루프 동력학식은

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= [(T A_0 T^{-1} - T B \hat{F}_0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (T A_i T^{-1} - T B \hat{F}_i) \rho_i] z(t) \\ y(t) &= C T^{-1} z(t) \end{aligned}$$

이다. 이 변환에 대하여 시스템의 전달함수 및 고유치등은 변하지 않는다. 그리고 이때의 극점감도는 다음과 같다.

$$S_{ji} = \frac{u_j (T A_i T^{-1} - T B \hat{F}_i) v_j}{u_j v_j} \quad (23)$$

따라서  $A_i T^{-1} - BF_i$ 가 영행렬인때 극점감도

가 최소임을 알 수 있다. 또한  $A_i T^{-1} - BF_i$ 를 영행렬이 되게하는  $\hat{F}_i$ 는

$$\hat{F}_i = U_i^T Z^{-1} A_i T^{-1} \quad (24)$$

이다. 여기서  $\hat{F}_i$ 는 유사변환된 시스템에서의 상태되먹임 이득행렬이므로 원래 시스템의 상태되먹임 행렬은  $F(\rho) = F_0 + \sum_{i=1}^k \hat{F}_i T \rho_i$ 이다.

(증명끝)

### 3.2. 상수이득 출력되먹임에 의한 제어

출력 되먹임에 의한 극배치 문제를 풀기 위하여 시스템 출력 행렬  $C$ 를 다음과 같이 분해한다.

$$C = [P \quad 0] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서  $L_1, L_2$ 는 unitary 행렬이며  $P$ 는 rank가  $p$ 인 행렬로 nonsingular이다. 이때 출력 되먹임 이득을

$$u(t) = (K_0 + \sum_{i=1}^k K_i \rho_i) y(t) \quad (26)$$

라 하면 페루프 동력학식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [(A_0 - B K_0 C) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k (A_i - B K_i C) \rho_i] x(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 출력되먹임에서의 극점감도는

$$S_{ji} = \frac{u_j (A_i - B K_i C) v_j}{u_j v_j} \quad (28)$$

로 구하여진다. 출력 되먹임의 경우에도 극배치 문제와 극점감도를 최소로 하는 문제는 분리

하여 구할 수 있다. 극-배치문제는 다음 보조정리로 요약된다.

보조정리 3.5 : 원하는 고유치와 고유벡터를  $\Lambda^d, V^d$ 라 할 때 출력되먹임 제어이득  $K$ 가 존재할 조건은

$$U_2^T(A_0V^d - V^d\Lambda^d)L_2^T = 0 \quad (29)$$

이며 이때 제어이득  $K$ 는

$$K = Z^{-1}U_1^T(A_0 - V^d\Lambda^d(V^d)^{-1})L_1^TP^{-1} \quad (30)$$

로 구하여 진다.

정리 3.5는 정리 3.1로부터 해석적으로 증명할 수 있다. 다음은 극점감도를 최소로 하는  $K_i$ 를 구하는 방법에 대하여 서술한다.

정리 3.6 : 다음중 하나의 조건을 만족하는  $K_i$ 가 존재하면  $S_{ii}$ 는 영이된다.

$$1) (A_i - U_1ZK_iPL_1) = 0$$

$$2) (A_i - U_1ZK_iPL_1) = V_{\perp}^d$$

1)과 2)에 대한 증명은 간단한 대수연산에 의하여 구할 수 있으므로 여기서는 생략한다. 그리고 위 조건을 만족하는  $K_i$ 는

$$1) K_i = Z^{-1}U_1^TA_iL_1^TP^{-1}$$

$$2) K_i = Z^{-1}U_1^T(A_i - V_{\perp}^d)L_1^TP^{-1}$$

로 구하여 진다.

### 3.3 관측기를 이용한 극-배치 제어기 설계

관측기를 이용한 제어기 설계는 관측기와 상태 되먹임 제어가 분리되어 설계되므로 여기서는 관측기의 동력학식과 제어기 설계과정을 요약하여 서술한다. 관측기의 동력학식은

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\rho(t))\hat{x}(t) + Bu(t)$$

$$+ H(\rho(t))[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

이며 상태 되먹임 제어규칙은  $u(t) = -F(\rho(t))\hat{x}(t)$ 이다. 따라서 전체 시스템에 대

한 동력학식은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & -BF(\rho(t)) \\ H(\rho(t))C & A(\rho(t)) - BF(\rho(t)) - H(\rho(t))C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

(31)

이다. 이 시스템의 극점은  $[A(\rho(t)) - BF(\rho(t))]$ 와  $[A(\rho(t)) - H(\rho(t))C]$ 의 극점과 같으므로 제어기 설계는 상대되먹임 이득행렬  $F(\rho(t))$ 와 관측기 이득행렬  $H(\rho(t))$ 를 따로 구하여도 된다.<sup>(5)</sup> 그리고 상대되먹임 제어기와 관측기는 서로 쌍대(duality)인 관계이며 상대되먹임 제어기는 위에서 서술한대로 설계하면 된다. 관측기의 설계는 다음의 보조정리에 따라 설계한다.

보조정리 3.7 : 관측기의 원하는 극점을  $\Lambda_{ob}^d$ , 고유벡터를  $V_{ob}^d$ 라 하면 극-배치를 위한 관측기 이득  $L_o$ 가 존재할 조건은

$$(A_0V_{ob}^d - V_{ob}^d\Lambda_{ob}^d)L_2^T = 0 \quad (32)$$

이며 이때  $H_o$ 는 다음과 같다.

$$H_o = (A_0 - V_{ob}^d\Lambda_{ob}^d(V_{ob}^d)^{-1})L_1^TP^{-1} \quad (33)$$

그리고 다음중 하나의 조건을 만족하면 극점감도를 최소로 하기 위한  $L_i$ 가 존재한다.

$$1) [I_n - (PL_1)(L_1^TP^{-1})] = 0_{n \times n}$$

$$2) A_i - H_iPL_2 = V_{ob\perp}^d$$

$$(여기서 \quad V_{ob\perp}^d V_{ob}^d = 0)$$

3)  $TA_i - \hat{H}_i PL_2 = 0$  를 만족하는  $T$  (nonsingular) 행렬이 존재한다.

증명) 상태되먹임과 쌍대인 특성을 이용하여 증명할 수 있다. 그리고 조건 1)을 만족하는 경우 관측기 이득행렬은  $H_i = A_i L_1^T P^{-1}$ , 조건 2)를 만족할 경우는  $H_i = (A_i - V_{ob}^d) L_1^T P^{-1}$ . 그리고 조건 3)을 만족하면  $H_i = T^{-1} \hat{H}_i$  ( $\hat{H}_i = TA_i L_1^T P^{-1}$ )로 구할수 있다.

#### IV. 계산 및 고찰

제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해 다음과 같은 동력학식을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho_1(t) - k/M_1 & -k/M_1 & \rho_2(t) - b/M_1 & 0 \\ 0 & -k/M_2 & 0 & -b/M_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

여기서  $M_1 = 1\text{kg}$ ,  $M_2 = 0.5\text{kg}$ ,  $b = 1\text{kg/sec}$ .

$k = 200\text{N/m}$ 이며  $\rho_1(t) \in [0, 9]$ ,  $\rho_2(t) \in [0, 25]$ 라 하자. Fig. 1에 파라미터의 변화에 대한 시스템의 극점위치 변화를 보였다.

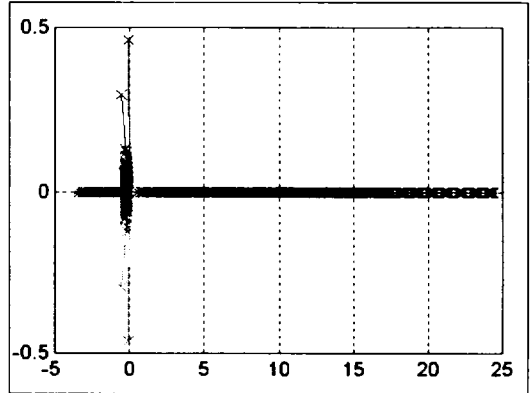


Fig. 1 Open loop pole location with parameter variation

원하는 페루프 극점위치들  $[-3 \pm j2, -3, -4]$ 라 하면 제어이득  $F_0$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$V = [ 3.440 \times 10^4 \quad -3.556 \times 10^5 \\ 8.0 \times 10^3 \quad -1.655 \times 10^5 ]$$

그리고  $A_1, A_2$ 는 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

극점감도를 0으로 하는  $F_1, F_2$ 는

$$F_1 = [ 1000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]$$

$$F_2 = [ 0 \quad 0 \quad 1000 \quad 0 ]$$

이다. Fig. 2에 파라미터의 값에 따른 페루프



극점을 보였다.

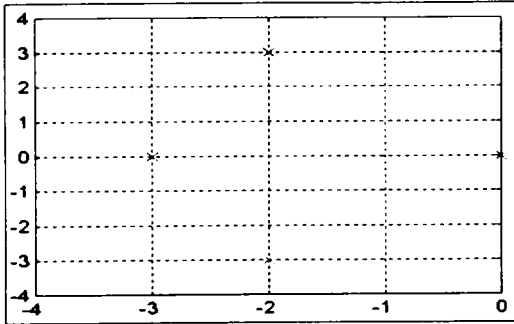


Fig. 2 Closed loop pole location

Fig. 2에서 보는 바와 같이 파라미터의 값이 변하여도 극점위치는 원하는 위치를 유지함을 알 수 있다.

## V. 결론

일반적인 LPD (ALPD) 시스템에 대한 제어기 설계는 파라미터의 값들을 적당한 값으로 나누어 그리드를 정하고 각 값에 대하여 리카티 방정식을 풀어야 하므로 계산량이 많아지며 모든 그리드에서 안정도 강인성을 보장하는 해를 구한다 해도 그리드의 사이값에서 비-안정 해지는 경우도 있다.

본 논문에서는 ALPD 시스템에 대한 제어기 설계에 대하여 고찰하였다. 파라미터의 변화에 따른 페루프 극점위치 변화를 극점감도로 정의하였으며 이 극점감도가 최소가 되도록 하는 제어기 설계 방법을 상태되먹임, 상수입력 출력되먹임, 관측기를 이용한 출력 되먹임 각각에 대하여 제시하였다. 시스템이 가제어 표준형이나 가관측 표준형인 경우에는 극점감도를 최소로

하는 파라미터 종속 이득을 쉽게 구할 수 있었다. 그리고 예제를 통하여 제시된 방법이 타당함을 알 수 있었다.

앞으로의 연구과제로는 관측기를 이용한 출력 되먹임 제어기는 분리하여 설계할 수 있지만 동시에 가제어, 가관측이 아닌 시스템에 대한 설계에는 문제점으로 남아있다. 그리고 극-배치를 이용한 설계는 페루프 극점을 선택하므로 안정도는 보장이 되지만 모델불확실성에 대한 안정도 강인성 및 실행 강인성에 대한 고찰이 필요하다.

## 참고문헌

- 1) J.Shamma, M. Athans, 1991, Guaranteed properties of gain scheduled control of linear parameter-varying systems, *Automatica*, vol. 27, no.3, pp 559 - 564.
- 2) G.D. Wood, 1995, Control of Parameter-Dependent Mechanical Systems, *Phd Thesis, Oxford*.
- 3) B.G.Scott, 1993, Quadratic Stability and Performance of Linear Parameter Dependent Systems, *Phd. Thesis, Univ. of California*, pp. 1-125.
- 4) W. Fen, 1995, Control of Linear Parameter Varying Systems, *Phd Thesis, Univ. of California*, pp. 1 - 157.
- 5) Christov P. & Konstantinov, 1991, *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall, pp 327 - 381.
- 6) G.H. Golub & C.F. Van Loan, 1983, *Matrix Computations*, *The Johns Hopkins Univ. Press*, pp 1-477.