

# 웨이브렛 변환을 이용한 영상의 잡음제거

김진경\* · 이용학\*\*

## Denoising of The Image Using Wavelet Transform

Jin-Kyoung Kim\* and Yong-Hak Lee\*\*

### ABSTRACT

Threshold-based denoising method was proposed by Donoho. Threshold-based denoising method is used hard-threshold or soft-threshold. it is not satisfied each band characteristic of the multi-resolution analysed image. This paper was proposed the threshold techniques which used to each band. It is applied hard-threshold in LL band and is applied soft-threshold in LH band, HL band and HH band. The simulation results showed that the proposed method could achieved higher quality image improvement by about 0.7dB and 2.8dB than traditional method.

**Key Words** : wavelet transform, denoising, hard-threshold, soft-threshold, multi-resolution, downsampling, upsampling

### 1. 서론

사회가 고도로 정보화 됨에 따라 초고속 정보 통신망, 인터넷을 비롯한 여러 종류의 채널이나 매체를 통해 다양한 멀티미디어 정보 서비스가 제공되고 있다. 멀티미디어 정보는 영상과 음향을 중심으로 문자, 도형, 음성 등이 결합된 다중 정보로서, 이 정보의 단순 PCM 데이터의 양은 방대하여 고속 통신망으로도 감당하기 어렵게 된다.

특히, 멀티미디어 정보 중 영상 데이터는 대용량의

영상정보를 고 능률로 압축하면서 응용 분야에 따른 요구 조건을 만족해야 한다. 이러한 방법으로 JPEG, MPEG-1, MPEG-2, H.261과 H.263 등 영상부호화에 대한 표준이 이미 제정되었다. 그리고 차세대 영상부호화 방식으로 정지영상은 JPEG-2000, 동영상은 MPEG-4를 중심으로 국제 표준의 제정이 완료되고 있으며 각국의 표준 및 기술 선점을 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.

그러나, 현재 JPEG(Joint Photographic Expert Group)과 MPEG(Moving Picture Expert Group)표준에서는 DCT(Discrete Cosine Transform)을 기반으로 하는 블록 단위의 변환을 사용하고 있다. 이 변환 기법은 낮은 비트율에서 블록간의 경계가 현저하게 나타나는 블록경계현상이 발생한다.<sup>1)</sup> 이에 비하여 웨이브렛 변환에서는 공간 및 주파수의 해상도를 가변

\* 제주대학교 통신공학과

Dept. of Telecommunication Eng. Cheju Nat'l Univ.

\*\* 제주대학교 통신컴퓨터공학부, 첨단기술연구소

Faculty of Telecommunication and Computer Eng., Research Institute Advanced Technology, Cheju Nat'l Univ.

적으로 나타낼 수 있으므로 평탄하게 변하는 부분과 윤곽선 정보와 같이 급격하게 변하는 부분을 동시에 효율적으로 다룰 수 있으므로 낮은 비트율 압축에서 블록경계현상을 일으키지 않는다. 따라서 낮은 비트율 압축을 위해서는 웨이브렛 변환을 이용하는 것이 효과적이다.<sup>2)</sup>

영상을 디지털화하거나 처리, 전송, 저장하는 과정에서 여러 가지 요인에 의해서 열화가 발생하게 된다. 영상에서 열화가 발생하면 영상 자체의 인지도를 떨어뜨릴 뿐만 아니라 여러 가지 영상 처리 응용 분야에서 급격한 성능 저하가 발생하게 된다. 따라서 영상처리와 영상 인식 분야에 있어서 열화를 제거하는 일은 매우 중요하다. 영상복원(image restoration)은 이러한 열화를 제거하거나 재구성하고 복원하기 위하여 디지털 신호 처리 알고리즘을 이용하여 주어진 영상 신호를 개선하는 과정이다. 영상 신호에 가산되는 잡음은 주어진 상황에 따라 감지기 및 전자회로에서 발생하는 가우스 잡음, 데이터 획득 과정 등에서 일어날 수 있는 임펄스잡음 등 여러 가지가 존재한다. 그중 가우스 잡음에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 이러한 잡음을 제거하기 위해서는 가우스 필터, 이동 평균 필터, 메디안 필터, 위너 필터 등 선형 필터를 이용하며, 비선형 필터로는 시그마 필터, Morphological 필터 등이 이용된다. 가우스 잡음은 선형 필터로 처리하는 것이 좋은 성능을 보이며 비선형 필터들은 임펄스 잡음에 대하여 우수하나 가우스 잡음에 대해서는 선형 필터에 비해 성능이 떨어지게 된다. 그러나 선형 필터들은 잡음 제거의 성능 면에서는 우수하나 영상내의 선, 윤곽이 번져서 나타나는 블러링 현상의 단점을 갖고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 연구로서 웨이브렛이 갖고 있는 장점인 원래의 영상 신호와 잡음을 잘 분리하는 특징을 이용하여 에지 성분을 보존하면서 필터링을 수행하는 영상 향상 기법들이 제안되어 왔다. David Donoho는 웨이브렛 해석을 잡음제거기법에 적용한 임계치 기법을 제안하여 잡음을 분리해내는데 우수한 결과를 얻을 수 있었다.<sup>3,4)</sup>

본 논문에서는 잡음이 첨가된 영상에서 잡음을 제거하는데 기존의 임계치 기법을 웨이브렛 변환을 이용하여 다해상도로 분해된 대역의 특성에 따라 임계

치 기법을 적용하는 방법에 대하여 제안하였다.

## II. 웨이브렛 변환

웨이브렛은 모 웨이브렛(mother wavelet)이라 불리는 함수의 천이와 스케일링을 통해서 생성되는 함수의 재귀적 집합으로 구성된다. 모 웨이브렛은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

식(1)에서  $\psi(t)$ 는 모 웨이브렛,  $a$ 는 스케일링 변수이고  $b$ 는 천이 변수를 나타낸다. 이때 함수  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 의 웨이브렛 변환은 다음과 같다.

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2)$$

신호의 다해상도 표현은 신호  $x(t)$ 를 일련의 내포 부공간  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  상으로 투영시킴으로써 이루어진다. 신호  $x(t)$ 의 다해상도 표현  $x_m(t)$ 와 내포 부공간들의 관계는 식(3)과 같다.

$$V_m \subset V_{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.a)$$

$$\bigcap_m V_m = \{0\} \quad (3.b)$$

$$\bigcup_m V_m = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.c)$$

$$x(t) \in V_m \Leftrightarrow x(2t) \in V_{m-1} \quad (3.d)$$

$$x_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (3.e)$$

또한, 부공간  $V_0$ 의 정규 직교 기저  $\phi(t-n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ 를 생성하는 스케일링 함수  $\phi(t)$ 가 존재한다. 이러한 각 내포 부공간의 기저들은 식(4)에서와 같이 스케일링 함수를 시간천이 및 스케일링을 통해 생성된다.

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

신호를 높은 해상도 공간  $V_{m-1}$ 에서 낮은 해상도 공간  $V_m$ 으로 근사화할 때, 정보의 손실이 발생하는데, 이러한 신호를 잔여신호(residual signal)라고 하며,  $V_m$ 의 직교 여 부공간  $W_m$ 상에 존재한다. 상하위 해상도 공간과 직교하는 공간 사이의 관계는 식(5)와 같고, Fig. 1에서 이상적인 저대역 부공간  $V_m$ 와 밴드 대역 부공간  $W_m$ 들의 스펙트럼을 나타내었다.

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m, \quad V_m \perp W_m \quad (5)$$

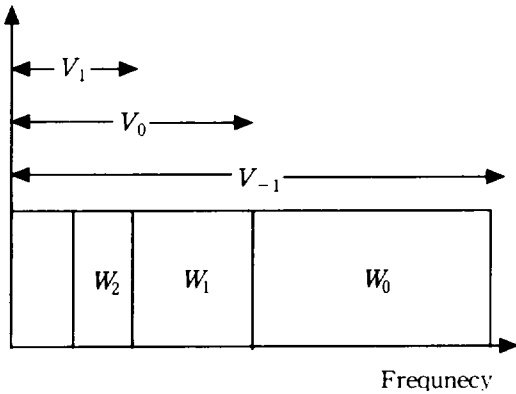


Fig. 1. Spectrum of  $V_m$  and  $W_m$ .

부공간  $V_m$ 의 스케일 함수  $\phi(t)$ 와 유사하게 부공간  $W_m$ 을 구성하는 정규직교 기저가 존재하며 기저를 생성하는 모 웨이브렛  $\psi(t)$ 가 존재한다. 식(6)에서와 같이 각 부공간의 기저는 웨이브렛  $\psi(t)$ 을 스케일링과 시간천이를 수행함으로써 생성된다.

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), \quad m, n \in Z \quad (6.a)$$

$$x_{m-1}(t) = x_m(t) + r_m(t) \quad (6.b)$$

$$r_m(t) = \sum_n \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (6.c)$$

하나의 해상도 부공간은 더 낮은 해상도 부공간과 직교 여 부공간으로 표현가능하고, 반복적용을 하면 여 부공간만으로 표현가능하다. 따라서, 식(7)과 같이 신호  $x(t)$ 는  $W_m$ 의 기저들로 표현할 수 있다.

$$V_m(t) = W_m \oplus W_{m-1} \oplus W_{m-2} \dots \quad (7.a)$$

$$L^2(R) = \bigcup_m (\oplus W_m), \quad m \in Z \quad (7.b)$$

$$x(t) = \sum_{m,n} \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (7.c)$$

한편  $\phi(t) \in V_m$ 이면  $\phi(2t) \in V_{m-1}$ 이고, 식(8)과 같은 관계를 만족한다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2t - n), \quad n \in Z \quad (8.a)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \psi(2t - n), \quad n \in Z \quad (8.b)$$

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (8.c)$$

$$g(n) = (-1)^n h(1-n) \quad (8.d)$$

$$\sum_n g(n) = 0 \quad (8.e)$$

신호  $x(t)$ 에 대해  $c_{mn} = \langle x(t), \phi_{m,n}(t) \rangle$ ,  $d_{mn} = \langle x(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$ 일 때, 부공간  $V_m$ ,  $W_m$ 과  $h(n)$ ,  $g(n)$ 간의 관계는 2진 트리 구조를 형성한다.

### III. 영상의 다해상도 표현

영상과 같은 2차원 신호를 웨이브렛 변환하면 Fig. 2처럼 4개의 성분으로 나누어진다. 나누어진 영상은 가장 에너지 분포가 높은 저 레벨 대역과 수평 성분, 수직 성분, 대각 성분으로 구성된다.

입의 영상  $f(x, y)$ 는 수평 방향으로 필터링되어 저주파 성분인  $f_L(x, y)$ 와 고주파 성분인  $f_H(x, y)$ 로 나누어지고  $f_L(x, y)$ 와  $f_H(x, y)$ 의 대역은 원 신호의 반이기 때문에 수평 방향으로 downsampling을 해준다. 그리고  $f_L(x, y)$ 와  $f_H(x, y)$ 을 다시 수직 방향으로 필터링함으로써 4개의 부영상을 얻는다. 즉,  $f_{LL}$ ,  $f_{LH}$ ,  $f_{HL}$ ,  $f_{HH}$  4개의 부영상을 얻는다.  $f_{LH}$ 는 영상의 수평 성분을 강조하고,  $f_{HL}$ 은 수직 성분을,  $f_{HH}$ 는 대각 성분을 강조한다.

2차원 영상의 복원은 각 방향의 세부적인 영상들을 수직방향으로 upsampling 한 후 각각의 영상들을 수

직방향으로 적절히 필터링을 한다. 이런 과정이 다시 수평 방향으로 이루어져 최종적인 복원된 영상을 얻는다.

LL Approximation	LH Horizontal
HL Vertical	HH Diagonal

Fig. 2. Image analysis using wavelet transform.

#### IV. 임계치 기법을 이용한 잡음제거

일반적으로 잡음이 첨가된 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = x + n \quad (9)$$

여기서  $x$ 는 원 신호이고  $n$ 은 백색잡음이다.

식(9)의 양변에 웨이브렛 변환을 취하여 신호  $x$ 에 대한 웨이브렛 변환 계수를  $\{s_{j,k}\}$ , 잡음  $n$ 에 대한 웨이브렛 변환 계수를  $\{e_{j,k}\}$ 라 하고 잡음화된 신호  $y$ 에 대한 웨이브렛 변환 계수를  $\{w_{j,k}\}$ 라 하면 식(10)과 같이  $w_{j,k}$ 를 원래 신호  $s_{j,k}$ 와 웨이브렛 영역에서도 백색 잡음의 특성이 유지되는 잡음  $e_{j,k}$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$w_{j,k} = s_{j,k} + e_{j,k} \quad (10)$$

여기서  $j$ 는 스케일링 변수이고  $k$ 는 천이 변수이다.

식(10)에서 최소 risk 함수  $R(\hat{x}, x)$ 를 갖는 추정치  $\hat{x}$ 를 찾는 문제는 신호와 잡음의 특성이 잘 분리된 웨이브렛 영역에서 최소 risk 함수  $R(\hat{s}, s)$ 를 갖는 추정치  $\hat{s}_{j,k}$ 를 구하는 문제로 전환되어진다.

추정치  $s_{j,k}$ 를 구하는데 임계치 기법은 hard-threshold와 soft-threshold 방법을 사용하여 웨이브렛 영역에서 잡음을 제거하였다.<sup>3,4)</sup> 이 방법을 수식적으로 표현하면 웨이브렛 계수  $w_{j,k}$ 와 임계치  $\lambda$ 에 대해, soft-threshold는

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} - \lambda & \text{if } w_{j,k} > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| \leq \lambda \\ w_{j,k} + \lambda & \text{if } w_{j,k} < -\lambda \end{cases} \quad (11)$$

이고, hard-threshold는

$$\hat{s}_{j,k} = T(w_{j,k}) = \begin{cases} w_{j,k} & \text{if } |w_{j,k}| > \lambda \\ 0 & \text{if } |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (12)$$

이다. 여기서  $\lambda$ 는 임계치이며 그 값은  $\sigma\sqrt{2\log(n)}$ 이다.  $\sigma$ 는 잡음의 표준편차이고  $n$ 은 원 신호의 길이이다. 이와 같이 추정된  $\hat{s}_{j,k}$ 를 역 웨이브렛 변환하면 원 신호  $x$ 에 대한 추정치  $\hat{x}$ 를 얻는다.

#### V. 대역별 임계치 적용 기법

Donoho가 제안한 임계치 기법은 웨이브렛 변환을 이용하여 영상을 다해상도로 분해했을 때 각 대역 성분의 특성에 관계없이 일괄적으로 soft-threshold나 아니면 hard-threshold 기법을 사용하였다. 이 기법은 영상의 잡음을 제거하는데 어느 정도 우수한 성능을 보였으나 각 대역별 특성을 고려하지 않아서 완전히 잡음을 제거하지는 못했다. 이 논문에서 제안한 대역별 임계치 적용 기법은 영상을 Fig. 3에 나타난 것처럼 웨이브렛 변환을 이용하여 다해상도로 분해한 후 영상의 대역별 특성을 고려하여 임계치를 적용하였다.

웨이브렛 변환으로 분해된 부밴드 영상들은 서로 다른 통계적인 특성을 갖는다. 다른 단계의 부밴드 영상 계수들의 절대치 간에도 일정한 상관성이 존재하는데, 약 0.3정도의 값을 갖는 것으로 알려져 있다.

웨이브렛 변환을 이용하여 영상이 다해상도로 분해된 대역인 LL밴드, LH밴드, HL밴드 및 HH밴드들

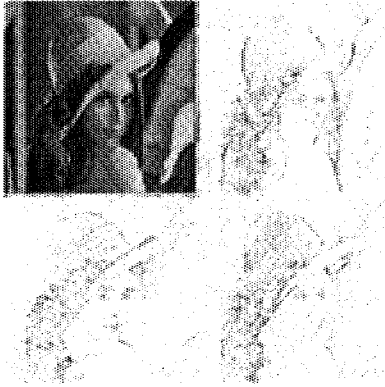


Fig. 3. Multi-resolution analysed image.



Fig. 5. Original image.

은 각기 다른 통계적 특징을 가지고 있다. LL밴드 영상은 저주파 통과 필터를 거친 영역으로서 원래 영상보다 해상도가 반으로 줄어든 결과를 갖는다. 그러나 원 영상 신호가 가지는 에너지의 대부분을 가지고 있기 때문에 복원 영상에 미치는 영향이 가장 큰 대역이다. 이처럼 상대적으로 중요한 정보를 담고 있기 때문에 LL밴드의 계수는 잡음의 계수보다 큰 계수들이 많다. 따라서 임계치보다 큰 절대값을 가진 계수들은 남겨두고 임계치보다 작은 절대값을 가진 계수들은 없애는 hard-threshold기법을 적용한다. 그리고 LL밴드 특성에 비해 비교적 중요하지 않은 LH밴드, HL밴드와 HH밴드에서는 각 밴드의 웨이브렛 계수가 잡음의 계수와 비슷하다. 따라서 각 밴드의 웨이브렛 계수와 잡음 계수의 차를 이용하는 soft-threshold기법을 적용한다. 이 과정을 블록도로 나타내면 Fig. 4와 같다.



Fig. 6. Noised image.

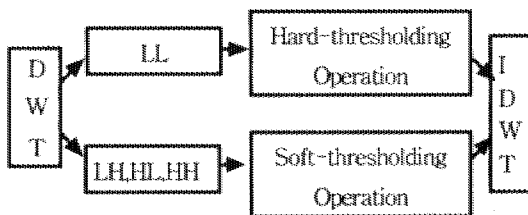


Fig. 4. Block diagram of the proposed method.

### VI. 모의 실험 및 결과

본 논문에서는 Lena 영상을 가지고 시뮬레이션 하

였으며 영상의 크기는 512×512인 흑백 영상으로 명도는 0~255의 값을 가지며, Fig. 5에 나타내었다. Lena 영상의 특성을 살펴보면 대체적으로 평활한 영상이다. 다분해 해상도를 위한 웨이브렛 필터는 필터간의 직교성과 완전 복원성이 우수한 Coiflets 함수를 사용하였다. 그리고 잡음은 백색 가우시안 잡음을 사용하였다.

Fig. 6은 원 영상에 백색 가우시안 잡음을 첨가한 영상이다. 이 잡음화된 영상을 각각 Donoho의 hard-threshold기법과 soft-threshold기법과 제안한 방법에 의해 잡음을 제거하였고 비교하기 위해서 각각의 PSNR(peak signal to noise ratio)을 구하고 그 결과를 Table 1에 나타내었다. PSNR은 두 영상의 차이를 제공한 값들의 평균인 MSE(mean square errors)를 이용하여 계산하였는데, 이것은 두 영상의 유사성

을 비교하여 복원력을 나타내는 척도가 된다. MSE와 PSNR은 다음과 같이 정의된다.

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad dB \quad (13)$$

$$MSE = \frac{1}{N \times M^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^M [u(m, n) - \hat{u}(m, n)]^2 \quad (14)$$

여기서  $u(m, n)$ 과  $\hat{u}(m, n)$ 은 각각 원 영상과 처리된 영상 함수를 나타낸다. 그리고  $N$ 은 원 영상의 수평 크기이고  $M$ 은 원 영상의 수직 크기이다.

Table 1. PSNR about each method

	hard-threshold 기법	soft-threshold 기법	제안한 기법
PSNR [dB]	29.0146	27.9806	30.772



Fig. 7. Denoised image by hard-threshold.



Fig. 8. Denoised image by soft-threshold.



Fig. 9. Denoised image by proposed method.

Table 1을 보면 기존의 hard-threshold 기법에 비해서는 제안한 기법이 약 0.7 dB, soft-threshold 기법에 비해서는 약 2.8 dB 정도 향상되었음을 보인다. 그리고 각 기법으로 잡음 제거된 영상은 Fig. 7, 8, 9에 나타나 있다.

## VI. 결론

본 논문에서는 웨이브렛 변환을 이용하여 영상 신호를 다해상도로 분해하고 잡음이 첨가된 영상의 잡음을 제거하는 기법에 대하여 제안하였다. Donoho가 제안하였던 임계치 기법을 영상의 대역별 특성에 대해 각기 다른 임계치 기법을 적용하여 잡음을 제거하였다.

Donoho의 임계치 기법은 다해상도로 분해된 영상의 각 대역별 특성을 고려하지 않고 일괄적으로 hard-threshold 기법이나 soft-threshold 기법을 적용하였다. 본 논문에서는 영상을 웨이브렛 변환을 이용하여 LL밴드, LH밴드, HL밴드와 HH밴드로 분해하여 영상의 중요 성분을 포함하고 있는 LL밴드에서는 hard-threshold를 적용하고 그 외의 영상의 수평 성분을 가지는 LH밴드, 영상의 수직 성분을 가지는 HL밴드와 영상의 대각 성분을 가지는 HH밴드에서는 soft-threshold를 사용하였다.

본 논문에서는 실험 데이터로 사용된 512×512인 Lenna 영상에 대하여 Donoho가 제안한 임계치 기법과 본 논문에서 제안한 영상의 대역별 특성에 따른

임계치 기법의 화질을 비교하여 객관적인 척도인 PSNR을 비교 분석하여 보았다. 그 결과 Donoho가 제안한 임계치 기법 중에 hard-threshold 기법으로만 잡음을 제거한 경우와 soft-threshold 기법만으로 잡음을 제거한 경우보다 본 논문에서 제안한 영상의 대역별 특성에 따른 임계치 적용 기법이 각각 약 0.7 dB와 약 2.8 dB 정도 향상되었다.

### 참고문헌

- 1) G. K. Wallace. 1992. The JPEG still picture compression standard. IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol.38, No.1.
- 2) S. G. Mallat. 1989. A theory for multiresolution signal decomposition the wavelet representation". IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., Vol.11, pp.674-693.
- 3) D. L. Donoho and I. M. Johnstone. 1994. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. Biometrika Vol.81, pp.425-455.
- 4) D. L. Donoho and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage". journal of the American Statistical Association, pp.1200-1224.
- 5) A. Lewis and G. Knowles. 1992. Image compression using the 2-D wavelet transform. IEEE Trans. Image Processing, Vol.1, pp.244-250.
- 6) J. W. Woods and S. O'Neil. 1986. Subband coding of images. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.34, pp.1278-1288.
- 7) I. Daubechies. 1992. Ten Lectures on Wavelets. SIAM.
- 8) C. S. Burrus, R. A. Gopinath, H. Guo. 1998. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A primer. Prentice-Hall, 268pp.
- 9) I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Comm. in Pure and Applied Math. Vol.41, pp.909-996.
- 10) M. Vletterli. 1984. Multi-dimensional Sub-band Coding. Signal Processing, Vol.6, No.2, pp.97-112.
- 11) 김충락, 송현중, 장대홍, 홍창곤. 1999. 웨이브렛의 기본이론과 통계에의 응용. 아르케. 212pp.
- 12) S. Mallat and W. L. Hwang. 1992. Singularity Detection and Processing with Wavelets. IEEE Transactions on Information Theory, Vol.38, No.2.