

경량의 연계 구조물의 정적 평형

은 회 창* · 서 일 교*

Static Equilibrium of Structure Linked by Lightweight Members

Hee-Chang Eun* and Ill-Gyo Suh*

ABSTRACT

This paper determined the static equilibrium positions of linked bar structures. The static equilibrium positions are defined as the ones to minimize the variation of potential energy and can be obtained from the equation of motion at freezing time. Assuming each bar of the structure as a rigid body, the equation of motion for the structure must satisfy its rigid body condition. In order to combine both the equation of motion and the constraint equation, it is necessary to numerically calculate a weighting matrix to minimize the variation of potential energy and the generalized inverse method gives an explicit weighting matrix. Thus, with the modification of the generalized inverse method to explicitly describe the constrained motion, this paper presented a simple method to determine the equilibrium positions of linked bar structures, and the validity of the method was illustrated by two simple bar structures.

Key Words : Constraint, Static equilibrium, Generalized inverse matrix

1. 서론

모든 구조물이나 기계적인 장치들에 대한 동적인 해석은 기본적으로 정적 평형(static equilibrium) 상태에서부터 시작된다. 즉, 초기 상태들이 정적 평형 상태를 불만족할 경우에 그 구조물의 동적 해석은 불가능하게 된다. 동적 시스템의 정적 평형은 정지된 시간을 근거로 산정되므로 운동방정식에서 속도나 가속도 성분들은 제거된다.

최근의 구조물들은 대형화 및 장경간화 추세에 있

으며, 이에 대한 동적 해석의 필요성이 대두되고 있다. 장경간 구조물은 지붕을 형성하는 부분으로 또한 경량화 추세에 있다. 그러므로 이들 경간 해당 부분에 휨 강성은 현저히 낮으므로 불안정한 상태에 있을 수 있으므로 안정화 과정(stabilizing process)에 의해 즉, 정적 평형 상태를 결정할 필요가 있다.

장경간 구조체를 이루는 각 bar 부재를 강체라고 가정한다면 이 조건을 만족하는 무한 경우의 정적인 상태가 존재한다. 이러한 강체 조건은 평형 방정식에 추가로 주어지는 식으로 미지의 변위 보다 지배하는 방정식의 수가 많으므로 그 해는 무한대가 된다. 따라서, 가중 행렬(weighting matrix) 등을 사용하여 그 해를 결정하려는 많은 시도들이 있었다. 그러나 가중 행렬을 결정하는 대부분의 방법은 라그랑지 승수법과

* 제주대학교 건축공학과, 첨단기술연구소
Faculty of Architectural Engineering, Res. Inst. Adv. Tech., Cheju Nat'l Univ.

같이 수치 해석에 의한다. 특히 라그랑지는 상태 변수와 시간에 관한 함수로 이를 명백한 수식으로 표현하지 못하므로 강체를 고려한 구조물의 정적 평형 상태를 결정하는데 어려움이 있다.

김재열 등[1],[2]은 트러스의 각 부재가 강체(rigid body)라고 가정하고, 강체 조건을 만족하는 여러 해들 중에서 포텐셜 에너지(potential energy)의 변화량이 최소가 되는 점을 찾아 이를 정적 평형 상태로 결정하였다. 이 해석법은 일반화된 역행렬을 사용하여 포텐셜 에너지를 최소로 취하는 미지의 벡터를 수치 해석에 의하여 결정하며, 따라서 비선형의 관계식에서는 계산 과정도 복잡한 어려운 점이 있다. 또한 강체의 질량을 무시하여 그 해석법을 간략화하였다.

1992년 Udawadia와 Kalaba[3]가 제안한 일반화된 역행렬법(generalized inverse method)은 라그랑지 승수를 도입하지 않고 제약 조건이 주어질 경우에 그 운동을 묘사할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 방법은 명확한 2차 미분 방정식의 형태로 제약 조건이 주어질 경우에 그 역학적인 특성을 규명할 수 있는 큰 장점이 있다. 이 방법의 타당성과 유일성 등이 여러 면에서 검토되고 있다[5],[6]. 그러나 미분방정식을 수치 적분을 행한 그 결과들이 구속 조건을 불만족하는 오차들이 발생하는 것을 볼 수 있다.

따라서, 본 연구에서는 오차를 최소로 줄이기 위해 일반화된 역행렬법을 수정하여 정적 평형 상태를 결정하였다. 또한, 정적 평형 상태를 결정하는 에너지법, 평형 접근법, 그리고 동적 해석법 중에 강체의 질량에 의한 관성력을 포함하는 동적 해석법을 택하였으며, 강체의 기하학적 특성에 의한 제약 조건을 포함하였다. 유도된 식은 비선형의 연립방정식으로 그 풀이는 최적화(optimization)법에 의해 정적 평형 상태를 결정하였다. 또한, 경간 양단의 수직 레벨이 동일한 경우와 다른 경우에 bar 구조물의 정적 평형 상태를 예를 들어 적용하였으며, 그 타당성을 검증하였다.

II. 일반화된 역행렬법

여러 부재들로 이루어진 구조체는 이들 부재들의 자유도에 의해 운동이 묘사된다. 이 운동방정식

은 일반적으로 라그랑지 역학이나 뉴우튼 역학에 의해 다음과 같은 형태로 유도된다. n 개의 변위 $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ 로 그 운동이 묘사되는 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{q} = F(\dot{q}, q, t) \quad (1)$$

여기서, 질량 행렬 M 은 $n \times n$ 대칭행렬을, F 는 일반화된 힘의 벡터를 나타낸다.

식 (1)과 같이 주어진 구조물의 정적 평형 상태는 좀처럼 결정하기 어렵다. 구조물에 지지 조건이 부여되고 특히 구조체가 경량이라고 가정된 정적 평형 상태는 때때로 불안정 상태를 일컫을 수 있다. 불안정한 상태는 동적 해석에 의해 붕괴로 이어지기 때문에 이에 대한 검토가 반드시 필요하다.

따라서 본 연구에서는 동적 거동을 하는 동안 이들 모든 부재의 길이에는 변화가 없는 각 부재를 강체라고 가정함으로써 이를 제약 조건으로 볼 수 있다. 이 제약 조건은 다음과 같은 형태로 정의된다.

$$\phi_i(q, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n \quad (2)$$

이 제약 조건들은 부재들의 거동을 묘사하는 총 자유도의 수 보다 작으며 이 조건들은 비선형 관계에 있다. 많은 제어 이론들에 의하면 비선형 시스템을 선형화하여 그 계산을 단순화시킨다. 식(2)의 조건을 만족하는 변위들의 수는 방정식의 수 보다 많으므로 그 조건을 만족하는 해는 무한대이며, 비선형 관계일 경우에는 그 접근법이 매우 복잡하다.

일반화된 역행렬법은 Gauss 원리를 근거로 구속되지 않은 시스템의 가속도 성분과 구속 조건으로부터 산정된 가속도 사이의 차를 최소로 하는 값을 구속된 시스템의 가속도로 정의하였다. 식(2)의 조건을 가속도 성분으로 표현하기 위하여 시간에 관해 각각 두 번 미분을 취하면 다음의 식을 얻는다.

$$\dot{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 0 \quad (3a)$$

$$\ddot{\phi}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k +$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0$$

$$i=1, 2, \dots, m \quad (3b)$$

Udwadia와 Kalaba가 제안한 일반화된 역행렬법은 가속도 성분인 식(3b)만을 사용하여 구속된 시스템의 운동방정식을 2차 미분방정식으로 제안하고 있다. 그러나 이 미분방정식을 수치 적분한 결과들은 식(2)의 조건을 만족하지 않는 경향이 있다[4]. 식(3b)외에 식(2)와 (3a)를 충족시키기 위하여 다음과 같이 이들 식들을 조합할 수 있다.

$$\ddot{\phi}_i + \dot{\phi}_i + \phi_i = 0 \quad (4)$$

식(4)를 사용할 경우에 제약 조건을 불만족하는 오차들은 줄어들게 된다. 따라서, 보다 정밀한 해를 얻기 위하여 일반화된 역행렬법을 수정하여, 식(4)를 다음과 같은 형태의 행렬로 표현하였다.

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (5)$$

여기서, 계수 행렬 A는 $m \times n$ 의 장방형 행렬이 되며, 식(5)를 가속도 벡터에 관한 풀이는 실제의 가속도가 되나 그 해는 무한하게 존재한다. 따라서, Gauss의 원리를 사용하여 식(1)의 구속되지 않은 시스템의 가속도와 식(5)의 구속 조건식을 조합하여 제약 조건이 주어졌을 경우에 그 구조물의 운동방정식은 다음으로 유도된다.

$$\ddot{q} = a(q, \dot{q}, t) + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (6)$$

여기서, '+'는 일반화된 역행렬¹⁾(generalized inverse)을 나타내며, 식(1)에서 $a = M^{-1}F$ 으로 구속되지 않은 시스템의 가속도를 나타낸다. 이 식에서 $M^{1/2}(AM^{-1/2})^+$ 는 자유 진동시에 가속도 성분과 제약 조건을 만족하는 가속도와 차에 대한 가중 행렬로 이는 Gauss의 원리로부터 얻을 수 있다.

정적 평형 상태는 포텐셜 에너지의 변화량이 최소인 점으로 안정 상태를 일컫는다. 따라서, 포텐셜 에너지와 관련이 있는 변위 벡터와 강성 행렬의 곱 형태에서 산정된다. 그러므로 $a = M^{-1}F(q)$ 를 식(6)에

사용하고, 동적 해석법에 의해 정적 평형 상태를 결정할 수 있다. 여기서, $F(q)$ 는 단지 변위에 관한 벡터를 포함하는 일반화된 힘의 벡터를 나타내며, 시간을 멈춘 상태에 해당하므로 속도나 외란은 모두 무시한다. 즉, 정적인 상태의 방정식은 다음으로 표현된다.

$$M^{-1}F(q) + M^{-1/2}(A_1M^{-1/2})^+(b_1 - A_1M^{-1}F(q)) = 0 \quad (7)$$

여기서, 행렬 A_1 과 벡터 b_1 는 변위들만에 의해 이루어진다. 식(7)은 정적인 상태에서 식(1)의 운동방정식과 식(2)의 제약 조건을 동시에 설명하는 정적 평형인 상태에 해당된다. 식(7)의 정적 평형 상태는 다음과 같은 방정식으로도 표현된다.

$$K^*q = F^* \quad (8)$$

여기서,

$$K^* = [I - M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ A_1M^{-1}]K$$

$$F^* = [I - M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ A_1M^{-1}]F$$

$$+ M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ b_1$$

식(8)의 풀이는 정적 평형 상태에 해당된다. 다음에서는 단진자에 대해 위의 방법을 사용하여 정적 평형 상태를 결정한다.

III. 3개의 봉으로 연결된 구조물

Fig. 1에서와 같이 3개의 봉이 연결된 구조물의 정적 평형 상태를 고려하자. 그림의 구조체의 좌측으로부터 1, 2, 3번으로 명명하고, 각 부재의 질량을 m_1, m_2, m_3 라 하고, 길이를 l_1, l_2, l_3 , 질량에 관한 단면 2차 모멘트 I_1, I_2, I_3 , 그리고 각 부재의 회전각을 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 라 하면 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1C_{12} & B_2C_{31} \\ B_1C_{12} & A_2 & B_3C_{23} \\ B_2C_{31} & B_3C_{23} & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

1) $(AA^T)^T = AA^T, (A^T A)^T = A^T A,$
 $AA^T A = A, A^T AA^T = A^T$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_3 C_{31} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & B_1 S_{12} & -B_2 S_{31} \\ -B_1 S_{12} & 0 & B_3 S_{23} \\ B_2 S_{31} & -B_3 S_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서

$$A_1 = I_1 + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 \right) l_1^2,$$

$$A_2 = I_2 + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) l_2^2,$$

$$A_3 = I_3 + \frac{m_3}{4} l_3^2,$$

$$B_1 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2,$$

$$B_2 = \frac{m_3}{2} l_1 l_3,$$

$$B_3 = \frac{m_3}{2} l_2 l_3,$$

$$G_1 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) g l_1,$$

$$G_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) g l_2,$$

$$G_3 = \frac{m_3}{2} g l_3$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j),$$

$$S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j).$$

이들 운동방정식으로부터 비선형 관계에 있음을 볼 수 있으나, 선형화를 취하지 않고 운동을 묘사할 수 있다.

이 구조물은 양단부에 단순지지되어 있으므로 부재의 전체 길이와 수직 높이가 제약될 것이다. 그러므로 이들은 다음과 같은 수식으로 정의된다.

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = z_2 \quad (10a)$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 = z_1 \quad (10b)$$

만약 지점의 수직 높이에 차이가 없다면 $z_1 = 0$ 이 된다.

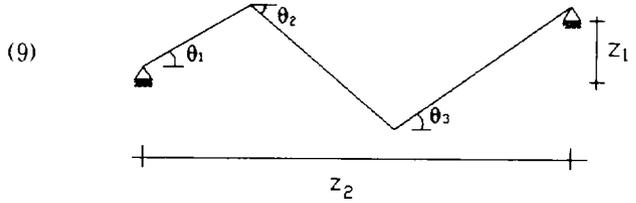


Fig. 1. A structure formed by three bars.

식(10)은 Fig. 1에서와 같은 구조물의 운동을 제약하는 조건으로 이를 시간에 관해 두 번 미분을 취하여 다음과 같은 $A \ddot{\theta} = b$ 형태의 방정식을 얻는다.

$$A = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{12} + b_{13} \\ b_{21} + b_{22} + b_{23} \end{bmatrix} \quad (11b)$$

$$b_{11} = -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$b_{12} = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3$$

$$b_{13} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - z_2$$

$$b_{21} = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$b_{22} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3$$

$$b_{23} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - z_1$$

$$A_1 = A, \quad b_1 = [b_{13} \quad b_{23}]^T \quad \text{및} \quad K^* = 0 \text{을 식(8)}$$

에 사용하고 다음의 정의와 $F^* = 0$ 에 의해 정적 평형 상태를 결정할 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_2 C_{31} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 \end{bmatrix},$$

$$F = - \begin{bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

정적 평형은 $F^* = 0$ 를 만족하는 값으로 이 식은 비선형의 연립방정식으로, 그 해를 결정하기 위해서는 적절한 수치 해석 기법을 요한다. 그리하여 본 연구에서는 비선형 해석 프로그램인 MATLAB의 optimization

프로그램을 사용하여 얻었다. 수치 해를 얻기 위하여 Fig. 1의 구조물에 대한 물리적인 특성을 다음으로 가정하였다.

$$g=9.8, m_1=m_3=2, m_2=3$$

$$l_1=1000, l_2=2000, l_3=500 \quad (13)$$

또한 초기 불안정한 상태에서 각 봉의 각과 이에 따른 수평 길이와 수직 높이는 다음과 같이 가정하였다.

$$\theta_1 = -\pi/3, \theta_2 = \pi/3, \theta_3 = \pi/3$$

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = 1750$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 = 1299 \quad (14)$$

식(13)과 (14)의 성질을 사용하고, 제약 조건으로 $z_1 = 1750, z_2 = 0$ 상태를 만족하는 정적 평형 상태를 결정하였다. 그 해석의 결과 정적 평형 상태는 다음으로 계산되었다.

$$\theta_1 = -1.6933, \theta_2 = 0.251, \theta_3 = 1.7014 \quad (15)$$

여기에서 보는 바와 같이 구속된 운동방정식으로부터 그 관계가 비선형일지라도 정적 평형 상태에 관한 명확한 수식을 얻었으며, 이 수식을 비선형 방정식의 풀이에 의해 그 해를 얻을 수 있었다.

양단의 높이에 차이가 날 경우에도 매우 유용하게 적용될 수 있으며, 예를 들어 $z_1 = 1750, z_2 = -500$ 로 제약 조건을 부여한 경우에도 동일한 해석법에 의해 다음과 같은 정적 평형 상태를 얻을 수 있다.

$$\theta_1 = -1.7383, \theta_2 = -0.0035, \theta_3 = 1.7381 \quad (16)$$

IV. 5개의 봉으로 연결된 구조체의 정적 평형

앞선 적용 예를 근거로 Fig. 2와 같은 5개의 봉으로 연결된 구조물의 정적 평형 상태를 결정하였다. 이 구조물의 운동방정식 또한 비선형 관계로 제약 조건은 다음으로 정의된다.

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 = z_2$$

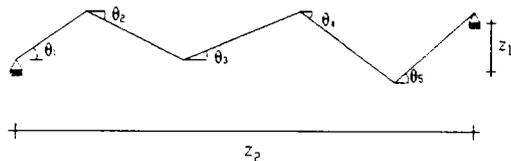


Fig. 2. A structure formed by five bars.

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 = z_1 \quad (17)$$

유사하게 이 구조물에 대한 정적 평형 방정식은 다음과 같은 식들에 의해 식(8)의 형태로 결정된다.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_2 C_{31} & B_4 C_{41} & B_5 C_{51} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} & B_6 C_{24} & B_7 C_{25} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 & B_8 C_{34} & B_9 C_{35} \\ B_4 C_{41} & B_5 C_{24} & B_6 C_{34} & A_4 & B_{10} C_{45} \\ B_5 C_{51} & B_7 C_{25} & B_8 C_{35} & B_{10} C_{45} & A_5 \end{bmatrix}$$

$$F = - \begin{bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \\ G_4 \cos \theta_4 \\ G_5 \cos \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 & l_4 \sin \theta_4 & l_5 \sin \theta_5 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 & l_4 \cos \theta_4 & l_5 \cos \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 l_i \cos \theta_i - z_2 \\ \sum_{i=1}^5 l_i \sin \theta_i - z_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$A_1 = I_1 + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_1^2$$

$$A_2 = I_2 + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_2^2$$

$$A_3 = I_3 + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_5 \right) l_3^2$$

$$A_4 = I_4 + \left(\frac{m_4}{4} + m_5 \right) l_4^2$$

$$A_5 = I_5 + \frac{m_5}{4} l_5^2$$

$$B_1 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_1 l_2$$

$$B_2 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) l_1 l_3$$

$$B_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) l_2 l_3$$

$$B_4 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_1 l_4.$$

$$B_5 = \frac{m_5}{2} l_1 l_5.$$

$$B_6 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_2 l_4.$$

$$B_7 = \frac{m_5}{2} l_2 l_5.$$

$$B_8 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_3 l_4.$$

$$B_9 = \frac{m_5}{2} l_3 l_5.$$

$$B_{10} = \frac{m_5}{2} l_4 l_5.$$

$$G_1 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \right) g l_1.$$

$$G_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_5 \right) g l_2.$$

$$G_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) g l_3.$$

$$G_4 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) g l_4.$$

$$G_5 = \left(\frac{m_5}{2} \right) g l_5.$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j).$$

$$S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j).$$

수치 결과를 얻기 위하여 다음과 같은 물리적인 특성과 초기 조건을 사용하였다.

$$g = 9.8, \quad m_1 = m_3 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_4 = 1.5,$$

$$l_1 = 500, \quad l_2 = 200, \quad l_3 = 500, \quad l_4 = 350, \quad l_5 = 130$$

$$m_5 = 1.2, \quad \theta_1 = -\pi/3, \quad \theta_2 = \pi/10, \quad \theta_3 = \pi/5,$$

$$\theta_4 = -\pi/4, \quad \theta_5 = \pi/3$$

$$\begin{aligned} & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ & + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 = 1157 \\ & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \\ & + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 = -336 \end{aligned} \quad (19)$$

위의 조건들과 제약 조건에서 $z_1 = 1350$, $z_2 = -500$ 에 해당하는 정적 평형 상태는 다음과 같이 계산되었다.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -1.011, \quad \theta_2 = -0.735, \quad \theta_3 = -0.210, \\ \theta_4 &= 0.2646, \quad \theta_5 = 0.5724 \end{aligned} \quad (20)$$

또한 $z_1 = 1400$, $z_2 = 0$ 과 같이 양단의 지점의 수직 고저차가 없는 것을 제외하고 모든 것이 동일할 경우에 다음과 같은 해석 결과를 얻었다.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0.7864, \quad \theta_2 = -0.3538, \quad \theta_3 = 0.2574, \\ \theta_4 &= 0.6148, \quad \theta_5 = 0.8087 \end{aligned} \quad (21)$$

이들 예제들에서 보는 바와 같이 질량을 무시하지 않은 구조체에 제약 조건이 주어질 경우에 제약 조건을 만족하는 정적 평형의 상태를 명확히 결정할 수 있음을 보였다. 이 방법은 명백한 평형방정식의 결과와 이 연립방정식의 풀이를 위한 수치 해석 기법을 요한다. 이는 제약 조건이 주어졌을 경우에 기존의 수치 해석법과 접근 방법이 다르다. 특히 그 관계 조건식이 비선형일 경우에도 용이하게 접근할 수 있음을 보였다.

V. 결 론

최근 들어 구조물들은 경량화 및 장경간화 하는 경향이 있으며, 횡하중으로서 풍하중이나 지진 하중 등과 같은 하중에 저항하도록 설계를 요구하고 있다. 이 때에 구조물들의 해석이나 설계에서 정적인 평형 상태를 요구한다.

정적 평형은 포텐셜 에너지의 변화량이 최소로 되는 상태이다. 이는 어떠한 제약 조건이 주어질 경우에 자연의 평형 법칙을 만족하여야 하는 것을 의미한다. 그러므로 제약 조건 및 정적인 평형 상태를 동시에 만족하여야 한다. 따라서 본 연구에서는 이러한 두 관계 조건을 동시에 만족하는 방법으로서 Udwadia와 Kalaba가 제안한 일반화된 역행렬법을 일부 수정하여 새로운 형태의 운동방정식으로부터 정적 평형 상태를 나타내는 지배 방정식을 유도할 수 있으며, 단지 그 해를 얻기 위해 수치 해석 기법을 사용하였다. 이를 적용한 bar 구조물의 정적 평형 상태를 결정하였으며, 그 과정에 의해 제시된 방법의 타당성 및 용이함을 보였다.

참고문헌

- 1) 김진우, 김재열, 권택진, 2001, 일반역행렬을 이용

- 한 불안정 Link 구조물의 형태 해석에 관한 연구, 대한건축학회 학술발표논문집, 제14권 1집, pp.183-186.
- 2) 김재열, 김진우, 권택진, 2001, 일반역행렬을 이용한 불안정 트러스 구조물의 최적 안정화 이행 과정에 관한 연구, 대한건축학회논문집, 제17권 9호, pp133-142.
- 3) F. E.Udwadia, R. E. Kalaba, 1992, A New Perspective on Constrained Motion, Peceedings of the Royal Society, of London, pp.407-410.
- 4) 은희창, 정현수, 1997, 구속된 시스템 운동방정식의 수치 해석에 관한 연구, 한국소음진동공학회지, 제 7권 5호, pp.773-780
- 5) H.C. Eun, K.H. Yang, H.S. Chung, 2002, Dynamic optimization algorithm of constrained motion, KSME International Journal, Vol.16, No.8, pp.1072-1078.
- 6) F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, H.C. Eun, 1997, Equations of Motion for constrained Mechanical Systems and the Extended D'Alembert's Principle, Quarterly of applied mathematics, Vol.LV, No.2, pp.321-331.