濟州大學校 白鹿論叢 第3集(2001. 5. 15)

미분민감성을 이용한 위험관리의 수리적 이론*

강 승 필**
고 봉 수***

目 次

Ⅰ. 서 론
Ⅱ. 미분민감성(Greeks)을 이용한 위험관리
Ⅲ. 불확실한 변동성 모델들
Ⅳ. 결 론

I. 서론

1973년 피셔 블랙(Fisher Black)과 마이런 숄즈(Myron Scholes)는 주식옵션(Stock Option) 가격이론에 대하여 투자와 옵션의 일반적인 개념을 도입하고 난 후 위너과정(Wiener Process)으로 표현되는 주가변동모델에서 이토의 보조정리(Ito's Lemma)를 이용하여 주식옵션 가격결정모형인 블랙-숄즈 미분방정식으로 수리적 모형을 구성하였다. 즉, 행사가격이 K이고 만기가 T인 주식콜옵션의 가치는 다음 미분방정식을 만족한다.

$$\begin{cases} C_t + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0, \\ C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0). \end{cases}$$

여기서 S_t는 시간 t일 때 주가, $C = C(S_t, t)$는 시간 t일 때 주식콜옵션의 가치, r은 금리, 그리고 σ는 주가의 변동성이다. 이 문제의 명확한 해는 다음과 같이 블랙-숄즈 공식

* 이 논문은 2000년 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었음.(KRF-2000-D1102)
** 수학교육과 강사
*** 수학교육과 교수

으로 알려져 있다.

$$C(S,t;K,T;r,\sigma) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

여기서

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\left(\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

그리고

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

최종조건을 $\max(K - S_T, 0)$로 대치함으로서 유럽식 풋에 대한 비슷한 공식을 얻을 수 있다. 이 식을 이용하여 옵션가치에 영향을 주는 기초물가격 S, 시간 t, 변동성 σ, 이자율 r에 대한 민감성을 분석함으로서 옵션포트폴리오의 시장위험을 관리할 수 있다. V를 옵션포트폴리오의 전체가치라할 때 S의 변화에 대한 V의 변화 $\frac{\partial V}{\partial S}$를 델타($\Delta$), S의 변화에 대한 델타의 변화 $\frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$를 감마($\Gamma$), 변동성 변화에 대한 V의 변화 $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$를 베가(Vega), 단기 이자율의 변화에 대한 V의 변화 $\frac{\partial V}{\partial r}$를 로($\rho$)라 한다. 위의 도함수들을 이용한 포트폴리오의 위험성을 관리하는 방법들을 기술한다.

II. 미분민감성(Greeks)을 이용한 위험관리

옵션 포트폴리오를 헤징 하기 위한 도구로서 블랙-숄즈의 공식, 또는 더 일반적인 블랙-숄즈 미분방정식의 실제적인 사용에 대해 논한다. 간편하게 하기 위해 지금부터 옵션의 만기일 사이에 배당이 없는 주식의 단순한 상황을 고려하자.

블랙-숄즈 공식에 포함되어 있는 변수는 (i) 권리행사가격 또는 행사가격 K, (ii) 만기일 T, (iii) 기초자산의 가격 S, (iv) 이자율 r, (v) 변동성 σ임을 기억하자. 이러한 다섯 개의 변수 중 처음 네 개는 어떤 주어진 시간에 관측할 수 있는 것이다. r은 만기일이 단기인 경우 알려져 있다. 이에 반하여 기초자산의 변동성은 정확하게 관측할 수 없다. 변동성에 따라 서로 다른 이론적인 옵션가격을 얻는다. 역으로 각각 가능한 옵션가격(블랙-숄즈 공식의 범위에서)에 대해 대응하는 변동성을 구하는 것은 쉽다. 이러한

사실은 블랙-숄즈 옵션료가 σ에 대해 순증가 함수이기 때문이다. 거래되어 지는 콜의 내재변동성(Implied Volatility)은 정의에 의하여 다음 방정식을 만족하는 σ의 값이다.

$$C(S,t;K,T;r,\sigma) = \text{콜의 시장가격}.$$

이 식에서 왼쪽항은 블랙-숄즈의 이론적인 가격을 나타낸다. 풋에도 마찬가지로 적용한다.

옵션의 시장가격은 내재변동성을 규정하며, 그것은 블랙-숄즈 공식을 적용할 수 있게 하는 변동성이다. 이제부터는 σ를 내재변동성이라 가정하자. 블랙-숄즈 공식의 주된 이용은 옵션 포트폴리오를 다양한 형태의 시장위험에서 옵션 포트폴리오의 노출을 관리하기 위한 것이다. 이미 S의 변화에 대한 포트폴리오의 가치를 만들어 내는 변수 델타(Δ)를 도입하였다.

$$\Delta = \frac{\partial V(S,t)}{\partial S}.$$

여기서 V는 포트폴리오의 전체가치를 나타낸다. 즉 포트폴리오에서 모든 옵션의 가치를 더한 것이다. 포트폴리오 델타는 옵션이 가지고 있는 내재변동성과 함께 계산되어진 옵션에 대응하는 델타들의 대수적인 합이다. 블랙-숄즈의 기본적인 결과는, 기초자산의 수 델타가 그 포지션을 시장중립이 되게 만드는 과정에서 포트폴리오의 가치 안에서의 포지션은 주문량에 따른 주식의 가격($(dt)^{1/2}$보다 오히려 dt)보다 변동성이 적다는 것이다. 더구나 블랙-숄즈이론에 의하면 dt항은 무위험률에서 포지션을 지원하는 자금과 같다. 만약 지원자금을 계산에 넣는다면 총 포트폴리오 가치의 변화는 옵션기간동안 모든 변화를 더한 것과 $O(t^{3/2})$의 수준에서 같다.

예를 들면, $r = 5\%$이고 $\sigma = 16\%$인 만기일이 180일 유럽식 등가격(At-The-Money)

콜$(K = S)$에서

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left(SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\right) \\ &= N(d_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{r\sqrt{T-t}}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ &= \frac{0.05 \times \sqrt{180/365}}{0.16} + \frac{1}{2} \times 0.16 \times \sqrt{\frac{180}{365}} = 0.2756 \end{aligned}$$

이므로 $\Delta = N(d_1) = 0.6085$이다. 이것은 100콜 또는 100개의 주식을 살 수 있는 한 옵션에서 매도포지션(Short Position)을 헤지 하기 위해 기초물 주식 60개를 사야한다. 비슷하게, 100개를 살 수 있는 옵션 보유자가 60개의 주식을 공매도(Short-Selling)함으로서 헤지 되어질 것이다. 같은 생각이 옵션 포트폴리오에도 적용한다. 적어도 이론적으로, 델타헤징(Delta-Hedging)은 기초자산의 가격변동 상에서 옵션 포트폴리오를 보호할 수 있는 한 가지 방법이다.

델타헤지된(Delta-Hedged) 옵션 포지션에서 중요한 결과는 콜을 소유하는 것과 풋을 소유하는 것 사이의 차이가 완전히 사라진다는 것이다. 실제로 등식

$$(S-K)^+ - (K-S)^+ = S - K$$

를 적용하면 다음 등식을 얻는다.

$$C(S,t;K,T) - P(S,t;K,T) = S - Ke^{-r(T-t)}.$$

위 식의 왼쪽에 있는 함수들은 같은 행사가격과 만기일을 가지는 콜과 풋의 가치를 나타낸다. 식의 오른쪽은 시간 T 때 K달러로 주식을 사기 위한 계약의 공정가격으로 설명되어질 수 있다. 이 결과를 풋-콜 공정가(Put-Call Parity)라 부른다. 이것은 하나의 콜, 하나의 주식 공매도, 현금가 K인 약속어음으로 구성되어진 포트폴리오에 하나의 풋을 합성할 수 있음을 말한다. 이 식을 미분함으로서 풋들과 콜들의 델타사이의 관계를 얻는다.

$$\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1.$$

헤지 되어있지 않은 옵션 포지션들은 시장의 동향에 대한 투기적인 투자임을 나타내는 반면에, 헤지 되어진 옵션들은 동향에 무관하다는 점이다. 델타헤지된 옵션 포지션들은 변동성이나 이자율에 따라 이익 또는 손해를 대비한다.

현물가격에 대한 블랙-숄즈의 가격을 두 번 미분한 감마

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}$$

는 실제적인 델타헤징에서 중요한 민감성을 나타낸다. 감마(Γ)는 기초물자산의 가격변화에 대한 델타의 변화를 측정한다. 이 민감성은 델타를 계속적으로 조정하는 블랙-숄즈 이론의 파생물에 속하지 않는다. 그러나 실제로 포트폴리오를 헤지 하기 위한 조정은 기초물의 가격변화에 대응하여 항상 이산적(Discrete Date)으로 이루어진다. 이산적인 헤징은 "헤지손실(Hedge Slippage)"을 가져온다. 옵션은 더 이상 복제되지 않고 각 시간 때(블랙-숄즈의 공식에 관계된)공정가에 대한 이익과 손실이 있다. 옵션(풋 또는 콜)의 감마는 다음과 같이 명확히 주어진다.

$$\Gamma = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}.$$

이 값은 양수이다. 주식가격이 증가함에 따라 옵션의 델타는 증가한다. S의 함수로서 헤지된 (매입)옵션의 그래프는 아래로 볼록(Convex)이고 S의 값이 현물가일 때 최소값을 가진다. 시간 $t+dt$ 때 그래프는 아래로 볼록이므로 모든 S의 값 보다 평등적으로 밑에 있다는 것을 보이는 것은 쉽다. 만약에 $|S_{t+dt} - S_t|$가 크면 헤지된 매입옵션 포지션 보유자는 돈을 벌 것이고, 주가의 변화가 거의 없다면 돈을 잃음을 의미한다. 만약 역포지션, 즉 블랙-숄즈 델타로 헤지 된 매도옵션을 고려하면 그래프가 위로 볼록(Concave)하다는 것을 알 것이다. 위로 볼록성 때문에 소폭의 주가변화에 이익을 얻고 대폭의 주가변화에서 손해를 볼 수 있다. 시장 전문가들은 전자의 상황을 "매입감마(Long Gamma)", 후자를 매도감마(Short Gamma)라고 한다. 이 개념은 델타와 마찬가지로 포트폴리오 상태에 적용된다. 포트폴리오의 감마는 그것들의 부호(매입/매도)에 의해서 가중되어진 모든 옵션의 감마를 더한 것과 계약의 수에 의해 얻어지는 감마의 총합이다. 이론적으로 많은 오류를 범하지 않고 헤지 하는 것은 어렵기 때문에 감마

가 큰 포지션은 위험하다. 감마의 크기는 어떤 의미에서는 이산적인 거래로 인해 헤지가 상실될 때 위험노출의 정도를 나타낸다. 감마관리는 한정된 헤지상실위험 또는 미리 규정되어진 제약하에서 이러한 민감성을 유지하기 위해 옵션을 사거나 팔므로서 이루어진다.

역동적 헤징에서 생겨나는 거래비용(Transaction Costs)을 계산할 때 감마는 중요한 것이 된다. 예를 들어, 매도감마상태의 거래들은 주식값이 오를 때 주식을 사야하고 내릴 때 팔아야한다(항상 괴로운 것이지만). 한편으로, 매입감마 포지션을 헤징하는 것은 활황장세일 때 주식을 파는 것과 주식값이 내려갈 때 사는 것을 포함한다. 이것은 매입과 매도감마 포지션을 복제할 때 기대되는 비용에 있어서 대단한 불균형을 만든다. 일반적으로 거래비용이 존재하는 역동적 헤징은 비싸고 거래자의 이익을 감소시킨다. 그러므로 거래비용을 피하는 것과 계약의 위험노출을 제한하는 것 사이의 절충안이 마련되어져야 한다. 이 문제는 매우 재미있는 수학을 만들었고 대단한 연구과제이다(레란드(Leland, 1986), 데비스, 파나스, 자리포폴로우(Davis, Panas and Zariphopolou, 1993), 아벨라네다, 패리스(Avellaneda and Parás, 1994), 탈레브(Taleb, 1997)).

블랙-숄즈 방정식의 또 다른 중요한 민감성은 시간가치 잠식(Time-Decay)이라고 알려진 다음 식이다.

$$\Theta = \frac{\partial V(S,t)}{\partial t}.$$

이것은 옵션 포트폴리오의 위험관리에 있어서 매우 중요한 것이다. 왜냐하면 이것은 만약 현물가격이 변하지 않는 상태에서 포지션의 가치가 얼마나 변할 것인지를 거래자에게 알려주기 때문이다. 세타(Θ)와 감마는 앞에서 논의한 것처럼 반대의 부호를 가진다. 다음과 같이 변수변환 함으로서 이것을 좀 더 명확하게 볼 수 있다.

$$\tilde{V} = e^{-rt}V, \quad \tilde{S} = e^{-rt}S.$$

위 식은 이자의 효과를 제거한 현금의 가치를 나타낸다. 이러한 변수들의 항으로 블랙-숄즈 미분방정식에 대입하고 이자 $r = 0$을 대입하면 그 방정식은 다음처럼 바뀐다.

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} = 0,$$

또는

$$\tilde{\Theta} = -\frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}^2 \tilde{\Gamma}.$$

여기서 값들은 이자를 제거한 현금에서 계산되어 졌음을 강조하기 위해 틸드(Tilde)를 사용한다. 이 관계는 다음 식으로 다시 표현할 수 있다.

$$\tilde{V}(t+dt) - \tilde{V}(t) \propto -\frac{1}{2}\tilde{\Gamma} \cdot E\left\{\left(\tilde{S}(t+dt) - \tilde{S}(t)\right)^2\right\}.$$

여기서 $\propto$은 근사관계를 나타내는 기호이고, 그리고 분산은 현물가격 증분의 제곱과 같게 하였다. 그러므로 블랙-숄즈 방정식은 시간가치 잠식, 볼록성 그리고 변동성 사이의 비례관계를 나타낸다.

수치적인 예를 가지고 이것을 설명하자. 이자를 제거한 현금에서 하루 지나서 나타나는 변동성이 16%인 만기일이 180일 등가격 콜의 변화를 계산하자. 시작하는 날의 등가격 콜의 가치는

$$r = 0,\ \sigma = 0.16,\ T - t = \frac{180}{365},\ S = K = 1$$

에서

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2} \times 0.16 \times \sqrt{\frac{180}{365}} = 0.0562, \\ d_2 &= -d_1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V &= N(d_1) - N(d_2) \\ &= 0.0447 \end{aligned}$$

이다. 하루 지나서 등가격 콜의 가치는

$$r = 0,\ \sigma = 0.16,\ T - t = \frac{179}{365},\ S = K = 1$$

에서

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{1}{2} \times 0.16 \times \sqrt{\frac{179}{365}} = 0.0560, \\ d_2 &= -d_1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V &= N(d_1) - N(d_2) \\ &= 0.0446 \end{aligned}$$

이다. 따라서, 등가격 콜의 변화는 근사적으로 기초물자산의 가격에 대해 $\Delta V = 0.01\%$이다. 이것은 만일 기초물자산의 가격이 변하지 않는다면 옵션 보유자는 하루가 지나서 손해봄을 의미한다. 한편으로, 현물가 1%에 대한 델타의 변화를 계산하자. t일 후 델타는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} = N(d) \\
d &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}.
\end{aligned}$$

시작하는 날의 델타는

$$\sigma = 0.16,\ r = 0,\ S = K = 1,\ T - t = \frac{180}{365}$$

에서

$$\begin{aligned}
d &= \frac{1}{2} \times 0.16 \times \sqrt{\frac{180}{365}} = 0.056, \\
\Delta &= N(0.056).
\end{aligned}$$

하루 지나서 현물가가 1% 상승했다고 하면

$$\sigma = 0.16,\ r = 0,\ S = 1.01,\ K = 1,\ T - t = \frac{179}{365}$$

이므로

$$\begin{aligned}
d &= \frac{1}{0.16 \times \sqrt{179/365}} \ln(1.01) + \frac{1}{2} \times 0.16 \times \sqrt{\frac{179}{365}} = 0.144, \\
\Delta &= N(0.144).
\end{aligned}$$

따라서, 현물가 1%에 대한 델타의 변화는

$$N(0.144) - N(0.056) = 0.035$$

이다. 16%의 변동성은 근사적으로 $(\Delta\tilde{S})^2$의 약 $16 \times 16/365 = 0.701$를 나타낸다. 0.5×0.035를 0.701에 곱하면 주장했던 약 0.012%가 된다. 이것은 만약에 현물가가 하나의 표준적인 편차에 의해 변한다면 옵션 보유자는 이익을 예상한다는 것이다.

예견되는 것처럼 변동성 변수에 대한 블랙-숄즈 가치의 민감성은 중요한 역할을 한다. 이 민감성은 베가(Vega)라고 알려져 있는 다음 식이다.

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

거래자는 옵션 포트폴리오의 위험을 분석하기 위해 다음과 같은 블랙-숄즈 공식의 고계민감성(Higher-Order Sensitivity)을 종종 사용한다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial (\text{Vega})}{\partial S},$$

그리고

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial (\text{Vega})}{\partial \sigma}.$$

이러한 고계민감성에 대한 직관적인 통찰은 아마 가장 노련한 옵션전문가만이 정통할 것이다. 예를 들어 $\frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}$는 다른 모든 변수를 상수로 두고 옵션 내재변동성의 변화에 따른 헤지하기 위하여 소유해야하는 기초물자산의 총합인 델타의 변화를 나타낸다. 옵션 포지션들을 관리하기 위해 사용되어지는 또는 다른 변수는 다음과 같은 단기 이자율에 대한 민감성이다.

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

비록 로(ρ)의 효과는 일반적으로 덜 중요하기는 하지만 조달자금 이자의 변화에 대한 생각은 이자율이 매우 높거나 단기간 동안 이자율 변동이 큰 국가에서는 중요할 수 있다.

대체로 옵션 포트폴리오 위험관리는 위험을 제거하는 것 또는 적어도 포트폴리오 안에서 적당한 한계를 가지고 위에서 언급했던 민감성을 유지하는 것이다. 그러므로 옵션 딜러는 $\Gamma, \Theta, \text{Vega}, \rho$뿐만 아니라 Δ(항상 0이 되도록)를 관리하는 것이다. 기초물자산을 매매함으로 관리되어지는 델타를 제외하고 다른 민감성의 위험관리는 목표하는 상태의 근처에서 전체의 민감성을 유지하기 위해 옵션을 사는 것과 파는 것을 포함한다. 또한 이것은 고계 민감성에서 옵션 포지션을 취하는 것을 포함한다. 예를 들어 거래자는 내재변동성을 초월하기 위한 방향을 얻을 수 있다. 예를 들어 양수 베가 포트폴

리오(Positive-Vega Portfolio)를 순간적으로 택하고, 그러나 동시에 Δ, Γ 그리고 ρ는 위험제거상태가 되게 할 때 거래자는 내재변동성에서 야기되는 정보를 얻을 수 있다. 명백하지만 중요한 생각은 Θ와 Γ의 부호가 반대라는 것이다. 왜냐하면 만약 시장의 안정되어 있다면 시간은 볼록성의 판매자의 편이지만 볼록성의 구매자는 자연스럽게 시간가치잠식을 드러낸다. 옵션장부의 변동성 위험관리(그리고 때로는 이자율 관리)는 매우 어려운 문제이다. 다른 것들 사이에서 서로 다른 만기일과 서로 다른 실행가격을 가지는 옵션의 내재변동성은 일반적으로 같지 않다. 그러므로 변동성 위험관리는 다음과 같은 내재변동성의 행렬(Matrix)의 연결된 움직임을 감시하는 것을 요구한다.

$$\sigma(K_i, T_j),\ i, j = 1, 2, \ldots .$$

여기서 K_i와 T_j는 서로 다른 실행가격과 만기일을 나타낸다. 이것은 계속적으로 미분민감성을 유지하고 변동성과 이자율의 미래 동향에 대한 매매자의 기대에 따라 이익을 얻을 수 있는 옵션 포지션들을 기획하기 위한 옵션 포트폴리오의 빈번한 조정이 필요함을 의미한다. 즉, 전문적인 옵션 거래자들은 옵션 스프레드(Option Spread) 또는 다른 옵션들의 조합에 관한 위험회귀 특성(Risk-Return Characteristic)을 변동성과 예측 이자율, 가격 범위, 배당 지불금, 다른 계약의 유동성 등을 포함해서 계산해야만 한다. 나탄버그(Natanberg, 1988)와 탈레브(Taleb, 1997)는 실전적인 관점에서 옵션 전략에 대한 명확한 해석을 했다.

III. 불확실한 변동성 모델들

기본적인 관점에 의하면, 변동성이 상수라는 가정과 위험관리 실행으로 베가헤징은 실행하면 할 수록 여러 가지 결점을 가진다. 특별히 다음과 같은 것들이다.

- 다음식

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dZ_t$$

  의 블랙-숄즈 모델은 암시적으로 변동성 또는 현물가는 동차(Homoge- neous)이다. 즉, 수익들은 다른 날에도 통계적으로 같다.

- 베가는 내재변동성의 작은 변화에 대해서만 옵션의 민감성을 준다.

- 내재변동성이 상수인 경우 변동성의 변화가 아주 작은 경우를 포함함으로 베가헤징은 같은 만기일과 다른 실행가격을 가지는 옵션들은 항상 다른 내재변동성일 때 거래한다는 사실과 일치하지 않는다.

상수 변동성 가정은 실제로 차익거래 가격이론(Arbitrage Pricing Theory, APT)과 일치하지 않는다. 실제로, 만약 같은 만기일을 가지는 두 개의 옵션이 서로 다른 변동성에서 거래한다면 기초물자산의 "현물변동성(Spot Volatility)"을 나타내는 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dZ_t + rdt.$$

변동성 σ_t는 상수일 수 없고 더욱이 시간에만 종속된 함수가 아니다. 이런 경우는 종종 발생한다. 만약 σ_t가 상수이거나 시간에만 종속된 함수라면 적어도 두 개의 옵션 중 하나는 원래의 블랙-숄즈 모델을 사용할 때 시장에 의해서 잘못된 가격을 매길 것이다. 그러나 내재변동성의 차이가 반드시 차익거래 기회를 제공하지 않는다는 광범위한 증거가 있다. 반면에, 다수의 시장에서 조사되어지는 내재변동성의 유연함과 급변함은 거래자의 "비동차(Nonhomogeneous)" 변동성 기대를 반영한다고 현재는 믿고있다. 거래자들은 시장조건의 변화, 기초물자산의 유동성의 변화 등과 같은 미래의 사건에 대해 조건부 옵션 복제비용을 계산한다. 단지 이론적인 결론, 즉 차익거래의 부재로서 성립하는 그리고 하나의 통계적인 모델로 기술되어진 상수 변동성(블랙-숄즈 이론의 단순한 가정)을 채택해야될 이유는 없다.

여기서 수학은 다양한 방법으로 이것을 연구한다. 차익거래 부재이론에 따르면, 차익거래 부재는 거래되어지는 자산의 가격이 같은 확률에 대한 기대값을 취함으로서 동시에 재생산되어지도록 기초자산 가격흐름 $\{S_t\}$ 상에서 확률측도의 존재를 의미한다. 차익거래 가격이론에 의해 지배받을 때 이 확률은 이자를 제거한 현금으로 계산되어진 가격은 마팅게일(Martingales)이 되어야 한다는 것이 유일한 제한이다. 예를 들면 변동성 σ_t를 무작위 과정으로 취급하거나 또는 S_t와 t의 함수로 택할 때, $S_\bullet$에 대한 단 하나

의 확률측도를 가지고 σ_t는 차익거래 가격이론 방정식을 만족한다. 그러므로 옵션 포지션의 좀 더 정확한 값을 얻을 수 있다.

이것은 옵션시장에서 조사되어진 내재변동성의 동향과 블랙-숄즈 이론이 일치하도록 하는 변동성 확률과정의 특성을 연구하도록 연구자들을 자극했다. 하나의 제안은 현물 변동성을 확률과정으로 만드는 것이다. 그것은 통계적으로 가치충격과 상관관계를 가져야한다. 헐과 화이트(Hull and White, 1987)는 변동성충격과 가치충격(시장은 변동성 증가를 줄임으로서)의 음의 상관관계는 공정한 옵션시장들에서 조사되어지는 "변동성의 급변함(Volatility Skew)"을 질적으로(아벨라네다의 경험으로는 양적이지 않다) 재생산함을 보였다. 전형적으로 이러한 시장에서 외가격 풋은 외가격 콜 보다 더 높은 내재변동성을 가진다. 변동성 모델에 대한 다른 제안(Engle(1984), Noh et al(1994))은 기초자산의 동향을 모형화 하기 위해 ARCH-GARCH(Conditionally Heteroskedastic Model)를 이용하는 것이다. 그러나 확률 변동성 모델 또는 ARCH 모델들은 모델 특성의 중요한 문제(경제적 분석 또는 다른 분석)와 미래 위험관리에 대한 역사적 자료의 적합성 문제를 제기한다. 아마 키네스(Keynes)는 동의할지 모르지만 확률 변동성 모델의 또 다른 비판은 더 복잡한 모델들에 포함된 변수에 대한 미분민감성은 시장의 커다란 변동에 대해 방패를 마련해주지 못할 수 있다는 것이다. 좀 더 정교한 모델을 만드는 것은 시장에서 인용되어진 좀 더 나은 현재 옵션가격을 반영할 수 있지만, 아직까지 위험에 대한 개념을 처리하지 못하고 있고 모델 자체의 불확실성도 가지고 있다.

매개변수화된 모델들의 결점을 보완하려는 시도에 있어서 변동성 위험관리에 대한 새로운 접근방법을 언급하려 한다. 이 접근방법은 현물변동성 확률과정에 대해 전혀 알지 못하고 변동성 통계의 정교한 기술보다 "불확실성(Uncertai- nty)"의 개념이나 "정보의 부족함(Lack of Information)"을 이용하는 것이 더 나을 수 있다는 전제 위에 기초한다.

현물변동성 확률과정 $\{\sigma_t, 0 \leq t \leq T\}$에 대한 신뢰구간(Confidence Interval)이 결정되어졌다고 하고, 이러한 구간이 어떻게 얻어지는가에 대한 상세한 논의는 생략하기로

하자. 그러므로 기초자산에 대한 조건부 변동성 확률과정은 다음 부등식을 만족한다고 가정한다.

$$\underline{\sigma}(t) \le \sigma_t \le \overline{\sigma}(t). \tag{1}$$

여기서 $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma}$는 확정된 함수들이다. 변동성 한계를 만족하는 기초물가격 확률과정 $\{S_t, 0 \le t \le T\}$에 관한 모든 확률 특성들의 모임을 생각한다. 불확실성의 범위가 주어진다면 변동성에 민감한 어떤 주어진 계약에 대해 하나의 가격을 결정할 수 없다. 대신 가능한 가격의 연속체가 존재한다. 각각 매도와 매입포지션에 대한 최악의 시나리오 복제 비용(Worst-Case Scenario Replication Costs)에 대응하는 극 모델 가치(Extreme Model Value) 또는 가격의 상계와 하계에 초점을 맞출 것이다.

이렇게 두는데 있어서 극가격을 계산하는 문제는 변동성이 제어변수인 확률적 제어 문제와 동형이다. 극가격은 벨만(Bellman)의 역동적 계획원칙(Dyna- mic Programing Principle)을 이용하여 계산할 수 있다. 좀 더 언급하면, 상계에 대한 편미분 방정식은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Phi_0\left[\frac{S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = -\sum_{i;t<T_i} F_i(S)\delta(t-T_i). \tag{2}$$

여기서

$$\Phi_0(X) = \begin{cases} \underline{\sigma}^2 X, & X < 0, \\ \overline{\sigma}^2 X, & X \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

이 방정식은 단순하지만 블랙-숄즈 미분방정식의 중요한 변형이다. 왜냐하면 불확실성이 없을 때($\underline{\sigma} = \overline{\sigma}$) 이 방정식은 블랙-숄즈 미분방정식이 된다. 방정식 (2)는 불확실한 변동성의 모델(Uncertain Volatility Model, UVM)이라고 알려져 있다(Avellaneda, Levy and Paras, 1995). 불확실한 변동성의 모델 방정식에 대한 델타(Δ)는 다음과 같은 관점에서 포트폴리오의 시장위험에 대한 면역성을 주기 위해 이용되어질 수 있다. 즉, 만일 옵션 관리자가 이 델타를 이용하여 계산되어진 지불준비 예치금으로부터 시작한다면 그 관리자는 최악의 변동성 시나리오가 인지될 때 득실이 없어지고 그렇지 않으면 이익을 얻을 것이다(편성한 것 보다 적은 지불준비 예치금으로). 이 생각은 금융수학에서 지배전략(Domination Strategy)이라고 알려져 있다. 만일 옵션 관리자가 처음부터 불

확실한 변동성의 모델 방정식으로 계산되어진 지불준비 예치금 보다 적은 금액을 편성한다면, 그 전략은 돈을 잃을 수 있지만 손해금액은 블랙-숄즈 방정식으로 계산되어진 가격 차이 정도이다. 이 계산방법이 변동성 특성에 대해 강하다는 것은 직관적으로 명백하다. 그러나 이 보호는 자유롭지 않다. 왜냐하면 블랙-숄즈 방정식을 이용한 것, 즉 변동성 변수를 묶음의 중심으로 계산한 것 보다 더 많은 지불준비 예치금을 요구하기 때문이다. 특히 불확실한 변동성의 모델은 그 묶음 안에서 상수 변동성을 이용하는 딜러들의 가격과 경쟁하지 않는 옵션가격을 만들 수 있다.

상계극값의 가격과 하계극값의 가격 차이, 또는 극값과 변동성의 묶음 (1)의 중심을 이용하여 계산한 블랙-숄즈의 값의 차이는 이 새로운 가치평가가 묶음 안에 있는 모든 변동성 흐름의 위험에 대한 보호막을 제공해 주기 때문에 생긴다. 가격에서 이러한 틈새는 미래의 변동성 흐름에 대한 우리의 불확실성을 반영한다. 이러한 "불확실성 틈새(Uncertainty Gap)"를 줄이기 위한 한 가지 방법은 옵션을 역동적 헤징에서 부분적인 대안으로 여기는 것이다. 지금 언급한 불확실한 변동성 모델의 확장은 이렇게 하기 위한 합리적인 접근방법을 제공한다(Avellaneda, Parás(1996)). 이 방법은 거래되어지는 옵션들과 결합된 이자의 파생상품에 의해 만들어진 "꾸러미(Package)"를 평가하기 위해 불확실한 변동성의 방정식을 이용하는데 있다. 그러므로 이 생각은 원래의 선물보다 오히려 새로운 꾸러미에 대한 불확실한 변동성의 모델 분석을 수행하는 것이다. 옵션들은 시장에서 사고 팔 수 있기 때문에 단지 총 위험 부담비용에만 델타헤징을 수행할 수 있다. 보통 이 제안은 변동성 시나리오의 범위 내에서 잘 적용되는 헤지와 동시에 더 좁은 범위의 가격군을 제공해준다.

이러한 작업을 어떻게 할 것인지를 보이자. 시장에서 가격들이 $G_j(j = 1, 2, \ldots, M)$이고 만기일이 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M$으로 거래되어지는 M 개의 옵션들이 있다고 가정하다. 그리고 각 옵션들의 C_j의 가격으로 거래되고 있다고 가정하자. 만일 옵션관리자가 현금흐름 $\{F_j\}$로 표현되어지는 파생상품을 팔고, 첫 번째 옵션이 λ_1개, 두 번째 옵션이 λ_2개, $\ldots$, M 번째 옵션이 λ_M개로 구성되어진 포트폴리오를 산다면, 최악의 시나리오에서 이

러한 포지션을 헤징 하기 위한 필요한 현금총액은

$$\sup_P E\left\{\sum_{i=1}^{N} e^{-rT_i}F(S_{T_i}) - \sum_{j=1}^{M}\lambda_j e^{-r\tau_j}G(S_{\tau_j})\right\}.$$

여기서 상한은 묶음 (1)에서 변동성 흐름의 모든 확률에서 취한 것이다. 만일 여기서 옵션 포트폴리오의 시장가격을 더한다면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} V(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) = \quad & \sup_P E\left\{\sum_{i=1}^{N} e^{-rT_i}F(S_{T_i}) - \sum_{j=1}^{M}\lambda_j e^{-r\tau_j}G(S_{\tau_j})\right\} \\ & +\sum_{j=1}^{M}\lambda_j C_j. \end{aligned} \tag{4}$$

$V(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$은 부분적으로 "변동성이 상수에 가까운" 옵션헤지와 델타헤징을 이용한 파생상품을 헤지 하기 위해 반드시 준비하는 최악의 시나리오로서 설명되어 질 수 있다. 만일 $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$을 최소화한다면 묶음의 모든 가능한 변동성 흐름상에서 포트폴리오에 면역성을 주는 옵션들에 대한 가장 싼 헤지를 찾을 것이다. 이 헤지는 옵션 헤지비율(Option Hedge-Ratios)의 벡터 $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_M^*)$로 표현되어질 것이다. 함수 $V(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)$은 순 아래로 볼록이므로, 만일 최소값이 존재한다면 유일하다는 것은 주목할만하다. 더구나 이러한 헤지비율로 최악의 시나리오를 주는 확률측도는 다음과 같은 시장가격 조건을 만족한다.

$$C_j = E\left\{e^{-r\tau_j}G(S_{\tau_j})\right\},\ j=1,2,\ldots,M. \tag{5}$$

이것을 보이기 위해 V에 대한 편미분이 다음 식을 만족한다는 것을 고려하여 식 (4)에서 최소값에 대한 1계조건들(First-Order Conditions)을 이용하는 것으로 충분하다.

$$\frac{\partial V(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)}{\partial\lambda_j} = C_j - E^{P^*}\left\{e^{-r\tau_j}G(S_{\tau_j})\right\},\ j=1,2,\ldots,M. \tag{6}$$

여기서 P^*는 상계를 의미하는 확률측도이다. 특히 새로운 최악의 시나리오 확률은 거래되어지는 모든 옵션의 가격을 연결하는 조정된 모델(Calibrated Model)을 만든다.

위 이론을 예를 들어 설명하자. 주식가격 $S_0 = 100$달러이고 이자율 $r = 5\%$라 가정하자. 만기일이 180이고 실행가격 $K_1 = 100$인 주식옵션이 16%의 내재변동성과 함께

거래되어지고 있다고 가정하자. 더구나 한계 $\underline{\sigma} = 8\%$와 $\overline{\sigma} = 24\%$ 사이에서 변하는 현물 변동성 σ_t를 기대한다. 이와 같은 가격에 대한 정보를 어떻게 사용하고 만기일이 160일이고 실행가격 $K_2 = 115$인 옵션을 어떻게 헤지 할 것인가?

이 문제에서 $M = N = 1$이다. 변동성 $\tau = 0.16$인 등가격 옵션의 시장가격은 5.75달러이다. $F_1(S) = (S - 115)^+, G_1(S) = (S - 100)^+, C_1 = 5.75$를 가지고 함수 $V(\lambda_1)$을 최적화하면 매도 포지션에 대해 다음을 얻는다.

$$\lambda_1 = 0.302,\ V(\lambda_1) = 1.97,\ \Delta = 0.06.$$

이것은 최적의 헤지는 각각의 115-옵션을 파는 것에 대해 등가격 옵션을 0.302개 사는 것을 의미한다는 것이다. 나머지 포트폴리오에 대한 불확실한 변동성의 모델 델타헤지는 0.06이다. 즉 계약에서 주식들의 개념적인 수량에 대해 6%이다. $V(\lambda_1) = 1.97$은 다음과 같이 사용되어진 이 헤지의 비용을 의미한다. 즉 $5.7 \times 0.302 = \$1.73$를 옵션을 헤지 하는데 투자하였고 $1.97 - 1.73 = \$0.24$는 역동적 헤징을 유지하는데 투자하였다. 이 옵션료와 다른 σ의 값을 사용한 블랙-숄즈 옵션료와 비교할 수 있다. $\sigma = 0.16$에 대해 블랙-숄즈의 옵션료는 $V(\lambda_1) = 1.97$보다 아주 작은 \$0.75이다. 한편으로, 만일 최악의 경우에 대한 두려움이 현실화되고 변동성 항이 16%대신 24%로 바뀐다면 정확한 옵션료는 \$2.24가 되야 한다. 이것은 최적화된 값 1.97보다 더 크다. 만일 그 조합에 추가할 더 많은 옵션들이 있다면 그 가격은 좀 더 줄여질 수 있다.

라그랑즈의 불확실한 변동성의 모델(Lagrangian Uncertain Volatility Model, λ-UVM)이라 불리는 이 헤징기술은 이색옵션(Exotic Option)들과 변동성 환경의 변화에 더 의존하는 비 표준적인 파생상품에 대한 옵션 헤지들을 체계적으로 기획하기 위해 이용되어질 수 있다. 이 기획들은 베가와 다른 σ에 관계된 미분민감성을 이용하여 변동성 헤징에 대한 대안을 제공한다. 이론적인 관점에서 다수의 마팅게일 측도(변동성 흐름의 묶음을 통하여)들의 도입은 위험성이 적은 총 포지션을 만드는 옵션들의 꾸러미를 선택함으로서 변동성 위험을 제거하기 위해 어떻게 이용되어질 수 있다. 아벨라네다의 견해로는 델타헤징과 사전에 옵션 보호를 사는 것 사이에서 적절한 선택은 변동성 위험을 관리하는데 있어서 중요한 것이다.

IV. 결론

이 논문에서는 파생상품의 가치를 계산하는 영역에서 주된 문제의 몇 가지와 결과들에 대해 간단히 기술했다. 기초물 옵션과 파생상품의 가치평가에 기본이 되는 여러 가지 원칙들을 논의했고 미분민감성을 이용한 포트폴리오의 위험관리에 대해서도 논했다. 이것은 모델특성에 대한 원초적인 의문점과 위험중립 가능성이 미래의 시장에 의해 인식되도록 불확실성을 관리하는 것이다. 잘 정의된 확률적 모델을 이용한 파생상품의 가치계산과 모델 매개변수에 관한 불확실성이 존재할 때 파생상품의 가치계산 사이의 기본적인 차이점을 논했다. 불확실성이 파생상품의 가치계산에는 항상 존재하고, 만일 가치측도가 모든 시장관계자들에게 확실히 알려진다면 궁극적으로 옵션거래는 성행하지 않을 것이다. 옵션 위험관리는 선형모델의 범위에서 벗어난다. 미분민감성 관리는 모델 불확실성을 관리하기 위한 좋은 수단이지만 이 방법은 APT와 일치하지 않을 수 있고, 더 중요한 것은 시장조건들의 큰 변화(즉 위험중립가능성에서의 큰 변화)에 대항하는 보호를 제공해 주지 못할 것이라는 것을 알았다. 동시에 다른 가격 시나리오들의 생각에 기초한 λ-UVM과 같은 제안은 미분민감성 헤징에 대한 자연스러운 대안처럼 보인다.

이 논문의 초점은 위험성을 갖고 있는 하나의 자산에 제한되어진 것임을 말하는 것으로 끝맺는다. 실제로 다른 성향을 가지는 고정된 수입방법들의 다양한 경우와 같은 다수의 위험과 다수의 기초물자산을 가지는 경제와 항상 직면하게 된다. 다차원적인 경우 이론의 복잡성은 상당히 증가하고 기대되는 현금흐름을 (하나의 확률측도에 대한) 계산하는 아주 단순한 문제일지라도 어려움이 나타난다. 상관관계의 불확실성처럼 다중자산경제에서의 불확실성에 대한 탐구의 필요성은 더 많은 연관관계를 갖는 불확실한 확률에 대한 위험성 분석을 야기 시킨다. 여기서 논의된 몇 가지 방법이나, 적어도 그 방법 뒤에 숨어있는 생각이 이 영역에 존재하는 문제를 해결하려는 시도에서 유용하게 시험해 볼 수 있기 바란다.

참 고 문 헌

Avellaneda, M. and Paráas A. (1996). Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities: the Lagrangian Uncertain Volatility Model, *Applied Mathematical Finance*, 3, 21-52

Avellaneda, M., Friedman, C., Homes, R. and Samperi, D, (1997), Calibration volatility surfaces via relative entropy minimization, *Applied Math. Finace*, 3, March issue.

Black F. and Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *J. Pol. Econ.*, 81, 637-659

Davis, M. H., Panas, V. G., and Zariphopolou, T. (1993), European option pricing with transaction costs, *SIAM J. Control and Optimization*, 31, 470-493.

Duffie, D. (1992), *Dynamical Asset Pricing Theory*, Princeton Univ. Press

Engle, R., (1984), Wald likelihood ratio and Langrange multiplier tests in econometrics, it Handbook of Econometrics, Vol II, Grilches and Intrilligator eds. North-Holland, Amsterdam; see also Noh. J. Engle, R. and Kane A. (1994), Forecasting volatility and options prices of the S & P 500 Index, *The journal of Derivatives*, Fall issue.

Harrison, J. M., and Kreps, D. (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, J. Econ. Theory, 381-408.

Hull, J. (1994), *Options, futures and other derivative securities*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewod Hills, NJ. Hull, J. and White, A., (1987), The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *J. of Finance June*, 281-300.

Jaynes, E. T. (1996), *Probability theory; The Logic of science*, Unpublished Manuscript, Washington University, St. Louis, MO., see also article in *Inverse Problems*, vol 14 D. McLaughlin, ed., American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1984.

Keynes, J. M. (1936), *The General Theory of Investment Employment and Money*, Hartcourt Brace and Co. New York.

Leland, H. (1985), Potion pricing and replication in the presence of transaction costs, *J. of Finance*, 40, 1283-1301.

Markowitz, H. (1991), *Portfolio Selection*, J. Wiley and Sons, New York, 2nd edition.

Natanberg(1988), *Option volatility and pricing strategies*, Probus.

Taleb(1997), *Dynamic Hedging*, John Wiley and Sons, New York.

Abstrac

The Mathematical Theory of Risk-Management Using the 'Greeks".

Seung-pil Kang
Bong-soo Ko

This paper discusses practical uses of the Black-Scholes formula or, more generally, the Black-Scholes Partial Differential Equation, **as** a tool for hedging an options portfolio. In those process, there are several parameter Delta, which is the derivative of the option value with respect to change in the price S of the underlying asset, Gamma, which is the derivative of the Delta with respect to S, Theta, which is the derivative of the option value with respect to the time, Vega, which is the derivative of the option value with respect to the volatility, and Rho, which is the derivative with respect to the short-term interest rate.