제주교육대학교 논문집 (2002)
제31집 pp. 61 ~ 107

제7차 교육과정 초등수학교과서 도형영역에서 활용 가능한 수학사 학습 자료

김 해 규[1]

〈목 차〉

Ⅰ. 연구의 필요성

류연수(2001)는 제7차 교육과정에 의한 초등학교 교과서 활용 방법 개선 연구[2]에서 효율적인 교과서 활용 방안을 탐색하기 위해 전국의 교과용도서 실험연구학교와 비실험학교의 초등학교 교사 920명을 대상으로 교과서의 일반적인 활용 실태와 수준별 교육과정 적용 5개 교과[3]에 대한 교과별 특성에 따른 활용 실태를 조사하였는데, 빈도 분석결과 다수의 응답자(71.4%)가 교과서대로 지도하고 있는 것으로 나타나고 있어 교과서 의존적인 수업 진행과, 26.6%의 응답자들이 교과서를 지식 전달의 도구로 사

1) 제주교육대학교 수학교육과 조교수
2) 2001년도 교육과정 후속 지원 연구과제 답신보고용으로 한국초등교육과정연구회장인 류연수 교사를 연구책임자로 하여, 12명의 초등학교 교사가 공동으로 연구한 2001년 교육인적자원부 위탁 연구과제임.
3) 수준별 교육과정이 적용되는 초등학교 국어, 수학, 사회, 과학, 영어 교과서를 중심으로 연구함.

용한다고 하여 여전히 상당수의 응답자들이 닫힌 교과서관을 가지고 있으며, 교사들의 과반수는 학생 실태에 기초한 수준별 교육과정 운영을 위해 학생 수준에 따라 학습 자료를 개발하여 활용하지 않는 것으로 나타나 제7차 수준별 교육과정이 제대로 뿌리를 내리지 못하고 있음을 지적했다. 또한, 교과서 내용을 모든 학생들에게 일률적으로 지도하는 형태가 48.3%를 나타내고 있어 수준별 교육과정에서의 교과서 활용에 대한 인식이 부족하다고 분석하고 있다. 따라서, 류연수(2001)는 수학과 교과서의 개선방향으로 창의적, 사고력을 중시하는 교과서, 학습자 중심의 교과서, 미래지향적인 편집기법을 활용한 교과서가 되어야한다고 주장하고 있다. 특히, 사고력을 중시하는 교과서, 학습자 중심의 교과서로의 개선방향에 대하여, "학생들의 능동적인 자주적 학습에서 발달할 수 있는 수학적 사고력을 향상시킬 수 있어야 하며, 교사 위주의 체제나 구성이 되어서는 안되며 학습자가 쉽게 접근하여 활용할 수 있도록 학습자의 흥미와 관심을 끌 수 있는 다양한 소재, 학생들의 사고 양식에 따라 구체적이면서 직관적인 방법으로 스스로 탐구하고 학습할 수 있는 참고 자료나 워크북 형태의 보조 자료의 개발"을 강조하고 있다. 또한 앞으로 제7차 교육과정이 현장에서 정착되기 위해서는 교과서의 활용에 관한 많은 연구가 이루어져야 함을 강조하면서 후속 연구의 제안으로, "교육과정과 교과서 및 현장의 활용을 연계하는 방안에 대한 광범위한 연구가 지속적으로 뒤따라야 할 것이며, 수준별 교육과정이 그 본래의 목적과 취지에 부합되게 실현되기 위해서는 교과서 외의 많은 자료들이 개발되어 현장에 보급되어야한다"고 제안하고 있다.

따라서, 류연수(2001)의 연구에서 제안된바와 같은 교과서 외의 자료의 개발이라는 관점에서 볼 때, 수학사 자료의 개발 및 재구성은 이런 취지에 부합하는 자료라고 사료된다.

수학사를 초등학교 수학 수업에 활용하는 한가지 방법으로, 수학사에 대한 깊은 지식보다는 초등학교 수학 교육과정에 알맞은 수학사 내용을 찾아내어, 학생들에게 교실에서 배우는 수학과는 다른 모습을 보여 줌으로서 수학 학습에 대한 동기나 흥미를 유발시키는 방법을 들 수 있을 것이다. 이런 방식의 접근은 아주 기본적이면서도 필요한 것이며, 더 나아가 교사들이 수학사의 연구를 통해 직접 이러한 접근을 시도하게 되면 지금 보다는 더 개선된 수업 환경을 제공할 수 도 있을 것으로 사료된다.[4]

4) '조수남(2002), 수학사의 문제를 통한 접근, 85-95, 수학사랑 통권 33호' 에서 일부 인용함.

본 논문은 이러한 관점에서 이미 출판된 서적과 인터넷 자료들을 이용하여, 초등학교 교사가 제7차 교육과정 초등 수학교과의 도형 영역에서 활용할 수 있는 수학사 학습 자료를 재구성함에 그 목적이 있다.[5] 도형 영역은 수학에서 다루는 중요한 주제 중의 하나로, 초등학교 단계에서는 기본적인 입체도형의 개념에 친숙해지도록 실생활에서 여러 가지 입체들을 접해보면서 여러 가지 모양에 대한 감각을 기르게 하고 있다. 이 때, 단순히 교과서에 제시된 내용 전달에 한정하지 말고, 도형과 주변의 물질을 연관지어 설명하거나, 지금까지의 수학자들이 연구한 재미있는 도형관련 수학사 자료들을 수업시간에 활용한다면, 아동들이 지금보다 더 쉽고 재미있게 도형수업에 다가갈 수 있을 것으로 사료된다. 재구성된 학습 자료의 순서는 본 연구자의 자의적인 판단에 따르되, 가능하면 학년별 단계별, 단원별로 구성했으며, 학생과 교사들이 본 논문에서 연구된 자료들을 수업시간에 바로 활용할 수 있도록 하기 위해서 가능한 한 자료들의 원문을 그대로 인용했다.

II. 수학사 학습자료에 대한 재구성의 실제

가. 제7차 교육과정 초등수학교과서에서 다루고 있는 도형영역의 내용[6]

단계		단원	내용
1	가	3	· 여러 가지 모양 : 상자 모양, 둥근 기둥 모양, 공 모양의 정의와 성질 알아보기
	나	2	· 여러 가지 모양 : 네모, 세모, 동그라미의 정의와 성질 알아보기, 점 판에서 여러 가지 모양을 그려보는 활동을 통한 공간 감각 기르기
2	가	3	· 도형과 도형 움직이기 : 선분, 직선, 사각형과 삼각형의 정의 및 구성요소(변, 꼭지점), 원, 여러 가지 모양 만들기, 모양 옮기기, 모양 뒤집기, 모양 돌리기를 통한 공간 감각 기르기
	나	3	· 쌓기 나무 놀이 : 3차원적 공간 감각 기르기

5) 김해규(2001)는 수와 연산 영역에서 활용 가능한 초등수학사 자료를 연구 · 정리했다.
6) 초등학교 수학교과서 및 교사용 지도서, 교육인적자원부.

단 계		단원	내 용
3	가	3	· 평면도형: 각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 알아보기
		5	· 도형 움직이기: 도형 움직이기, 도형 뒤집기, 도형 돌리기
	나	3	· 도형 : 원의 중심과 반지름 알아보기, 원 그려보기, 지름 알아보기 · 공간 감각 기르기, 모양 만들어 보기, 거울에 비친 모양 알아보기, 규칙에 따라 무늬 꾸며 보기
4	가	3	· 각도 : 각의 크기 알아보기, 각도, 삼각형의 세 각의 크기, 사각형의 네 각의 크기, 재미있는 도형 알아보기(자바말 프로그램 방법 소개)
		4	· 삼각형 : 이등변 삼각형, 정 삼각형, 예각과 둔각, 예각삼각형과 둔각삼각형
	나	3	· 수직과 평행 : 두 직선의 수직관계 알아보기, 수선, 평행선을 그어보기, 평행선의 성질(동위각과 엇각 개념) 알아보기
		5	· 사각형과 도형 만들기 : 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형과 정사각형, 다각형, 대각선, 칠교판
5	가	2	· 무늬 만들기 : 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기를 이용한 무늬 만들기, 다각형으로 도형 덮기(바닥 깔기)
		4	· 직육면체 : 직육면체의 구성 알아보기(면, 모서리, 꼭지점), 정육면체, 면 사이의 관계(평행, 밑면, 수직, 옆면), 겨냥도, 전개도,
		6	· 평면도형의 둘레와 넓이 : 직사각형 및 정사각형의 둘레의 길이, 다각형(사각형, 평행사변형, 삼각형)의 넓이, 넓이가 3인 도형 만들기, 칠교판을 이용한 넓이 구하기
	나	3	· 도형의 합동 : 합동인 도형 만들기, 합동인 삼각형 그리기
		5	· 도형의 대칭 : 선대칭, 점대칭 도형의 성질 및 그리기
		6	· 넓이와 무게 : 사다리꼴 및 마름모의 넓이 알아보기
6	가	2	· 각기둥과 각뿔: 입체도형과 다각기둥, 다각뿔 및 구성요소(밑면, 옆면, 모서리, 꼭지점, 높이)와 전개도
		4	· 쌓기 나무 : 5단원의 선수학습으로, 3차원적 공간 감각 기르기
		5	· 겉넓이와 부피: 직육면체와 정육면체의 겉넓이와 부피, 부피와 들이 사이의 관계
	나	2	· 입체도형 : 원기둥의 구성요소 및 전개도, 원뿔의 구성요소, 여러 가지 회전체 알아 보기, 회전체를 평면으로 잘라보기
		4	· 원과 원기둥 : 원주와 원주율, 원의 넓이, 원기둥의 겉넓이와 부피 구하기

나. 재구성된 도형 영역의 수학사 학습 자료

※ 표를 보는 방법: 1가 열에 '3'이 있는 경우는 1-가 단계 3단원에 활용할 수 있는 자료를 의미함.

순번	자료명	활용 가능한 단원											
		1가	1나	2가	2나	3가	3나	4가	4나	5가	5나	6가	6나
1	알렉산더 대왕의 기하학 공부	전학년 활용가능											
2	피타고라스의 수			3		3		4	3			2	
3	파스칼의 삼각형			3				4				2	
4	마야의 수 체계			3		3			3				
5	하노이 탑												2
6	고대 이집트의 벽화			3		3		3	3	2	5		
7	아르키메데스의 도형	3										2	2,4
8	칠교판의 역사 및 활용		2	3		3		3	3,5	6	3,6		
9	소마큐브												
10	소마큐브의 구성	3			3	3		3	3	4		2,4,5	
11	소마큐브의 제작												
12	각의 탄생					3							
13	중국에서 발명한 평면칠교판	3			3	3		3	3	4		2,4,5	
14	디로스의 문제									4		5	
15	시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형1												
16	시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형2		2	3	3	3	3	4			3	2,4,5	
17	시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형3												
18	수직과 평행: 직각 그리기					3		3	3				
19	이집트인들의 직각 만들기					3		3	3				
20	선분을 등분하기			3		3			3,5				
21	가장 짧은 길이			3					3				
22	정다각형의 작도		2	3		3		3,4	5	4			
23	음료수 캔이 왜 원기둥일까?	3											2,4
24	접시가 왜 원일까?	3	2				3						4
25	맨홀 뚜껑은 왜 둥글까?	3	2				3						4
26	꿀벌의 집 탐구	3		3				3	5		3	2,5	

순번	자 료 명	활 용 가 능 한 단 원											
		1가	1나	2가	2나	3가	3나	4가	4나	5가	5나	6가	6나
27	디자인에도 수학이 사용된다					3		3		2	5		
28	사각형이란?		2	3		3		3	5				
29	다각형이란?		2	3		3		3	5				
30	자연은 도형으로 가득 차 있다	3	2	3		3		3,4	3,5	4	3,5	2,5	2,4
31	유물 속에서 규칙 찾기	3	2			3	3	3,4	3,5	4	3,5	2,5	2,4
32	피라미드의 비밀					3		3				2	
33	벌집의 실생활에의 응용								5			2,5	
34	육각형의 구조가 쓰이는 예					3			5			2,5	
35	정다면체의 최초 발견자											2	
36	정다면체의 종류												
37	정다면체의 순환	3				3		3,4	5	4,6		2	
38	세상을 구성하고있는 기본 원소												
39	도형의 조화	3										2,5	2,4
40	원과 구	3	2				3						2,4
41	뫼비우스의 띠					3,5							
42	뫼비우스 띠를 이용하여 만든 모자		2	3		3,5		3,4		2		2	
43	원주율의 역사(동양 편)												
44	파피루스에 기록된 원주율												4
45	원주율의 역사												
46	아리스토텔레스의 바퀴						3						4
47	각기둥의 부피는 각뿔의 부피의 3배											2,5	2,4

1) 알렉산더 대왕의 기하학 공부[7)]

알렉산더 대왕은 유명한 정치가였다. 모든 면에서 알렉산더 대왕은 백성으로부터 경애와 신망의 대상이었다. 그러나 이 유명한 알렉산더 대왕이 학문에 뜻이 있었다는 이야기를 아는 사람은 거의 없다. 알렉산더 대왕은 학문에도 관심이 많아서 메네쿰스

7) 권영한(1998), 재미있는 이야기 수학, pp.22-23, 전원문화사.
도형 영역의 도입단계에 있어서 아동들의 올바른 수학 학습법에 관한 동기유발 자료로서 활용할 수 있다.

(Menaechums)를 스승으로 모시고 기하학을 공부하였을 때 일이다. 정치에 온 힘을 기울이면서 잠시 짬을 내어 기하학을 공부하는 지라 공부하기도 힘들고 이해가 어려웠다. 그래서 알렉산더 대왕은 "내가 그래도 왕인데 이 권위로 좀더 쉽게 그리고 빨리 배울 수 있는 방법은 없을까"라고 스승인 메네쿰스에게 말하였다. 그러나 메네쿰스는 잠시도 지체하지 않고 "대왕님, 대왕님의 나라에는 임금님의 전용도로나 임금님 사유도로가 있어서 누구보다도 빨리 목적지에 도착 할 수 있으나 기하학은 모든 사람에게 오직 한 길뿐입니다."라고 말하였다고 한다. 이 말은 배움의 길은 오직 자신의 노력여하에 달렸다는 말이다.

2) 피타고라스의 수

기원전 6세기부터 서기 4세기까지 1,000년 동안은 그리스에서 기하학이 가장 화려하게 꽃을 피운 시대였다. 이 당시의 피타고라스와 그의 학파들은 수를 도형화하는 데 흥미를 보이면서 여러 가지 것들을 발견했었는데, 그 절정을 이룬 것이 이른바 피타고라스의 수였다. 그 가운데 3각수, 4각수, 5각수.....와 같은 분류가 있다.

3각수란 오른쪽 그림처럼 1을 점●으로 표시했을 경우, 정삼각형 모양을 만들어내는 수를 말하는데, 3각수에는 다음과 같은 수가 있다.

●
●●
●●●

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

4각수는 정사각형이 되는 수로서, 1, 4, 9, 16, ...등의 제곱 꼴이 되는 수이다.

●●●●
●●●●
●●●●
●●●●

피타고라스 학파는 평면도형에 만족하지 않고 입체에도 손을 대었다. 삼각뿔 수(정사면체 수)가 그것이다. 삼각뿔 수에는 1, 4, 10, 20, 35, 56......과 같은 수들이 있다.

3) 파스칼의 삼각형[8]

---

8) 1. http://www.mathlove.com/pds/materials/stories/creativity/hani-3.html

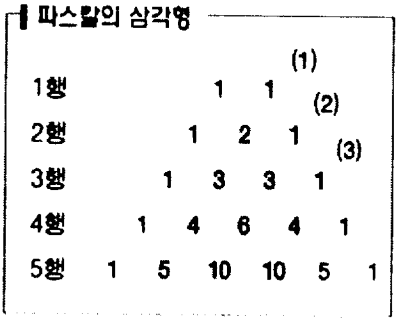
2. 서울교육대학교 수학교육과 수학사연구회(2000), 수학사와 수학이야기, 무지개사, pp. 64-65.

파스칼은 1623년 6월 19일 프랑스에서 태어났습니다. 파스칼의 어머니는 그가 겨우 세 살 때 돌아가셔서 파스칼은 변호사인 아버지 손에서 자랐습니다. 파스칼은 학교에 다니지 못하고 집에서 공부를 하였지만 학문에 대한 열정은 누구보다 뜨거웠습니다. 그는 수학, 물리, 철학의 연구에 그의 생을 바쳤습니다. 그러나 어렸을 때부터 몸이 허약했던 그는 악성 위궤양으로 결국 39살에 죽고 말았습니다. 파스칼은 최초로 계산기를 발명하였고, 파스칼 삼각형을 연구하였으며, '인간은 생각하는 갈대'라는 유명한 말을 남겼습니다. 파스칼 삼각형은 여러 가지 재미있는 수의 성질들을 담고 있는 삼각형을 말합니다. 파스칼 삼각형과 같은 숫자 삼각형은 아주 오래 전부터 생겨난 것입니다. 사람들은 1300년경에 중국 사람이 찾아낸 것이라고 생각하고 있습니다. 그런데도 이 삼각형이 파스칼 삼각형이라고 불리는 이유는 파스칼이 이 삼각형을 만들어 낸 것은 아니지만, 이 삼각형에서 여러 가지 성질들을 발견해 냈기 때문입니다.

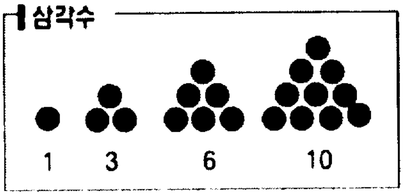
자, 이제 우리도 꼬마 파스칼이 되어 파스칼 삼각형 속에 들어 있는 수의 신비들을 찾아봅시다.

파스칼 삼각형은 양변을 1로 늘어놓고 옆에 있는 두 수를 더하여 두 수의 아래 사이에 그 숫자를 쓴 것입니다. 예를 들면 1과 5아래에는 6이 옵니다. 이렇게 숫자들을 계속 늘여 나가면 됩니다.

파스칼의 삼각형 안에는 많은 특징이 숨어있습니다.



만드는 방법은 아주 간단하다. 각 행의 처음에는 1을 쓰고, 그 다음 행은 위의 두 수를 합한 결과를, 그리고 끝에는 다시 1을 쓰면 된다. 이 과정을 계속 반복하면 위 그림과 같은 파스칼의 삼각형을 얻을 수 있다.



대각선 (1)의 방향에는 1, 2, 3, 4 등 자연수가 쓰여져 있음을 금방 알 수 있다. 또 대각선 (2)의 방향에는 1, 3, 6, 10 등이 있는데 아래 그림과 같이 점을 찍으면 정삼각형 모양을 만들 수 있기 때문에 삼각수라고 불린다. 마찬가지로 대각선 (3)의 방향에는 점을 정사면체 모양으로 배열할 수 있기 때문에 사면체수라 한다.

다른 의미는 없을까? 먼저 3행의 숫자 1, 3, 3, 1이 나타내는 의미를 생각해보자. 이는 3개의 물건이 있을 때, 이 물건들을 각각 0개, 1개, 2개, 3개 선택할 수 있는 가지수를 의미한다. 모든 행의 숫자는 이와 같은 의미를 가진다.

따라서, 4명의 후보 가운데 2명의 대표를 뽑는 경우가 얼마나 되는지 알아보려면 4번째 행에서 3번째에 오는 수가 얼마인지 보면 된다. 모두 6가지가 된다.

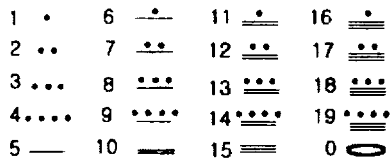
월드컵 본선에서 무작위로 조를 정한다고 가정하면, 우리나라를 제외한 31개 나라 중 우리와 같은 조가 되는 나머지 세 나라의 종류는 모두 몇 가지나 될까? 31번째 행까지 파스칼의 삼각형을 만들고 그 행의 숫자 중 4번째에 오는 수를 보면 간단히 알 수 있다. 직접 해보면, 답은 4495다.

4) 마야의 수 체계[9]

마야의 수 체계는 매우 흥미롭다. 그 기원은 알 수 없지만 상당히 오래된 것으로 추정되는 이 체계는 16세기초에 스페인 탐험대가 유카탄반도(멕시코 동남부)에 들어갔을 때 발견한 것이다. 이 체계는 본질적으로 20진법인데 다만 두 번째 수군이 대신에 [18][20]=360 이었다. 그보다 더 높은 군은 형태로 되어 있다. 이 표현은 마야의 달력이 360일로 되어 있다는 사실로 설명될 수 있을 것이다. 0에 대한 기호가 다음 표에 주어 졌는데 이 기호의 변형이 지금까지도 이용되고 있다. 기본 20군 안에 있는 수는 단순 그룹핑 구조에 따라서 점과 댓쉬에 의해 매우 간단히 표현되고 있다. 여기서 점

9) Eves. 李又英 역(1993). 수학사(고대 · 중세). 京文社. p.13.
마야의 수 기호를 규칙적으로 배열하고 다음 기호를 예측하게 한다.

은 1을 나타내고 댓쉬는 5를 나타내고 있다.



큰 수는 세로 마야법으로 쓰여졌는데 그 한 예는 다음과 같다.

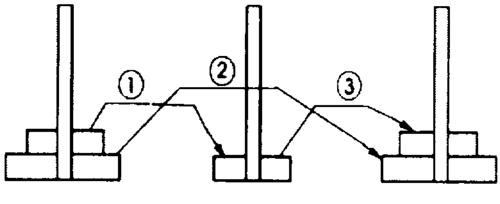
$43,487 = 6(18)(20^2) + 0(18)(20) + 14(20) + 7 =$ 

5) 하노이 탑[10)]

하노이(베트남의 도시)탑에 관한 문제의 고안자로 Lucas(프랑스인, 1842년)라는 수학자가 알려져 있다. 1883년 Claus라는 이름 아래 하노이 탑 문제가 처음 나타났다. Claus라는 이름은 Lucas라는 이름의 철자를 뒤바꿔 놓은 것임을 알 수 있다. 그가 쓴 수학게임에 관한 책 Recreations mathematiques (1882-94)는 고전이 되어 있다.

전설의 내용 : 베나레스에는 세계의 중심이 있고, 그 곳에는 아주 큰 사원이 있다. 이 사원에는 높이 50cm정도 되는 다이아몬드 막대 3개가 있다. 그 중 한 막대에는 천지 창조 때에 신이 구멍을 뚫린 64장의 순금으로 된 원판을 크기가 큰 것부터 아래에 놓이도록 하면서 차례로 쌓아 놓았다. 그리고 신은 승려들에게 밤낮으로 쉬지 않고 한 장씩 원판을 옮기어 빈 다이아몬드 막대 중 어느 곳으로 모두 옮겨 놓도록 명령하였다. 원판은 한 번에 한 개씩 옮겨야 하고, 절대로 작은 원판 위에 큰 원판을 올려놓을 수 없다.

64개의 원판이 본래의 자리를 떠나 다른 한 막대로 모두 옮겨졌을 때에는 탑과 사원, 승려들은 모두 먼지가 되어 사라지면서 세상의 종말이 온다.



10) http://my.dreamwiz.com/piruks/ 에서 토픽수학사, 하노이 탑

위의 경우는 원판의 개수가 2이다. 이 그림에서 보면은 최소한 3번 이동하면, 다른 원판으로 옮겨짐을 알 수가 있다. 그리고, 원판의 개수가 3이면, 최소이동 수는 7번이 됨을 알 수가 있다.

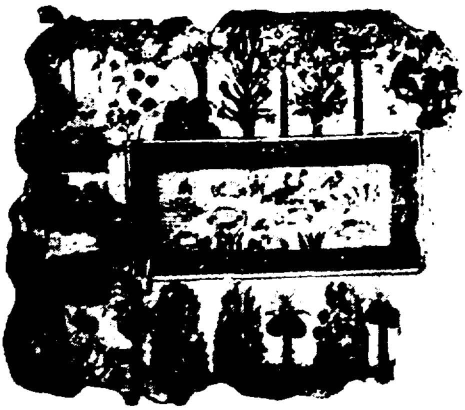
다시 정리하면, 원판의 개수를 n이라 하고, 최소 이동수를 M이라 하면, $n=2$, $M=2^2-1$; $n=3$, $M=2^3-1$ 이러한 식으로부터 추측을 하면, 64개의 원판을 옮기는 데는 번이라는 것을 알 수가 있다.

전설에서처럼 64개를 옮길 때, 한 번 옮기는 시간을 1초 걸린다고 하면 64개를 옮기는 데는 $2^{64}-1$초가 걸린다는 것을 알 수 있고, 이를 년으로 환산하면, 대략 5833억 년 정도라고 한다.

6) 고대 이집트의 벽화[11]

고대 이집트인들의 기하에 대한 개념들은 그들의 미술에도 나타나 있다.

아래의 그림은 BC 1400년경에 그려진 것으로 추정되는 벽화로써 이집트의 테베 근처의 무덤에서 발굴된 것이다



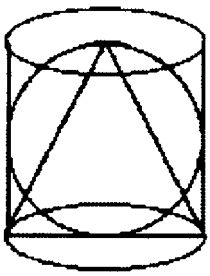
직사각형의 연못이 있고, 연못 안에 물고기들이 있다. 또 연못 주위에는 나무들을 심어놓은 잘 가꾸어진 정원을 벽화로 옮긴 듯 하다. 고대 이집트인들의 그림 방식은 명암이나 원근이 전혀 고려되지 않았음을 알 수 있다.

11) http://pdex.kaist.ac.kr/~jck/egypt.html
지금으로부터 약 3600년 전, 고대 이집트에서도 사각형, 대칭 및 직각의 개념이 사용된 예를 발견할 수 있다.

연못의 모양이 사각형이기 때문에 정확히 사각형으로 그렸으며, 나무들이 연못 주위에 대칭을 이루고 있음을 그대로 표현하고 있습니다. 하나 하나의 나무들의 크기가 같고, 지면과 직각을 이루고 있음을 나타내고 있다.

이집트인들은 그들의 그림에 수학적 사실들을 가급적 사실대로 나타내고자 했다.

7) 아르키메데스의 도형[12)]

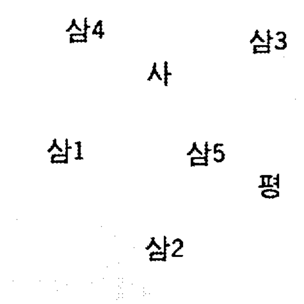


아르키메데스(Archimedes, 287 ? ~ 212 B.C.)의 일화가 있다. 수학은 단순히 추상적이기만 한 것이 아니라 실용성을 발휘한다는 것을 증명해 보이기라도 하듯 지렛대와 도르래의 원리를 응용하여 배를 움직였으며, 그가 살고 있던 시라쿠사가 로마의 침략을 받았을 때 헤론 왕의 부탁으로 갖가지 무기를 개발하기도 하였다. 거대한 육각형의 거울에 태양 빛을 반사시켜 배를 불태웠고, 초대형 투석기, 커다란 기중기와 쇠로 된 갈고리로 로마 병력을 무찔렀다. 로마의 장군 마르켈루스가 시라쿠사로 쳐들어 왔을 때에도 그는 여전히 모래판 위에서 원을 그리며 연구에 몰두해 있었다는데, 로마의 병사가 모래판을 밟자 화가 난 아르키메데스는 "내 원들을 밟지 말라."고 외쳐 화가 난 병사에 의해 죽음을 당하고 말았다. 그 후 "원기둥에 구가 내접한 모양의 묘비를 세워 달라."는 아르키메데스의 생전의 소망대로 로마군의 대장이 그의 묘비를 세워 주었다는 얘기가 남아 있다. 로마가 드디어 시라쿠사를 점령했다. 로마의 한 병사가 지나가는데 "이 그림을 밟지 마라!"(또는 "햇빛을 막지 말고 비켜라!"라고 전해지기도 함)고 지르는 소리가 들렸다. 웬 늙은이였다. 기세가 등등한 로마의 병사는 소리를 지른 늙은이를 칼로 찔러 버렸다. 이것이 현재 전해지고 있는 위대한 과학자 아르키메데스의 마지막이다.

과학자이자 훌륭한 수학자이었던 아르키메데스가 죽었다는 말을 듣자 애통하게 여긴 로마의 사령관 마르켈루스는 그의 소원대로 원기둥에 원뿔과 구가 내접하도록 새긴 묘비를 세워 주도록 하였다고 한다.

12) 권영한(1998), 재미있는 이야기 수학, 전원문화사, pp.62-65.
http://home.hanmir.com/~jpeun1009/f2.htm.
각기둥과 각뿔 및 여러 가지 입체도형의 회전체의 단원에 적용이 가능하고 동시에 이야기 자료로 활용 가능함.

8) 칠교판[13]의 역사 및 활용[14]



◘ 주어진 조건의 칠교판을 사용해서 이등변 삼각형을 만들어 보자.

(1) (삼4, 삼5, 평) 칠교판을 사용해서 이등변 삼각형을 만들어 보시오.

(2) (삼2, 삼4, 삼5, 평) 칠교판을 사용해서 이등변 삼각형을 만들어 보시오.

(3) (삼3, 삼4, 삼5, 사, 평) 칠교판을 사용해서 이등변 삼각형을 만들어 보시오.

(4) 7조각 모두를 사용해서 이등변 삼각형을 만들어 보시오.

◘ 주어진 조건의 칠교판을 사용해서 사각형을 만들어 보자.

(1) (삼1, 삼2, 삼4, 삼5, 사) 칠교판을 사용해서 직사각형을 만들어 보시오.

(2) (삼2, 삼3, 삼4, 삼5) 칠교판을 사용해서 직사각형을 만들어 보시오.

(3) (삼4, 삼5, 삼3, 삼2, 평, 사) 칠교판을 사용해서 직사각형을 만들어 보시오.

(4) 7조각 모두를 사용해서 직사각형을 만들어 보시오.

(5) 7조각 모두를 사용해서 사다리꼴을 만들어 보시오.

(6) 7조각 모두를 사용해서 평행사변형을 만들어 보시오.

9) 소마큐브[15]

소마큐브(Soma Cube)의 창시자는 덴마크 출신의 작가인 피에트 하인(Piet Hein)이다. 1936년 어느 날, 그는 양자 물리학 강의를 듣던 중에 이 퍼즐을 고안하게 되었다.

---

13) 고대 중국의 퍼즐 게임인 칠교놀이는 jigsaw(끼워 맞추어 본래의 그림을 만드는 어린이 장난감, 놀이, picture puzzle) 퍼즐의 한 종류이다. 이는 다소 유럽 종류의 것과는 다르다.

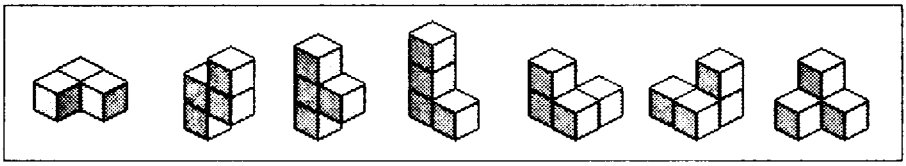
14) 1. 이종욱(2000), 초등학교 수학영재의 확산적 사고 발달을 위한 학습자료 개발연구, 한국교원대학교 석사학위논문, pp. 48-49
2. http://user.chollian.net/~badang25/

15) http://www.mathlove.org/에서 소마큐브 검색

그 강의는 공간이 어떻게 정육면체들로 잘게 잘리워질 수 있는 가에 관한 것이었는데, 그 때 피에트는 갖은 상상의 나래를 펴고 있었다. 결국에는 '크기가 서로 같고 면이 서로 접하는 큐브 4개 이하로 조합된 불규칙한 모양들로 조금 더 커다란 정육면체를 만들 수 있다.' 라는 간단한 이론을 정립하기에 이르렀고, 결국 그는 소마큐브[16]를 이루는 7개의 조각을 만들게 되었다.

10) 소마큐브의 구성[17]

소마큐브(Soma Cube)란 각각 3개 또는 4개의 큐브들로 구성된 7개의 조각으로 되어진 3차원 상의 입체 퍼즐이다. 7개의 소마조각은 3개의 정육면체로 만들어진 소마조각과, 4개의 정육면체로 이루어진 소마조각들 6개로 구성되어 있다.



11) 소마큐브의 제작[18]

▣ 준비물 : 빈 우유팩, 칼, 자, 볼펜, 본드

종이로 된 우유팩은 밑면이 정사각형인 직육면체이다. 따라서 윗 부분을 적당히 잘

16) www.mathlove.org에서 소마큐브 검색
"소마"라는 이름은 미래사회를 묘사한 Aldous Huxly의 소설 "용감한 신세계(Brave New World)"에서 인용한 것이다. "소마"는 그 세계의 정착민들이 한가할 때나 기분이 좋지 않을 때 사용했던 중독성이 있는 마약이었다.

17) http://www.mathlove.org/에서 소마큐브 검색
일반적인 사람들은 소마큐브의 성공을 주로 소마큐브의 단순함 때문이라고 생각했다. 겉보기에 그것은 7개 조각으로 구성된 단순한 퍼즐일 뿐이다. 하지만 7개 밖에 안 되는 조각으로 구성되어 있으므로, 여러분들은 스스로에게 '이것이 과연 어렵겠는가?' 라고 물을지도 모른다. 그러나, 일단 시도하는 순간 문제들이 생각했던 것보다 더 어렵다는 것을 곧 알게 될 것이다. 즉, 단순한 7가지의 큐브로 많은 형태를 만들어 낼 수 있고, 좀 더 많은 큐브들로는 백만 가지 이상의 조합이 가능하다는 것으로 알려져 있다. 소마큐브는 입체기하의 개념을 연습하려는 학생들에게 효과적이다. 7개의 조각들을 사용하여 입체를 포함한 기하학적 개념들을 탐구할 수 있을 뿐만 아니라, 해법들을 기록하는 방법을 배우고 그들 스스로 퍼즐을 만들 수도 있을 것이다. 다음의 인터넷 사이트에 접속하면, 여러 가지 자료들을 구할 수 있다.
http://www.srl.rmit.edu.au/mav/PSTC/cc/soma.htm

18) 수학아 놀자2, 브라이언 볼트, 푸른 미디어

라내면 정육면체를 만들 수 있다. 잘라서 펴즐 도구를 만들기 전에 우선 잘 말려야 한다. 말리는 과정부터 설명하기로 하자.

▣ 만드는 과정

(1) 먼저 빈 우유팩을 구기지 말고 안에 남은 찌꺼기를 물로 깨끗하게 씻어낸 다음 뚜껑 부분이 아래로 오게 하여 잘 말린다. (말리는 시간이 걸리므로 미리 준비한다.)

(2) 잘 말린 우유팩을 밑면의 한 변을 자로 재어 정육면체가 되게 선을 그린다. (한 우유팩 밑면을 다른 우유팩 옆면에 대고 선을 그으면 되므로 실제로는 자가 별로 필요 없다.)

(3) 선 그어놓은 부분의 네 귀퉁이를 약간(약 1cm정도) 씩 홈집을 낸 후, 한 쪽씩 잘라 나간다. 이렇게 정육면체를 만든다.

▣ 소마큐브를 제작할 때의 일반적인 주의사항

(1) 밑면은 너무 두꺼우므로, 본드로 붙일 때 가급적 피하도록 한다.

(2) 뚜껑이 열린 정육면체이므로 열린 부분이 서로 다른 곳을 향하게 본드로 붙인다. 그것이 균형도 맞고 나중에 맞추기도 편하다.

12) 각의 탄생[19]

원의 각도는 여러분도 잘 알다시피 360°입니다. 그런데 왜 360°일까요?

지금으로부터 4000여년 전 바빌로니아에는 집념이 강한 한 학자가 있었습니다. 그는 수 십 년 동안 해뜨는 것만 조사하고 있었습니다. 그리고는 드디어 외쳤습니다. "마침내 나는 대 발견을 해냈다."

그것은 태양이 360일만에 전에 있던 곳과 똑같은 곳에서 떠오른다는 것이었습니다. 아주 오랜 옛날에는 1년을 도형으로 나타낼 때에 원으로 나타내었으며, 또한 그 당시 사람들은 1년을 360일이라고 생각했으므로 원의 각도도 360°가 되었던 것입니다.

만일 1년이 365일이라는 사실을 일찍 알았다면 아마도 원의 각도는 365°가 되었을지도 모르는 일입니다.

---

19) http://www.tgedu.net/student/cho__math/index.htm

13) 중국에서 발명한 평면 칠교판[20)]

정사각형에서 분해 나온 것인데 사람들은 여기서 힌트를 받아 정육면체를 분해할 생각을 하게 되었고 잇따라 입방체의 지능완구가 탄생하게 되었다.

정육면체나 직육면체를 27개의 작은 입방체로 분해한 다음 그것을 모양이 다른 7개의 부품으로 만들어 이 7개의 부품을 가지고 침대, 소파, 계단 등 여러 가지 조형을 맞출 수 있다.

14) 디로스의 문제[21)]

정육면체에는 디로스의 문제가 유명하다. 이는 기하학의 3대 문제 중 하나로 그 해법이 매우 어려워 많은 학자가 연구하였으나 해결하지 못하고 근년에 와서 불능 문제라는 것이 증명되었다. 영웅전의 저자 플루타크 시대(BC 430년경)에 그리스 디로스 지방에 패스트가 유행하였다. 사람들은 몹시 겁이 나서, 일포이신에게 의지하여 재난을 면하려고 신에게 빌었다. 신은 신전 앞에 있는 정육면체 모양의 돌 제단의 부피를 지금 것의 두 배로 하면 소원을 들어 주겠다고 하였다. 사람들은 즉시 각 변의 길이가 두 배인 제단을 만들어서 제사를 지냈다. 그러나 병은 계속 번져만 갔으므로, 다시 신에게 갔다. 신은 부피를 두 배라 하라 하였는데 변을 두 배로 하여 부피가 8배가 되었다고 잘못을 지적하였다. 그래서 사람들은 당시의 대수학자 플라톤에게 이 문제를 상의하러 갔다. 이것이 디로스의 문제 '자와 컴퍼스만을 써서 주어진 정육면체의 부피의 두 배가 되는 정육면체의 한 변을 작도하여라'이다.

다른 일설에는, 미노스라는 왕이 죽은 아들의 묘를 만들려고 할 때, 공사 담당자가 제시한 설계도를 보고 마음에 들지 않아 두 배가 되는 묘(정육면체)를 만들려고 한 데서 생겼다고도 한다.

15) 시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형1[22)]

---

20) 당상빈(1999), 수학의 정상이 보인다, 도서출판 예가, pp.449-459.
2-나 단계 3단원의 쌓기나무놀이의 변형으로 활용 가능함.

21) 권영환(1990), 재미있는 이야기 수학, 한국 출판 금고.
6-가 단계 겉넓이와 부피에 사용할 수 있는 내용.

22) 박명진(2000), 수학 영재의 창의적 문제해결력 신장을 위한 학습자료 개발, 한국교원대학교 석사학위논문, pp.44-46.

◘ 주어진 삼각형을 다음과 같은 규칙에 따라 그려보시오.

> 【규칙】
> • 1단계
> ① 삼각형의 세 변의 가운데 점을 연결한다.
> ② 가운데 삼각형에 빗금을 친다.
> • 2, 3, 4 단계
> 빗금치지 않은 나머지 삼각형도 같은 방법으로 나누어 빗금을 친다.

가) 1단계부터 4단계까지 빗금 치지 않은 삼각형의 수를 세어보고, 표를 완성하시오.

단 계	1 단 계	2 단 계	3 단 계	4 단 계
삼각형의 수	3			

나) 똑같은 방법으로 시행해 나갈 때 8단계의 빗금치지 않은 삼각형의 개수는 몇 개나 되는지 알아보시오.

다) 이 단계를 계속 시행해 나간다면, 삼각형의 모양은 어떻게 되는지 상상해 보시오.

16) 시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형2[23]

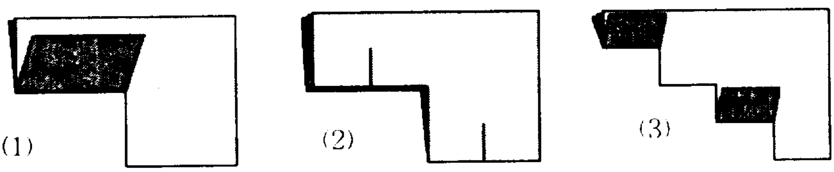
◘ 프랙탈은 점점 더 미세한 구조로 자기 닮음의 성질을 가지는 기하학적인 도형이다. 프랙탈 카드의 핵심은 같은 과정을 원하는 만큼 계속 반복하는 것이다.

• 준비물 : 색 켄트지 2장(카드 속지와 겉지), 자, 칼, 가위, 풀, 채색 도구

• 만드는 방법

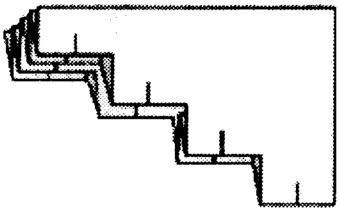
가) 카드 속지와 겉지를 같은 크기로 자른다.

나) 카드 속지를 다음 단계로 만든다.



(1) (2) (3)

23) http://user.chollian.net/~badang25/



(1) 종이를 반으로 접은 후 접은 선(밑변)의 중심에서부터 높이의 반만큼 잘라 왼쪽을 접어 올린다.

(2) (1)의 왼쪽 부분을 펴서 다시 안쪽으로 접어 올리고, 높이의 반만큼 자른다. 다른 한 쪽도 같은 길이 만큼 자른다.

(3) 각각의 왼쪽 부분을 접어 올린다.

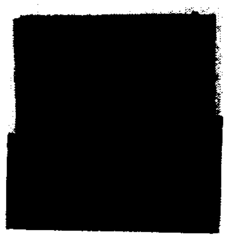
(4) (3)의 왼쪽 부분들을 펴서 다시 안쪽으로 접어 올리고, 각 부분의 중심에서 높이의 반만큼 자른다.

(5) 같은 과정을 가능한 만큼 반복한다.

다) 카드 겉지를 반으로 접어서 위에서 완성된 프랙탈 카드 속지와 풀로 겹쳐 붙인다.

라) 카드 겉지와 속지를 예쁘게 장식한다.

17) 시어핀스키 삼각형과 프랙탈 도형3[24]



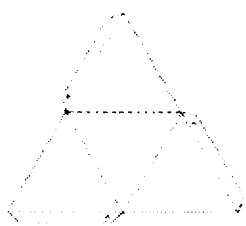
▣ 준비물 : 가위, 자, 칼, 이쑤시개, 풀(상당히 중요함), 종이 (정사면체를 만들 종이는 두껍고 질긴 카드류의 종이가 좋음), 종이테이프, 순간접착제

▣ 기본형 만드는 법

1) 자 르 기 - 실선을 따라 정확하게 자른다.

2) 접　　기 - 점선을 따라 조심스럽게 자를 대어 접는다. 반드시 직선의 모서리가 직선이 되도록 해야 한다.

3) 풀칠하기 - 전개도의 늘어진 부분에 풀칠을 한다. 풀칠을 한 부분이 정사면체의 안쪽에 들어가도록 한다.



4) 기다리기 - 풀이 마르도록 기다린다. 모서리가 벌어지면 이쑤시개를 이용하여 벌어진 부분에 다시 풀칠을 하여 붙인다.

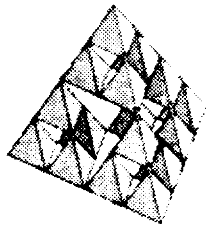
5) 다음 쪽의 사면체를 이용하여, 가능하면 많은 개수의 사면체를 만드시오.

24) http://user.chollian.net/~badang25/

■ 피라미드 만드는 법

1) 1cm×2cm의 종이테이프를 잘라 피라미드의 꼭지점을 서로 마주 댄 후 그 위에 종이 테이프를 붙인다.

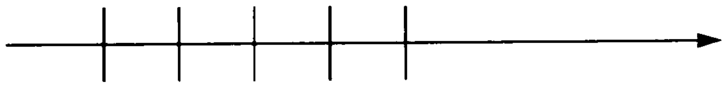
2) 연결부위에 순간접착제를 한 방울 떨어뜨린다.



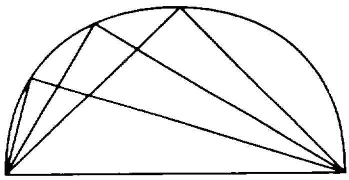
18) 수직과 평행: 직각 그리기[25]

한 제도사와 수학자가 직각 그리기 시합을 하기로 하였습니다. 결선의 날이 되자, 제도사는 대단한 자존심과 명예를 걸고 자신만만하게 시합에 임했습니다. 술렁거리던 장내가 조용해지며 수학자는 입가에 회심의 미소를 지으며 시합장에 나타났습니다. 시합이 시작되었습니다. 제도사는 흰 종이 위에 먼저 직선을 긋고 위에서 아래로 수선을 그어갔습니다.

제도사의 직각



수학자는 반원을 그리고 반원의 원주를 지나 원의 끝점에 선을 그어 직각을 만들어 갔습니다



수학자의 직각

얼마의 시간이 지난 후 새까맣게 직각이 그려진 종이 위에 연필을 올려놓은 제도사가 말하였습니다.

"내가 졌소!"

결국 수학자가 직각 그리기에서 승리하고 말았습니다. 그 때도 수학자는 아주 간편한 방법으로 직각 그리기를 계속하고 있었습니다.

◘ 우리 조상들은 어떻게 직각이 되도록 집을 지었을까요?

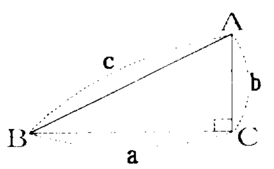
25) 정내경, 문창룡(1999), 호기심 수학, 교학사, pp. 136-139.

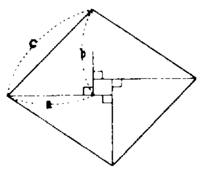
19) 이집트인들의 직각 만들기[26)]

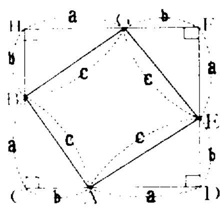
어린이 여러분은 원과 직각 그리기 중 어느 것에 자신이 있습니까? 원은 줄에 막대기를 달아 휭하고 한바퀴 돌면 되지만 직각은 그저 만만치가 않습니다. 이집트의 위대한 왕 파라오는 나일강의 옥토를 이용해 이집트를 잘 사는 나라로 만들어 국민들의 칭송을 한 몸에 받고 있었습니다. 그는 자기가 죽으면 묻히게 될 무덤을 미리 만들도록 명령을 내렸습니다. 그것이 유명한 피라미드입니다. 지금처럼 과학이 눈부시게 발달되었어도 피라미드를 불가사의(알 수 없는 일)라고 말하고 있습니다. 어떤 힘이 불가사의를 만들어 낼 수 있었을까요? 그것은 직각과 같은 각도를 정확히 계산해 낼 수 있고 또, 여러 분야의 수학과 공학이 발달했기 때문에 가능했던 것입니다.

그들은 다음과 같은 방법으로 직각을 만들었다고 합니다.

기다란 노끈을 똑같은 간격으로 12개로 나누고 세 사람이 아래 그림과 같이 끈을 잡고 섭니다. 그러면 길이가 3과 4사이에서 직각이 만들어지게 됩니다. 이들은 길이의 비가 3 : 4 : 5인 삼각형은 직각 삼각형이라는 사실을 알고 있었던 것입니다.







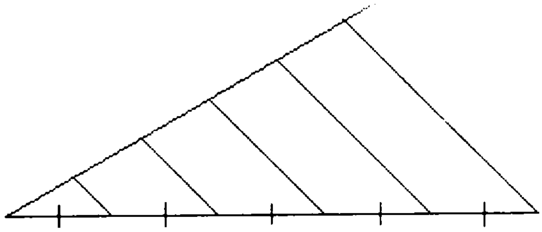
20) 선분을 등분하기[27)]

아래와 같은 선분을 똑같은 크기로 5등분하는 방법을 찾아봅시다. 어떻게 하면 좋을까요? 물론 5cm나 10cm등 정확히 떨어지는 길이라면 좋겠지만 9.85cm라든지 13.27cm일 수도 있습니다. 그러니까 자로 전체를 재서 다섯으로 나누는 방법은 정확한 답이 아니라고 할 수 있습니다. 옛날 수학자들은 다음과 같은 방법으로 직선을 등분하였습니다.

---

26) 1. 서울교육대학교(2000), 수학사와 수학이야기, 무지개사, pp. 64-65.
 2. http://www.tgedu.net/student/cho__math/index.htm

27) http://www.mathstart.org/
 4-나 단계 3단원 평행선 그어보기에 활용 가능함.



주어진 직선에 임의로 그림과 같은 선을 그린 후 직선 위에 같은 간격으로 점을 5개 찍습니다. 그리고 다섯 번째 점과 주어진 선분의 끝을 잇습니다. 다음으로 이은 직선과 평행이 되게 다섯 개의 선을 그으면 정확히 다섯 등분이 됩니다.

21) 가장 짧은 길이[28)]

오랜만에 신나는 여행을 떠나 볼까? 기름 값도 많이 올랐는데 되도록 이면 빨리 목적지에 도착하는 것이 기름 값을 줄이는 최선의 방법이겠지? 어떤 길이 가장 짧을까 알아보도록 하자. 대지가 평평하고 곧다면 가장 짧은 길은 직선이 되겠지만, 대지가 평평하지 않고 구불구불하거나 장애물이 있다면, 이야기는 달라질 것이다. 건물을 짓는 경우 길이를 최소로 하거나 설치할 전선의 길이를 최소로 하려고 할 때, 도로 및 지하철을 설계할 경우 최소의 경비를 들이기 위해 가장 짧은 길을 구하려 할 때 최단거리에 관심을 가지게 된다. 그리고 최단의 거리를 구하기 위해서는 수직과 수평을 이용하여 구해야 한다.

그러면 실생활에서 사용되는 경우를 알아보자.

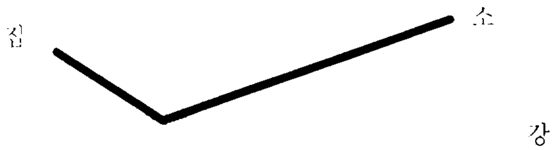
한 소녀가 강둑 위의 목장에서 일하고 있다. 강을 따라 같은 쪽 조금 아래 떨어져 있는 나무에는 소 한 마리가 매어져 있다. 소녀는 매일 한 번 그 소에게서 젖을 짜야 하는데 항상 젖을 짜기 전에 먼저 강가에 가서 젖을 담을 그릇을 씻는다. 소녀가 그릇을 씻고 소에게 가려고 할 때 가장 짧은 길은 어떻게 구하면 될까?

해결은 간단하다. 직선 거리가 최단거리이고, 그 직선 거리는 수직을 통해 만들 수

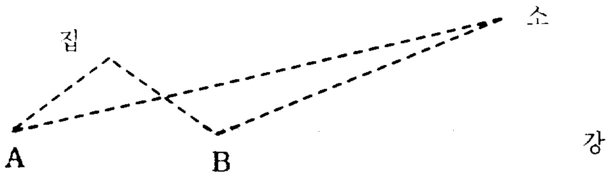
28) 수학사랑(2001. 2 · 3월), 통권 25, pp. 30-33.
2-가 단계 3단원 직선, 4-가 단계 3단원 수직과 평행에 활용 가능함.

있다. 먼저 상황에 맞는 그림을 그리고, 그릇을 씻을 지점에 점을 찍어 놓는다.

이때 집에서 그릇을 씻을 지점까지는 최단 거리는 직선 거리이며, 또한 강에 찍힌 지점에서 소가 있는 곳까지의 최단거리 역시 직선거리이다. 따라서 소녀가 집에서 출발하여 강가에 들른 후, 소에게 가는 최단 거리는 두 직선 거리의 합임을 알 수 있다.



여기서 강에 찍힌 점은 매우 중요하다. 강의 어느 지점에 점을 찍느냐에 따라 소녀가 걷게 되는 거리가 달라지기 때문이다.

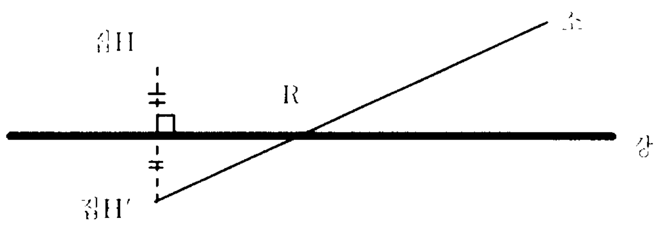


실제로 집→A→소에게 가는 거리는 집→B→소에게 가는 거리보다 더 길다.

그렇다면 강가의 어느 지점에 점을 찍어야 소녀가 걷는 거리가 가장 짧게 될까?

집이 강 반대편의 강에서 같은 거리만큼 떨어진 곳(H의 강에 대한 선대칭인 지점)에 있다고 가정해 보자.

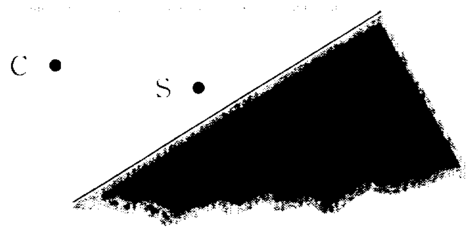
그러면 집(H')→강(R)→소에게 가는 직선 거리가 최단 거리가 될 것이다.



그런데 H와 R을 연결하면 H→R의 거리는 H'→R의 거리와 같다. 따라서 그릇을 씻는 지점을 R로 정하면 소녀는 최단 거리를 걷게 되는 셈이된다.

위의 내용을 바탕으로 다음의 문제를 해결해보자.

다음 그림에서 C지점에서 말을 탄 목동이 있다. 집(S지점)에 돌아가기 전에 목동은 말에게 풀을 먹이고 다시 강으로 가서 물을 먹이려고 한다. C지점에서 풀밭으로 간 다음 강으로 갔다가 다시 집으로 가는 길 중 가장 짧을 길을 찾아 보시오.



22) 정다각형의 작도[29]

눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것을 작도라고 한다. 컴퍼스는 원을 그리는 데 쓰이며 눈금 없는 자는 두 점을 잇는 직선을 그리는 데 쓰인다.

작도는 고대 그리스인들의 노동이 아닌 하나의 놀이 문화로서 그들의 문화를 꽃피우는 데 일조 하였다. 그리스의 웅장하고 아름다운 파르테논 신전도 자와 컴퍼스란 간단한 도구로 설계를 하여 세운 것이라고 한다.

그렇다면 이 두 가지 도구를 가지고 어떤 도형을 작도 할 수 있을까?

우선 정삼각형, 정사각형, 정육각형이라면 누구나 컴퍼스와 자만으로 작도할 수 있을 것이다.

또, 임의의 각을 이등분할 수 있으므로 정삼각형의 한 내각은 60°, 이 각을 이등분한 30°, 15°, …, 정사각형의 한 내각은 90°이므로, 이 각을 이등분한 45°, 22.5°,… 등의 각을 작도할 수 있다.

정팔각형, 정십이각형, 정십육각형, … 등은 정사각형이나 정육각형의 각각의 변을 이등분해 나가면 되기 때문에 얼마든지 작도할 수 있다.

◘ 정팔각형을 작도하여 보시오.

◘ 정십이각형을 작도하여 보시오.

29) http://www.taesan.ms.kr/generaldb/math/1pldz.html

23) 음료수 캔이 왜 원기둥일까?[30]

'음료수 캔' 하면 일단 부피(음료수의 양)를 이해해야 합니다. 음료수 제조 회사 입장에서는 같은 음료수를 담더라도 그 그릇을 만드는 재료비를 줄여야만 보다 경제적이겠지요? 이익을 많이 낼 수 있다는 것이지요. 그래서 직육면체나 삼각기둥 보다 는 원기둥 모양을 택했을 것입니다. (사실 구가 가장 넓겠죠 -그런데 이것은 세우기가 불편하다.)

이론적인 증명에 의하면 같은 재료(넓이가 같은)를 가지고 다양한 모습으로 그릇을 만들었을 때 구(공)이 가장 큰 부피를 가진다는 것이 알려져 있습니다. 그러나 모든 것이 경제적이 되어 재료비만 아낀다고 물건이 잘 팔리는 것은 아니죠? 디자인이나 그 모양도 생각해야 하겠죠? 그리고 공은 세워서 진열하는 비용이 추가로 든다는 생각을 한다면 원기둥 쪽으로 바꿀 수 있을 것 같네요.

이제 겨울철이죠. 난로를 설치하겠죠. 연통을 생각해 보세요. 연기가 잘 빠져나가야 되겠죠. 그러면 단면적이 최대일 때가 가장 잘 빠져나가겠죠. 또 비용도 싸게 만들 수 있고.

24) 접시가 왜 원일까?[31]

이유는 단면적이 가장 넓기 때문입니다. 즉 같은 재료로 넓이가 가장 큰 것은 원입니다.

삼각형으로 접시를 만들거나 사각형으로 만들면, 담을 수 있는 양이 더 적어집니다.

25) 맨홀 뚜껑은 왜 둥글까?[32]

길을 지나가다 보면 흔히 보이는 맨홀 뚜껑은 항상 원 모양이다. 왜 맨홀 뚜껑은 동그랄까? 세모난 모양의 뚜껑이라면 더 개성적일 텐데…. 답은 뚜껑이 구멍 속으로 빠지지 않게 하기 위해서입니다. 만약 맨홀 뚜껑이 삼각형이나 사각형으로 만들어져 있다면 뚜껑이 구멍 속으로 빠질 수 있습니다. 대각선이 더 길기 때문에 빠지죠. 그러나 원은 대각선이든 다 지름이 일정하므로, 절대로 빠지지 않습니다.

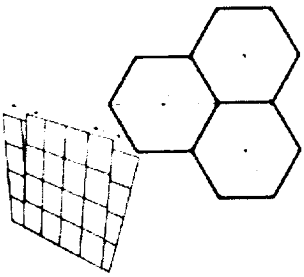
---

30)) http://delta.new21.net/

31)) http://delta.new21.net/

32)) http://delta.new21.net/

26) 꿀벌의 집은 왜 정육각형 모양일까?[33)]



부지런한 동물을 꼽으라면 꿀벌이 빠지지 않는다. 여왕벌로 태어나면 알을 낳는 일로, 일벌로 태어나면 이 꽃 저 꽃을 날아다니며 꿀을 따오는 일을 하거나 알을 돌보는 일로 평생을 보낸다. 꿀벌은 부지런할 뿐 아니라 굉장한 건축가이기도 하다. 그래서 꿀벌들은 불순물이 끼지 않고, 서로 빈틈없이 연이어 있는 형태를 가진 꿀을 붓기에 알맞은 그릇을 만들었다.

그런데 동일한 점을 둘러싼 공간을 빈틈없이 채울 수 있는 도형은 정삼각형, 정사각형, 그리고 정육각형의 세 가지 밖에는 없다.[34)] 이제 꿀벌은 세 도형 가운데 어느 하나를 선택해야만 한다. 만약, 정사각형 모양으로 집을 만들면 어떻게 될까? 이 모양은 양쪽 옆에서 조금만 건드려도 잘 흔들리기 때문에 바람이 불면 꿀이나 알이 성치 않을 것이다. 그럼 정삼각형은 어떤가? 튼튼하기는 하지만 똑같은 면적을 갖는 정육각형 모양으로 방을 만들 때보다 재료가 2배 더 들게 되므로 비경제적이다.[35)]

이것이 바로 정육각형 모양의 방을 선택한 이유가 아닐까? 비록, 꿀벌들은 본능적으로 최대의 각을 가진 정육각형을 택했지만, 이 형태는 다른 둘보다 훨씬 많은 꿀을 채울 수가 있다. 비록 꿀벌이 수학적으로 생각하고 계산해서 집을 지은 건 아니지만 자연계는 이렇게 수학적인 법칙을 따르고 있다.

---

33) 파푸스, 「수학집성(數學集成)」중 '꿀벌의 집에 관한 이야기'
http://www.mathlove.co.kr/pds/materials/stories/creativity/hani-4.html
4-가 단계에서 활용할 수 있는 자료로서, 평면도형을 사용한 바닥 깔기 문제로 활용 가능함.

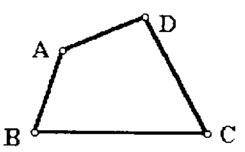
34) 먼저, 평면을 가득 메울 수 있는 도형이 어떤 것이 있을지 생각해보자. 정다각형 가운데 평면을 빈틈없이 메울 수 있는 것은 오직 정삼각형, 정사각형, 정육각형뿐이다. 정오각형의 한 내각은 108도인데 한 꼭지점에 3개의 정오각형을 모으면 12도만큼 벌어지게 되므로 도저히 평면을 메울 수 없다. 마찬가지로 정칠각형 이상인 경우도 한 꼭지점에 2개를 모으고 남는 틈을 그 정다각형으로 메울 수 없다. 개체별 독립생활을 하는 생물들의 집은 대부분이 원형이다. 그러나 벌과 같이 군집생활을 하는 동물이 여러 개의 원으로 집을 지을 때는 원과 원 사이에 틈이 생긴다.

35) 둘레의 길이가 3a로 일정한 정삼각형과 정육각형을 만든다고 생각해보자. 정삼각형의 경우는 한 변의 길이가 a이므로, 피타고라스의 정리를 사용해서 높이를 구해보면 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로, 정삼각형의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이 된다. 그러나, 정육각형의 한 변의 길이는 $\frac{a}{2}$이므로, 정육각형의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$이 되어 정삼각형의 면적의 2배가 됨을 알 수가 있다.

27) 디자인에도 수학이 사용된다.[36]

수학자에게 가장 관심 있는 벽지 문양의 특성은 이것이 규칙적인 방식으로 반복되어 평면을 완전히 채운다는 사실이다. 그래서 수학자가 연구하는 '벽지 문양'은 리놀륨(linoleum) 마루 깔개, 무늬가 있는 옷감과 융단 등을 포함한다. 이런 실생활의 예에서 양식은 벽 또는 바닥 또는 옷감 끝까지 반복된다. 수학자의 양식은 모든 방향에서 무한히 뻗어 있다. 벽지 문양 뒤에 깔려 있는 수학적 개념은 평면 격자와 관련된 디리클레 영역(Dirichlet domain)의 개념이다. 평면의 임의의 격자와 그 격자의 한 점에 대해서, 그 점의 디리클레 영역은 다른 어떠한 격자 점보다 그 점에 더 가까이 있는 평면의 전체 영역으로 이루어진다. 격자의 디리클레 영역은 격자의 대칭에 대한 '벽돌 모형'(brick model)을 제공한다. 새로운 벽지 문양을 도안하기 위해 해야 할 모든 작업은 종이의 한 부분을 채우는 양식을 만들고 그 양식을 전체에 걸쳐 반복하는 것이다. 좀더 정확하게 말하면, 격자 기판에서 시작해서 그 양식으로 특정한 하나의 디리클레 영역을 채우고, 똑같은 양식을 다른 모든 디리클레 영역에 반복하면 된다. 분명히, 벽지 수학은 심오하고 무시하지 못할 본질적인 흥미 거리를 갖고 있음이 밝혀질 것이다.

28) 사각형이란?[37]



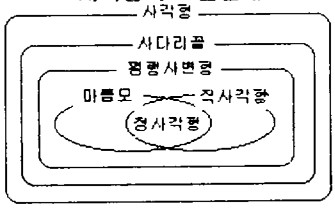
네 변을 가지고 있는 다각형을 말한다. 보통 한 평면 위에서 한 직선 위에 있지 않은 네 점을 연결한 도형을 사각형이라고 한다. 사각형 중에서 한 쌍의 대변(이웃하지 않는 두 변)이 평행할 때 사다리꼴, 두 쌍의 대변이 각각 평행할 때 평행사변형, 네 변의 길이가 모두 같을 때 마름모, 네 각이 직각인 사각형을 직사각형이라 한다. 또, 네 변이 같고, 네 각이 같은 사각형은 정사각형이다. 따라서 정사각형은 마름모 또는 직사각형이 되고, 평행사변형도 된다. 또한 마름모・직사각형은 평행사변형도 되고, 평행사변형은 사다리꼴도 된다. 이들 각 사각형의 집합 사이의 포함관계를 벤다이어그램으로 나타내면 아래의 그림과 같다.

---

36) Keith Devlim(1996), 수학: 양식의 과학, 경문사, pp.351-353.
7차 교육과정에 새롭게 도입된 규칙성과 함수에 관련된 교과내용으로써 아동들로 하여금 일상생활에서 규칙성을 활용한 것들과의 친숙함을 느끼게 하고, 어떤 규칙이 보기 좋은 가에 대한 감각을 기를 수 있게 할 것이며, 아울러 이러한 무늬들도 수학과 관련성이 있음을 알게 함과 동시에 평면에서의 바닥 깔기 자료로서도 활용이 가능하다.

37) http://www.mathlove.com/ 에서 사각형을 검색.

사각형의 포함관계



사각형은 한 개의 대각선에 의하여 두 개의 삼각형으로 나누어 지는데, 그 각 삼각형의 결정조건을 바탕으로 생각하면, 다음의 각 경우는 오직 한 가지로 사각형이 결정(사각형의 결정조건)된다.

사각형 ABCD에서

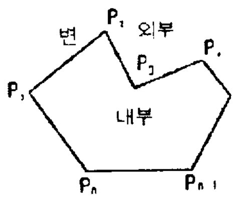
① AB, BC, CD, DA의 길이와 ∠B의 크기를 알 때

② AB, BC, CD의 길이와 ∠B, ∠C의 크기를 알 때

③ AB, BC의 길이와 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 알 때

29) 다각형 (polygon, 多角形)[38]

몇 개의 선분으로 둘러싸인 평면도형을 말한다. 이루고 있는 선분의 개수에 따라 삼각형 · 사각형 · n각형 등으로 나누어진다. 다각형은 영어로 polygon이라 하는데 이는 그리스어 poly(많다)+gonu(무릎)에서 유래한다. 다각형의 모든 변의 길이의 합을 다각형의 둘레, 다각형의 둘레로 둘러싸인 평면 부분을 다각형의 내부, 평면에서 둘레와 내부를 제외한 나머지 부분을 다각형의 외부라 한다.



오른쪽 그림에서 변 P1Pn의 P1을 지나는 연장선 위의 점을 X라 하고, 변 P1P2의 P1을 지나는 연장선 위의 점을 Y 라고 할 때, ∠P2P1Pn을 내각, ∠P2P1X와 ∠PnP1Y를 외각이라 한다.

n각형의 내각의 크기의 합은 $180 \times (n-2)°$이고,

외각의 크기의 합은 360°이다. 또한 $n(n-3)/2$개의 대각선을 가진다.

가) n각형의 대각선의 수

n각형의 대각선의 수나 내각 · 외각의 크기의 합은 모두 주어진 n각형을 몇 개의 삼각형으로 분할함으로써 구할 수 있다.

38) http://www.mathlove.com/ 에서 다각형을 검색.

나) 정다각형

모든 변의 길이와 각의 크기가 같은 다각형을 정다각형이라고 한다. 즉, 정삼각형 · 정사각형 · 정오각형 · 정육각형 등은 모두 정다각형이다.

다) 정다각형의 작도

정다각형은 원의 둘레를 같은 길이로 나누어, 그 원에 내접시키는 방법으로 그릴 수 있다. 예를 들면, 원의 반지름과 같은 길이를 잡은 컴퍼스로 원주를 등분하면 6등분된다. 이 때 각 등분 점을 연결하면 정육각형 또는 정삼각형을 작도할 수 있다. 그러나 자와 컴퍼스만으로는 7등분 · 9등분 · 11등분 등은 할 수 없다.

30) 자연은 도형으로 가득 차 있다.[39)]

별들은 타원운동을 하며, 콘서트장의 축포는 포물선을 그리며 떨어지고, 사막에서 일어나는 무서운 모래 소용돌이와 바닷가에서 볼 수 있는 아름다운 소라 껍질은 나선형을 이루고 있다. 눈송이들은 하나도 같은 모양이 없으나 모두 육각형 구조이고, 소금의 결정은 정육면체이며, 다이아몬드는 팔면체이고 무수한 바이러스들은 이십면체 등의 규칙적인 형태를 갖는다. 이와 같이 자연 속 모든 물체들은 그것만이 따로 자연 속에 존재하는 것이 아니고, 언제나 수학 속의 도형들과 연관되어 생각할 수 있다. 규칙적인 점과 선의 짜임새는 원시적인 생활에서도 기하학적인 미가 있었고, 서투른 솜씨나마 그것을 재창조하였다는 흔적을 여실히 보여주고 있다. 도형 개념의 발달은 피아제의 재미있는 실험, 즉 "네 살 먹은 어린이는 직선과 곡선을 구별하지 못하며, 또 선분의 길이라든지 각의 크기에 대해서도 주목하지 못한다. 오로지 도형의 결합 관계에 대해서만 주의하고 있다. 그러다가 나이가 들수록 차츰 선분의 길이, 각의 크기, 도형의 모양과 크기 등을 인식하게 된다고 한다."는 것을 통해 알아볼 수 있다. 우리의 조상들도 아마 그 정도의 유치한 인식 단계로부터 출발하여 오랜 세월을 겪고 난 다음 마침내 추상적인 도형 개념에 도달할 수 있게 되었을 것이다.

현실 세계에서 우리가 보고 만지는 물체와 그 모양을 머리 속에서 이상화한 수학적인 도형 개념, 그리고 이 둘 사이에 다리를 놓아주는 상징적 구실을 하는 도형의 그림, 이 셋을 잘 구별할 줄 알아야 한다.

---

39) 수학사랑, 1999년 가을 17호 p.116~117.
5-가 단계 학습자료로 활용이 가능함.

31) 유물 속에서 규칙 찾기[40)]

역사 속의 오래된 유물 속에 숨어 있는 수학을 볼 수 있는 기회로 견학을 이용할 수는 없을까? 박물관에 가면 가장 많이 볼 수 있는 전시물 중의 하나가 도자기라고 할 수 있다. 도자기에는 여러 문양이 그려져 있는데 일정한 모양이 반복되는 경우가 많다. 이런 패턴은 왕관과 각종 장신구 등에서도 많이 볼 수 있다. 작은 천 조각을 이어 붙인 조각 보자기를 자세히 들여다보면 작은 정사각형이나 직각 삼각형의 천 조각들이 모여 큰 정사각형을 이루고 있다. 즉, 일정한 패턴을 이루고 있는 셈이다. 이 패턴을 찾아내면 더 큰 조각 보자기를 만들 때 필요한 작은 정사각형 모양의 천 조각의 개수를 알아낼 수 있을 것이다. 탑의 모양은 축을 중심으로 좌우 대칭인 경우가 대부분이다. 옥개석을 하나씩 위로 쌓아 올리면서 점차 옥개석이 작아지는데 모양은 같으면서 일정한 비율로 축소되는 경우가 많다. 옥개석을 하나씩 쌓아갈 때마다 어찌어찌 만들다보면 탑이야 쌓아지겠지만, 축소되는 비율을 일정하게 하면서 몇 층을 쌓으려면 계산하지 않고서야 그 비율이 잘 맞게 탑을 쌓을 수 있었을까? 아마 몇 층으로 쌓을 것인지를 결정한 후 맨 꼭대기에 올린 옥개석의 크기와 맨 아래의 옥개석의 높이와 크기를 각각 정하고, 이에 따라 그 사이에 쌓아야 할 옥개석이 어떤 비율로 축소되어야 하는지를 면밀히 계산하였을 것이다. 비록 어떤 방법으로 어떤 계산에 의해 그렇게 쌓았는지 정확한 기록이 없다하더라도 경험과 우연에 의존했다고 보기에는 그 구조물의 비례가 너무나 아름답고 구조물을 지은 과정을 추측한다면 너무나 수학적이고 합리적이다. 이외에도 점대칭 또는 선대칭이 되는 여러 문양이나 도형들, 닮은 도형, 창살이나 단청 또는 옷의 문양 등에서 패턴을 찾을 수 있다. 책을 한 장씩 넘길 때마다 사용했다는 대나무나 셈을 할 때 사용했던 산가지, 해시계 등에서도 옛 수학의 모습을 찾아볼 수 있을 것이다.

32) 피라미드의 비밀[41)]

피라미드는 B.C.2000년경에 이집트에서 쿠프왕에 의해 건설되었다. 높이 약 140m, 빗변이 약 170m인 이 피라미드는 세계 7대 불가사의 중에 하나이다. 그런데 더 신기

40) 수학사랑, 1999년 여름 17호, p.53~55.
바닥 깔기 등 3-가 단계 ~ 5-나 단계까지 두루 활용할 수 있는 자료임.

41) http://school.hongik.ac.kr/~ydhome/yoon/Start.htm : 정윤석의 수학사 이야기
수학만이 아니라 역사, 과학 등과도 연계를 이루는 통합 교과자료라 할 수 있다.

한 일이 있다. 피라미드 내부와 외부에 우유를 두면 내부에 있는 것은 요구르트로 변하는 반면 외부에 둔 우유는 썩는다고 한다. 또 명태를 같은 방법으로 실험하면 내부에 있는 것은 북어로 변하고, 외부에 있는 것은 역시 썩는다고 한다.

33) 벌집의 실생활에의 응용[42)]

벌집은 수학자들에게 하나의 발견을 주었을 뿐 아니라 재료공학 기술자에게, 특히 비행기 구조 연구자들에게도 발명의 암시를 주었다. 비행기 구조 연구자들은 재료를 절약하고 비행기 무게를 줄이기 위하여 '벌집식 사이 층' 구조물을 창조하였다. 이런 구조물은 속이 비고 두 끝이 금속관으로 고정되어 있기 때문에 속이 비지 않은 구조물보다 가벼우면서도 강도가 높고 소리나 열을 격리시키는 성능도 좋다.

34) 육각형의 구조가 쓰이는 예[43)]

자연계에서는 정육각형을 서로 이어 붙여 평면을 메운 경우를 가장 흔하게 볼 수 있다. 곤충의 눈, 잠자리의 날개, 꿀벌의 집, 눈의 결정 모양 등이 그런데, 정육각형일 때 서로 맞닿는 부분의 넓이가 가장 적어 경제적이고 안정적이기 때문이라고 한다. 눈 오는 날 검은 천과 돋보기를 준비해 눈을 자세히 관찰해보면 눈송이의 결정모양이 대부분 육각형이란 사실을 쉽게 알 수 있다. 눈의 결정에 육각형이 많은 이유는 물분자가 육각형으로 배열될 때 가장 안정하기 때문이다. 그래서 육각수라는 말이 나오게 되었다.

35) 정다면체의 최초 발견자

정사면체, 정육면체, 정십이면체는 피타고라스 학파가 발견하였다. 플라톤은 아프리카에 있던 그리스 도시와 이탈리아 반도, 특히 기원전 388년에 시실리를 여행하면서 다양한 피타고라스 학파의 아이디어를 배웠다. 다른 두 정다면체는 수학자 테아에테토스의 업적이라고 할 수 있다.

36) 정다면체의 종류[44)]

42) http://www.inchon-e.ac.kr/~shsong/

43) http://www.mathlove.co.kr/pds/materials/stories/creativity/hani-4.html
http://www.inchon-e.ac.kr/~shsong/

44) http://www.mathlove.co.kr/

평면도형인 다각형 중에는 모든 변의 길이가 같고 모든 내각의 크기가 같은 정다각형이 있고, 입체도형인 다면체 중에는 각 면이 모두 합동인 정다각형이며 각 꼭지점에 모인 면의 수가 모두 같은 정다면체가 있다. 그런데 정다각형은 정삼각형, 정사각형, 정오각형…과 같이 무한히 많지만, 정다면체는 유한 개, 그것도 겨우 다섯개(정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체)만 존재한다.

정다면체는 하나의 꼭지점에 모인 정다각형의 개수가 같고 오목한 모양이 아닌 볼록한 모양임을 주목하라.

피타고라스 학파는 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 5가지 뿐이란 것을 증명하였다. 그들은 어떻게 증명하였을까?

먼저, 정삼각형을 면으로 하는 정다면체를 생각해보자.

한 꼭지점에 두 개의 정삼각형만 모으면 입체가 되지 않으므로 최소한 3개가 필요하다. 이렇게 3개를 모아 놓으면 밑면도 정삼각형이 되므로 밑면에 정삼각형 하나를 덧붙이면 정삼각형 4개로 이루어지는 정사면체가 된다. 다음으로 한 꼭지점에 4개의 정삼각형을 모으면 피라미드 모양이 된다. 똑같은 모양을 하나 더 만들어 거꾸로 아래쪽에 붙이면 정삼각형 8개로 이루어지는 정팔면체가 된다.

이번에는 한 꼭지점에 다섯 개의 정삼각형을 모으면 정삼각형 20개로 된 정이십면체가 된다. 하나를 더 더하여 한 꼭지점에 6개의 정삼각형을 내각의 합이 $60° \times 6 = 360°$가 되어 평면이 된다. 따라서 정삼각형으로 만들 수 있는 정다면체는 정사면체, 정팔면체, 정이십면체 뿐이다.

예제 정사각형을 면으로 하는 정다면체를 생각해보자.

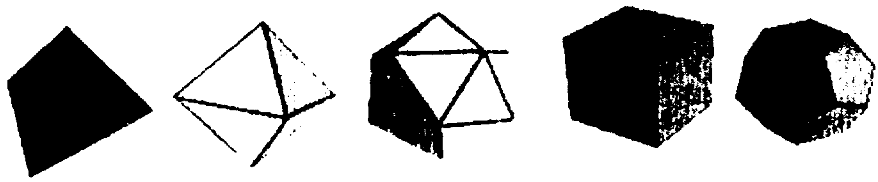
한 꼭지점에 정사각형 2개를 모으면 역시 마찬가지로 입체가 안 될 것이고, 한 꼭지점에 정사각형 3개를 모으면 정육면체가 나온다. 정사각형을 하나 더 보태어 한 꼭지점에 4개의 정사각형을 모으면 내각의 합이 $90° \times 4 = 360°$가 되어 평면이 되므로 정사각형을 모아서 만들 수 있는 정다면체는 정육면체 뿐이다.

정오각형을 면으로 하는 정다면체를 생각해보면 한 꼭지점에 정오각형을 세 개 모으면 정십이면체가 된다. 그러나 4개가 모이면 내각의 합이 $108° \times 4 = 432°$가 되어 볼록한 입체가 되지 않는다.

각 면이 정육각형인 정다면체를 생각해보면 정육각형은 한 내각이 120°로서 한 꼭지점에 3개만 모아도 $120° \times 3 = 360°$가 되어 입체가 되지 않는다.

결국 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 5가지뿐

이라는 사실이 증명된다.



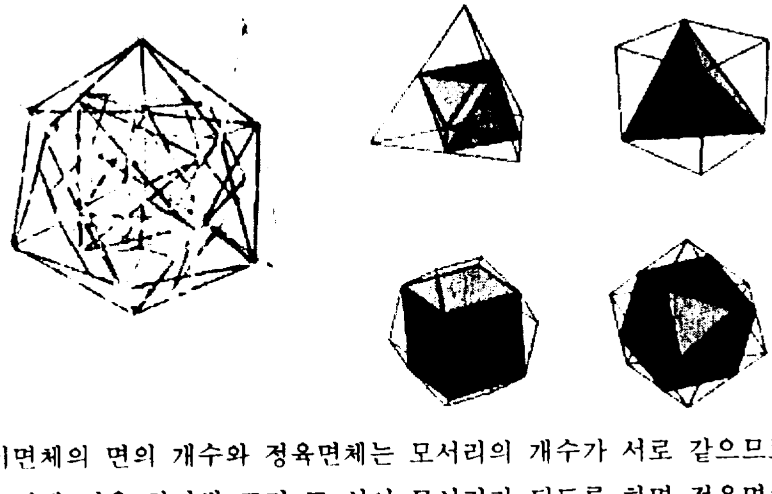
정사면체 정팔면체 정이십면체 정육면체 정십이면체

37) 정다면체의 순환[45]

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 등 꼭 5가지 밖에 없다는 것을 알아보았다. 그런데 이들은 서로서로 끝없이 순환하는 성질이 있다. 각 정다면체 안에 다른 정다면체를 넣어보자.

다섯 종류의 정다면체 안에는 각각 또 다른 정다면체가 들어 있다.

우주를 상징하는 정십이면체 안에는 정육면체, 정육면체 안에는 정사면체, 정사면체 안에는 정팔면체, 정팔면체 안에는 정이십면체, 정이십면체 안에는 정십이면체가 있다. 이것을 정다면체의 순환이라고 부른다.



먼저 정십이면체의 면의 개수와 정육면체는 모서리의 개수가 서로 같으므로 정십이면체의 각 면 위에 선을 하나씩 그려 그 선이 모서리가 되도록 하면 정육면체를 만들 수 있다.

45) http://www.mathlove.co.kr/

마찬가지로 정육면체의 각 면에 대각선을 하나씩 그어 그 선이 모서리가 되도록 하면 정사면체가 된다.

정사면체의 모서리의 개수와 정팔면체의 꼭지점의 개수가 6개로 같으므로 정사면체의 각 모서리의 중점을 잡아 그 점이 꼭지점이 되도록 연결시키면 정팔면체가 생긴다.

또 정팔면체의 각 모서리를 황금분할(약 1:1.6)하여 이웃한 이들 세 점을 지나는 평면으로 계속해서 잘라내면 정이십면체가 만들어진다.

정팔면체의 모서리 개수가 12개로 정이십면체의 꼭지점 개수와 같기 때문이다. 정이십면체의 각 면의 한가운데 점(각 삼각형의 무게중심)을 찍고 각 꼭지점에 모인 5개의 면에 찍힌 점들을 이으면 정오각형이 되므로 정십이면체를 만들 수 있다.

결국 정십이면체에서 시작하여 다시 정십이면체까지 차례로 만들어 갈 수 있다. 이렇게 정다면체는 모양은 다르지만 서로 서로를 품어주는 따뜻한 입체도형인 셈이다.

또 정육면체의 각 면의 무게중심을 잡아 이웃한 중심끼리 연결하면 정팔면체가 만들어지는데, 이는 정팔면체의 꼭지점의 개수와 정육면체의 면의 개수가 6개로 서로 같기 때문에 가능하다.

거꾸로 정팔면체로 정육면체를 만들 수 있음은 물론이다.

38) 세상을 구성하고 있는 기본 원소[46)]

정다면체가 정확하게 다섯 가지만 존재한다는 이 '놀라운' 사실은 2500년 전 고대 그리스 사람들도 이미 알고 있었다. 당시 기하학은 가장 잘 발달된 수학 분야로 완성된 모습을 갖춘 정다면체 이론은 기하학에서 최상의 위치를 차지하고 있었다. 여기서 세상을 구성하고있는 기본 원소를 설명함에 있어서 정다면체를 이용한 플라톤의 생각에 대하여 알아보자. 플라톤은 정다면체에 매우 특이한 의미를 부여했다. 플라톤은 이 세상이 네 가지 원소, 즉 물, 불, 흙, 공기로 이루어졌다고 생각했다. 그는 한 걸음 더 나아가 책 '티마이오스'(Timaeus, 기원전 350년경)에서 이 네 가지 원소는 모두 작은

46) 권영한(1990). 재미있는 수학 이야기. 한국출판금고
http://my.dreamwiz.com/lyj1009/main.html
http://cce.yonam-c.ac.kr/~kangdy1/sogea2.htm.
http://www.mathlove.co.kr/pds/materials/stories/reg__poly.html
정다각형을 정의한 후, 각뿔 단원에서 활용가능하며, 도형과 주변의 물질을 연관지어 상징성을 설명함으로써 도형에 관한 관심을 고취시킬 수 있음.

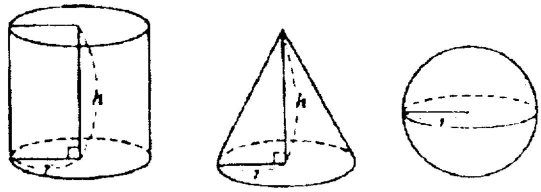
입체들의 집합체라는 이론을 제기했다. 게다가 세계는 완벽한 입체만으로 만들어질 수 있기 때문에 이 원소들도 반드시 정다면체 꼴이어야 한다고 주장했다. 가장 가볍고 날카로운 원소인 불은 정사면체, 가장 안정된 원소인 흙은 정육면체, 가장 활동적이고 유동적인 원소인 물은 가장 쉽게 구를 수 있는 정이십면체가 되어야 한다고 주장했다. 그리고 정팔면체는 엄지손가락과 집게손가락으로 마주보는 꼭지점을 가볍게 잡고 입으로 바람을 불어 쉽게 돌릴 수 있을 것으로 보이므로 공기의 불안정성을 나타낸다고 했다. 마지막으로 정십이면체는 우주 전체의 형태를 나타낸다고 주장했다.[47]

39) 도형의 조화[48]

아르키메데스는 원기둥에 원뿔과 구가 내접하는 그림에서 매우 아름다운 수학적 조화를 발견하고 늘 자신이 죽으면 그것을 묘비에 새겨줄 것을 부탁하였다고 한다.

그러면 내접하는 원기둥, 원뿔, 구 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라고 하면 원뿔의 밑면의 반지름은 r, 높이는 h, 구의 반지름의 길이는 r이 되므로 각각의 부피는 다음과 같다.



(원기둥의 부피) $=\pi r^2 h$ (원뿔의 부피) $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (구의 부피) $=\frac{4}{3}\pi r^3$

47) 비록 플라톤이 이 다섯 개의 입체를 발견한 것은 아니지만 대화의 형식을 빌려서 쓴 그의 저서인 '티마에우스'에 그것을 생동감 있게 기술하고 있다. 이 대화편의 명성 때문에 수세기 동안 이 입체들은 플라톤의 공적으로 오인되었고 아직도 이 입체를 플라톤의 입체라고 부르고 있지만, 플라톤은 이 입체들의 발견자가 자신이 아님을 분명히 했다. 예로부터 12라는 숫자는 우주와 깊은 관련성을 갖고 있다. 천문학에서 말하는 황도 십이궁과 우리의 십이지가 그 예다.

48) http://www.mathlove.or.kr/pds/materials/stories/harmo.html
6-나 단계 여러 가지 입체도형에서 회전체와 부피 등에 활용 가능한 자료임.

그런데 구가 원기둥에 내접하므로 h=2r이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
(\text{구의 부피}) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^2 \times r \\
&= \frac{4}{3}\pi r^2 \times \frac{h}{2} \\
&= \frac{2}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}
$$

그러므로, 세 입체도형의 부피 사이에는 다음 관계가 성립한다.

(원뿔의 부피) : (구의 부피) : (원기둥의 부피)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\pi r^2 h \ : \ \frac{2}{3}\pi r^2 h \ : \ \pi r^2 h \\
&= 1 \ : \ 2 \ : \ 3
\end{aligned}
$$

아르키메데스는 1 : 2 : 3으로 된 이 비를 발견하고는 매우 아름답다고 생각하였다고 한다. 그는 우주는 수학적으로 조화롭게 이루어져 있으며 그 중에서도 1, 2, 3, …과 같은 자연수는 그 기본을 이룬다고 생각한 것이다.

40) 원과 구[49]

동서양을 막론하고 옛날에는 원이나 구가 특별한 종교적 의미를 지니고 있었다. 즉 이들은 신이 베푼 가장 완전한 도형으로 간주되었던 것이다. 여러분은, 텔레비전 만화에서 마녀가 수정으로 된 마법의 구슬 앞에서 주문을 외고 있는 장면을 본 적이 있을 것이다. 지금도 그 자취가 집시들의 '水晶球점'에 남아 있다. 수정구점을 칠 때에는 반드시 구(球)이어야 하며, 타원형으로 생긴 입체(=타원체)라든가 입방체는 쓰지 못한다. 이미 먼 옛날에 이집트에서는 원이나 구의 성질이 상당히 깊이 연구되었는데, 이것도 알고 보면 이들 도형이 지닌 신비성에 깊은 관심을 쏟은 결과였다.

'원형의 신비'에 대해서는 여러분도 일상 생활 속에서 늘 경험하고 있을 것이다. 가령, 종이 위에 잉크를 떨어뜨리면 원형의 얼룩이 생기고, 체온계가 깨져서 수은이 마

49) 김용운 · 김용국(1997), 재미있는 수학여행-기하의 세계, pp. 27~31, 김영사.

루 위에 떨어지면 그 모양도 원형이 된다. 또 비누방울이나 기름을 칠한 프라이팬 위에 떨어진 물방울도 원형이며, 심지어 어린이들이 잘 걸리는 '원형탈모증'의 모양도 정확한 원이다. 둘레가 같은 사각형 중에서 면적이 가장 큰 것은 정사각형이고, 삼각형 중에서는 정삼각형이다. 이것들은 모두 대칭을 이루고 있는 아름다운 도형이다.

이런 뜻에서 원은 가장 이상적인 아름다움을 지닌 도형이다. 더구나 구는 어디를 잘라도 원이 나타난다. 옛사람들이 이러한 구를 신비롭게 생각했던 것은 너무도 당연하다. 유럽 수학의 원형인 유클리드의 기하학은 '원과 직선의 기하학'이라고 일컬어지고 있다. 여러분이 중학교에서 배운 작도 문제에서 엄격히 못박고 있는 '컴퍼스와 자만을 사용한다' 라는 조건은, 유클리드의 『원론』이래의 전통이며, 더 거슬러 올라가면 플라톤의 영향, 아니 그 이전부터 있어왔던 고대 그리스인의 사상적인 경향까지도 생각해야 한다. 그만큼 원이나 구를 섬기는 이 전통은 뿌리가 깊다.

직선을 긋는 자와 원을 그리는 컴퍼스는 다른 기하학의 도구에 비해서 지극히 간단하다. 그것은 말할 나위 없이 직선과 원이 가장 기본적인 도형이면서 아름답고, 게다가 그것을 작도하기에 용이하기 때문이다. 예나 지금이나 수학자들은 이론을 세울 때는 '미'를 염두에 두어왔다. 즉, 단순히 진리만을 추구한 것이 아니고 동시에 아름다움까지도 생각했던 것이다.

가령, 도형의 세계와는 전혀 연관이 없는 대수의 경우에도 a+b+c와 같이 문자 a, b, c와 같이 문자 $a^2+b^2+c^2$처럼 3문자를 대칭적으로 써나가는 일이 흔히 있다. 이런 때 수학자는 무의식적으로나마 이러한 문자의 배열 속에 숨은 대칭의 미를 즐기고 있다고 할 수 있다. 어떤 결론이 나왔을 때, 그것이 단순 명쾌한 것이면 옳은 답이지만, 대칭성이 갖추어지지 않을 때는 그 답이 잘못되어 있다고 생각하는 것은 수학자들의 상식이다. 기묘하게도 실제로 따져보면 그 판단이 거의 들어맞는다.

이처럼 대칭성을 중요시하는 것은 자연의 산물로서의 인간의 몸매가 대칭적이라는 점에 중요한 이유가 있는 것 같다. 그것은 인공적인 것이건 자연적인 것이건, 대칭성을 지닌 것을 대할 때는 누구나 일조의 안정감을 느낀다는 사실에서도 알 수 있다.

이밖에 대칭성을 즐겨 찾는 이유를 실용적인 면에서도 생각해 볼 수 있다. 예를 들어 되도록 많은 양을 담을 수 있는 용기를 만들고자 하면, 필연적으로 대칭적인 형태가 만들어진다. 가령 동일한 양의 흙으로 접시를 빚을 때, 원형으로 하였을 때가 용적이 최대가 된다. 어떤 사람에게 일정한 길이의 밧줄로 둘러싸인 토지를 가지라고 한다면, 그 사람은 어김없이 원형으로 둘러쌀 것이다. 이것은 체험을 통해서 둘레의 길이

가 일정한 토지 면적은 원형일 때 가장 넓다는 것을 알고 있기 때문이다. 마찬가지로 겉 면적이 가장 큰 것은 구 라는 것도 말이다.

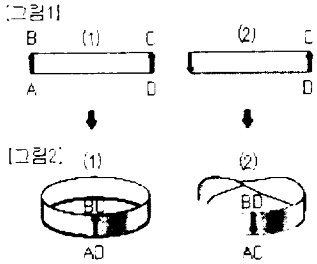
그밖에 원은 만들기가 용이하고, 이용 면에서 볼 때 강하고 굴러가기 쉬운데다 가 손에 들기가 간편하다는 등의 이점이 있다. 그래서인지, 우리 주변에는 원형의 물건이 많다. 게다가 원은 아까도 말했듯이 삼각형이나 사각형에 비해서 훨씬 대칭서이 높다.

우리의 조상은 수학이 태어나기 전부터 이러한 사실을 경험적으로 터득하여, 그 결과 대칭성을 갖고 있는 것이 가장 좋은 것이라는 생각이 몸에 베이게 된 때문인지도 모른다.

41) 뫼비우스의 띠[50)]

좁고 긴 직사각형 종이를 180°(한 번) 꼬아서 끝을 붙여서 만들면 하나의 면을 가진 곡면이 된다. 이러한 곡면을 뫼비우스의 띠라고 한다. 독일의 수학자 A.F.뫼비우스(1790~1868)가 처음으로 제시하였기(1858년) 때문에 뫼비우스의 띠라고 한다.

[그림 1]의 (1)과 같은 직사각형 띠를 꼬지 않고 점 A와 D, 점 B와 C가 만나도록 변 AB와 DC를 붙여 고리를 만들면 [그림 2]의 (1)과 같이 된다. 또, [그림 1]의 (2)와 같은 띠를 180°꼬아서 점 A와 C, 점 B와 D가 만나도록 변 AB와 변 CD를 붙이면 [그림 2]의 (2)와 같이 된다. 이 [그림 2]의 (2)의 곡면이 뫼비우스의 띠이다.



뫼비우스 띠는 1865년 발견된 이래로 전문가들 사이에서뿐만 아니라, 일반인들 사이에서도 매력적인 관심사가 되어 왔다. 뫼비우스 띠는 한때 수학적 호기심을 자극하는 것으로 유명했지만, 세월이 흐른 뒤에는 예술가들에게 영감을 주는 원천으로 더욱 유명해진다. 뫼비우스 띠는 독일의 수학자이며 천문학자인 뫼비우스(1790~1868)에 의해 발견되었다. 그 발견은 위상수학이라 불리는 완전히 새로운 수학분과의 모태가 되었다. 위상수학은 연속변형 하에서도 변하지 않고 유지되는 표면의 성질을 연구한다.

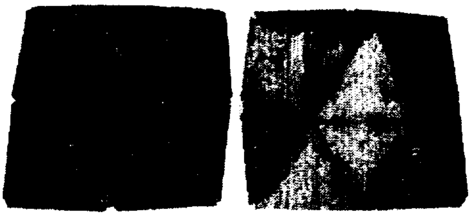
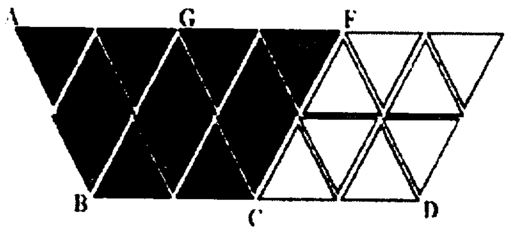
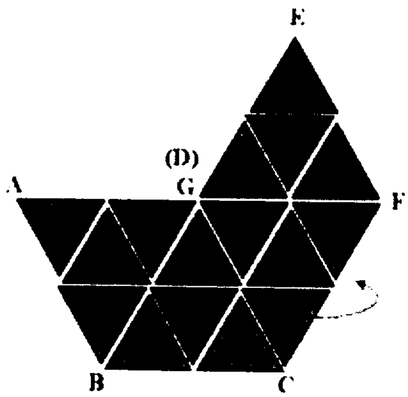
뫼비우스 띠를 둘로 가르면 더욱더 놀라운 일이 벌어진다. 일상적인 고리를 그 중앙

50) http://delta.new21.net/

선을 따라 가르면, 서로 분리된 두 개의 똑같은 띠가 생긴다. 그 띠 각각의 폭은 원래 띠의 폭의 절반이다. 그러나 우리가 똑같은 일을 뫼비우스 띠에서 하면, 우리는 하나의 단일하고 연속적인 모양을 얻는다. 즉, 절반씩 두 번 뒤틀린 고리가 얻어진다. 그 고리는 더 이상 뫼비우스 띠가 아니다. 왜냐하면, 그 고리에는 두 개의 서로 다른 모서리와 두 개의 서로 다른 면이-안쪽 면과 바깥쪽 면-있기 때문이다.

42) 뫼비우스 띠를 이용하여 만든 모자[51]

■ 준비물 : 하드보드지, 자, 연필, 컴퍼스, 칼, 종이테이프

	1. 색깔이 있는 하드보드지를 사용하여 한 변의 길이가 12㎝인 합동인 정삼각형을 20개 그린다.(한 면은 파란색, 한면은 하얀색인 하드보드지를 사용하였다.)
	2. 자른 부분을 3 - 5㎜ 의 간격을 두고 종이 테이프로 그림과 같이 붙인다. 3. 선분CF를 접어 점D가 점 F에 겹치게 한다.
	4. 모서리 AG와 ED를 연결 (A와 E, G와 D가 만나게)하여 종이 테이프를 붙이면 모자가 완성된다.

51) http://user.chollian.net/~badang25/bdf03.htm

43) 원주율의 역사(동양 편)[52]

동양 특히 중국에서의 원주율에 관한 연구는 유럽에서만큼 꾸준하지는 못하였으나, 고대에는 그런 대로 활발하였으며 유럽보다 무려 천여 년 앞선 업적을 남기기까지 하였다.

약 B. C 1000년경에 엮어진 것으로 짐작되는 중국에서 가장 오래된 수학책 주비산경에서는 "지름이 1일 때, 원의 둘레는 3" 곧 원주율을 3으로 잡고 있다. 이 책 다음으로 오래된 "중국의 유클리드"로 일컬어지는 구장산술(B.C. 1000년쯤?)에서도 $\pi=3$으로 쓰이고 있다.

이후, 의 값은 중국에서는 다음과 같이 셈하여졌다.

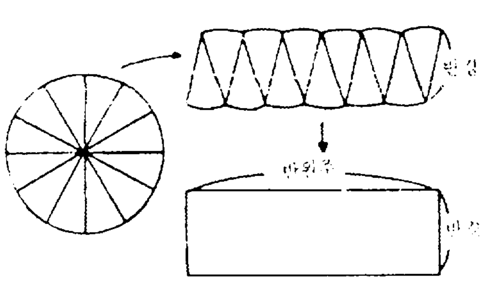
- 서기 9년경 - 3.154
- 서기 9년경 - $\sqrt{10}$
- 서기 100년경 - $\sqrt{10}$
- 서기 261년 - 3.141(유 휘)
- 서기 370~447년 - 3.1428 또는 (하 승천)

그 후 송나라 효무제 때의 천문대 관리 조충지(430~501)는 원주율의 값을

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

과 같이 셈하였고, 대강의 값으로 $\pi = \frac{22}{7}$

정밀한 값으로 $\pi = \frac{355}{113} = 3.141529\cdots\cdots$를 구하였다. 이 정밀 값은 소수점 아래 6자리까지가 정확하다. 메티우스(Adriaan Metius, 1527~1607)가 근사 값을 얻게 된 것은 조충지보다 실로 천년이 지난 후의 일이었다.



52) http://delta.new21.net/

남송의 사람인 양휘가 지어낸 양휘산법(1275)이라는 수학책은 세종대왕 때에 우리나라에 전해졌으며, 그 후 줄곧 조선 수학에 중요한 영향을 미쳤다. 양휘산법 속에는 원형의 농토 넓이를 구하는 문제의 답으로써 "지름을 제곱하여, 이것을 3번 더하여 4로 나눈다."

곧, 원의 넓이 $= \frac{3}{4}d^2$(d는 지름)과 같이 되어 있다. 그러므로, 양 휘는 옛 그대로 을 써서 수학 문제를 풀고 있었던 것이다.

천주교는 동양에서의 포교를 위해서 뛰어난 학문을 과시하는 것이 가장 좋은 방법이라 생각하여 특히 천문학, 수학 등에 조예가 깊은 선교사를 중국에 파견하였다. 이 결과 17~18세기 때 중국은 유럽의 최고의 과학 지식에 접할 수가 있었다.

선교사로서는 처음으로 1582년에 중국 땅을 밟은 마테오 리치(Matteo Ricci)는 동양 최초의 세계지도를 작성하였으며, 기하원본을 비롯한 많은 수학, 천문학 책을 펴냈다. 마테오 리치의 뒤를 이어 1624년에 중국에 온 선교사 재크 로우(Jacques Rho, 중국명은 나아곡)는 아르키메데스가 구하였던 값

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

이외에, 루돌프(Van C. Ludolf, 1540-1610)의 계산으로 짐작되는

$3.14159265358979323846 < \pi < 3.14159265358979323847$ 을 소개하였다.

그 후, 100년 지난 1723년(청, 옹정 1년)에 수리정온이라는 수학책이 왕명에 의하여 엮어졌는데, 이 안에서는 원주율의 계산이 자세히 설명되어 있다. 곧 원에 내접·외접하는 정육각형과 정사각형으로부터 시작하여, 그 변수를 차례로 2배씩 하였을 때의 한 변의 길이를 자세히 셈한 다음에 마지막으로 다음과 같은 결과를 적어 놓고 있다.

내접 6×2^{23}각형의 둘레*

$= 3.14159265358979323829006741101775054438 4$

내접 2^{35}각형의 둘레*

$= 3.1415926535897932384315415533775015116 80$

외접 6×2^{33}각형의 둘레*

$= 3.1415926535897932384660273008891419804 16$

외접 2^{65}각형의 둘레*

=3.14159265358979323865658930929470668800

(정확한 π값은 "*"표시를 붙인 소수점 아래 18자리, 19자리, 20자리, 18자리까지이다.)

조선 말엽 형조 판서를 지낸 귀족 정치가이자, 당시의 대표적인 수학자이기도 하였던 남병길(1820~1890)의 산학정의(1867년)라는 수학책에서는 원의 넓이를 셈하면서 로 어림잡고 있다. 이 값은 아마도 위의 『수리정온』에서 얻은 것으로 짐작된다. 이보다 앞서 실학자 홍대용(1731~1783)도 『수리정온』을 참고로 한 수학책 『주해수용』을 지었는데, 여기서는 으로 하여 셈하고 있다.

조선 천문학의 금자탑이라 일컬어지는 일찍이 세종 24년(1442년)에 완성된 『칠정산』에서도 소수점 이하 5자리까지 자세히 계산하는가 하면 의 값을 그냥 3으로 두는 엉성한 일면도 보여 주고 있다.

π의 값을 소수점 아래 10자리, 20자리, …까지 구해 나간다는 것은 이미 실용의 단계를 벗어나고 있다. 현대의 정밀 공업에서도 π값은 3.1416 정도면 충분하며, 그 이상 셈하는 것은 실용상으로는 거의 의미가 없다.

이러한 계산을 할 일이 없는 사람들의 보잘 것 없는 시간 보내기에 지나지 않는다고 핀잔 줄 수도 있지만 수학의 발전은 오직 알기 위해서 따져 드는 호기심의 결과일 때가 아주 많다.

44) 파피루스에 기록된 원주율[53)]

아메스의 파피루스에는 여러 가지 기하문제 등이 있고, 원주율 π로서는 (16/9)2 = 3.1604… 를 이용하고 있다. 또한 원과 동 면적인 정 4각형의 존재도 인정했던 흔적도 있다. 이집트의 고문서에는 등차급수, 등비급수 등에 해당되는 예를 볼 수 있다. 아메스의 파피루스와 이집트의 피라미드는 아마도 기하학적 지식을 표시하고 있는 최고의 증거품일 것이다. 고대의 과학은 미신과 결부되어 있다. 바빌로니아의 기하학적 도형이 길흉을 점치는 데에 사용되었던 증거도 있다. 그들의 도형 중에는 평행선, 정 4 각형, 오목한 각을 포함하는 도형 등이 있다.

---

53) http://user.zzagn.net/hdelta/: 허종운의 홈페이지. 수학자료실의 수학사 요약 검색.

45) 원주율의 역사[54]

π는 지름에 대한 원 둘레의 비인 원주율을 나타내는 기호다. 뉴턴과 비슷한 시기에 살았던 윌리엄 존스(William Jones)라는 사람이 '수학의 새로운 입문서'라는 책에서 지름이 1인 원의 둘레를 의미하는 'periphery'의 약자인 π를 제안했고, 유명한 수학자 오일러가 사용하면서 표준기호가 됐다. 옛날 사람들에게도 π는 원둘레를 구하거나 원넓이, 또는 원의 부피를 구하려면 반드시 알아야 할 값이다. 도대체 그 값은 얼마일까? π의 값은 고대부터 사람들이 무척 알고 싶어했던 것이었지만, 수 천년 동안 비밀에 싸인 값이었다. 따라서 π값을 얼마나 정확하게 알고 있는가가 그 문명의 발달 정도를 가늠하는 척도가 되기도 했다. 인류의 기록이 발견되는 기원전 2천년경의 바빌로니아인과 이집트인들도 π의 중요성을 알고 있었다. 바빌로니아인은 π를 3.125로 계산했고, 이집트인은 3.16049…로 계산했다. 구약성서에는 π값을 3으로 사용한 기록이 있다. 고대 인도에서 $\pi=3.1416$을 사용했다는 기록을 380년에 출간된 싯단타(Siddhantes, 천문학체계)나, 아리아바티아(Aryabhatiya, 천문학책) 등의 문헌에서 볼 수 있다. 또 인도 수학자 브라마굽타는 $\pi=\sqrt{10}=3.162277\cdots$을 사용하기도 했다. 고대 그리스의 과학자 아르키메데스는 저서 '원의 측정에 관해'에서 원에 내접하는 96각형과 외접하는 96각형을 이용해 π값은 $3.140845\cdots<\pi<3.142857\cdots$라고 제시했다. 근래 들어서는 여러 급수와 공식을 이용해 π값은 1429년에 소수 16자리, 1610년에 소수 35자리, 1719년에는 소수 1백12자리, 1853년 소수 4백자리, 1947년 소수 7백10자리까지 계산됐다. 그 후 컴퓨터가 등장하면서 맨 처음 컴퓨터 계산으로 얻어낸 π값은 1949년 9월 ENIAC을 사용해서 탄소연구소에서 70시간이 걸려 2천37자리까지 계산한 것이다. 이 때의 프로그램 공식은 $\pi=16\arctan(1/5)-4\arctan(1/239)$이다. 오늘날에는 이와 비슷한 프로그램 공식을 가지고 슈퍼컴퓨터를 사용하면 불과 몇 시간만에 소수 몇 십억 자리까지 계산할 수 있다. 수년 전 콜롬비아 대학교의 데이비드와 그레고리는 슈퍼컴퓨터를 이용해 소수 22억6백32만1천3백36자리까지 계산했다. 이렇게 구한 π값을 활자로 나타낸다면 한 페이지에 숫자 5000개를 적을 때, 1000 페이지 짜리 두꺼운 책으로 4백50권이 넘는 엄청난 양이다.

46) 아리스토텔레스의 바퀴[55]

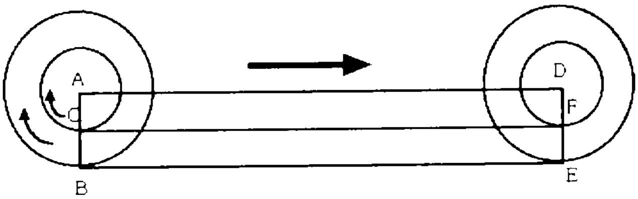
54) http://delta.new21.net/

55) http://www.i-together.co.kr/menu3/cb007.asp
http://delta.new21.net/

아리스토텔레스는 다음과 같은 문제를 고안하였다.

"모든 원의 원주의 길이는 같다."

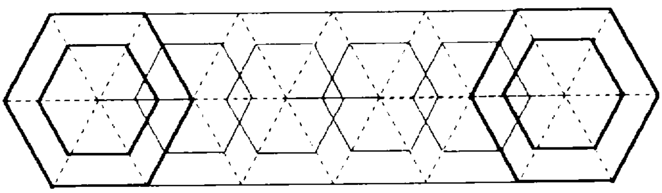
다음 그림과 같이 a를 중심으로 하는 동심원(중심이 같은 원)의 판자를 평면상에 수직으로 세워서 1회전 시켰을 때 A, B, C가 D, E, F의 위치에 왔다고 하자. 이 때, BE는 큰 원판의 둘레의 길이이고, CF는 작은 원판의 길이이다.



그런데 그림으로 보면 BE=CF이기 때문에, 큰 원판의 둘레와 작은 원판의 둘레의 길이가 같다라는 결론이 나온다. 그럴 리가 없는데, 어디가 잘못되어 있는 것일까?

큰 원판 위의 점은 항상 BE에 딱 붙어서 회전하고 있고, 작은 원판의 점도 큰 원판의 반경 위에 있으므로 이것 역시 CF와 밀착되어 있다고 보아야 하고, 그러니 만일 C가 미끄러진다면 B도 반드시 미끄러질 터인데, 참으로 알다가도 모르는 일이라고, 누구나 한번쯤은 고개를 갸우뚱한다.

그러나 이 수수께기는 정육각형을 회전시켜 보면 풀린다.



작은 정육각형의 변은 밀착하지 않고 점프한 셈이다.

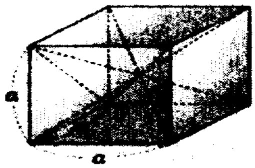
변의 개수를 아주 크게 늘려서, 이번에는 정 1000000(백만)각형의 경우를 생각해 보면, 작은 쪽의 회전의 자취는 백만개의 변을 합친 길이와 백만보다 1적은 (999999개) "슬립"의 구간으로 이루어지고 있는 셈이다.

변의 수를 무한히 많이 늘린 다각형(=원)에서는 작은 쪽(즉, 작은 쪽의 동심원)이 지나간 선분 속에는 이 다각형의 무한개의 변과 무한개의 "슬립"이 들어있다는 것을 알 수 있을 것이다. 이것은 갈릴레이의 '신과학 대화(新科學對話)' 속에 실린 문제이다.

47) 각기둥의 부피는 각뿔의 부피의 3배[56]

V = Sh/3(단, S는 각기둥의 밑넓이, h는 각기둥의 높이)

즉, 원기둥이나 각기둥의 부피는 같은 높이와 밑면적을 갖는 뿔의 부피의 3배라는 공식이다. 아래 그림과 같은 정육면체의 중심과 꼭지점을 이으면 서로 합동인 6개의 사각뿔이 생긴다. 이 때, 정육면체의 부피가 a^3이고, 각 사각뿔의 부피는 서로 같으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.



$$V = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{3} \times \frac{a}{2}$$

이 때, a^2은 사각뿔의 밑넓이고, $\frac{a}{2}$는 높이를 나타내므로 결국 $V = \frac{Sh}{3}$와 같은 공식이 성립한다. 이 방법에서도 만족을 느끼지 못하는 사람이 있을 경우는 '카발리에리의 원리'를 도형의 부피에 적용해서 설명을 하면 된다. 즉, "밑면과 높이가 같은 두 개의 각뿔은 같은 부피를 갖는다." 라는 원리인데 두 개의 각뿔이 서로 밑면의 넓이가 같고, 높이의 길이가 같다면 부피도 같음을 얘기하고 있다. 즉, 임의의 각 뿔을 생각하더라도 그것과 같은 부피를 같은 밑면이 정다각형인 각뿔을 만들 수 있는 것이다.

III. 결론 및 제언

수학수업을 진행함에 있어서, '수학을 배우는 목적이 무엇인가' 또는 '왜 수학을 가르쳐야 하는가?' 와 같은 근본적인 질문을 자주 사용하는 교사들은 교과서에 주어져 있는 내용만 학생들에게 전달하지는 않을 것이다. 수학자들은 종종 수학을 높은 산을 오르는 일에 비유하곤 한다. 전체적인 산의 형세를 알지 못하고 산을 오르다보면, 자신이 정말로 정상을 향해 똑바로 나아가고 있는지 알지 못한 채 자신이 바라보는 시각에서 산의 전체적인 형세를 판단해 버리기 쉽다. 학생들도 수학을 공부할 때, 왜 공부해야 하는지, 그리고 어떻게 해서 그런 개념들이 생기게 되었는지 알지 못한다면 수학을 이해할 수 없는 복잡한 공식과 계산들이 가득한 재미없는 어려운 과목으로 생각

56) http://www.mathlove.org/ 에서 '카발리에리'를 검색.

함으로써, 수학과목에 대하여 흥미를 완전히 잃어버리게 될 것이다.

따라서 교육 전문가와 일선 초등학교 교사들은 지금보다 더 유익하고 알찬 내용이 포함된 새로운 학습 보조자료-가령 초등수학사 등-를 연구·개발함과 동시에, 개발된 학습자료들을 수학 수업시간에 적극 활용해서 수학의 유용성을 이해시켜야 할 것이다. 만약 초등학교에서부터 수학에 대한 부정적인 생각을 갖게 된다면 개인적으로는 물론이거니와 국가적으로도 엄청난 손실이 아닐 수 없다. 그러므로, 수학이라는 산의 전체적인 형세를 설명하고 안내해 줄 수 있는 수학사와 같은 보조 학습 자료를 연구·개발·활용하는 것은 학생들로 하여금 수학에 대한 관심을 불러일으킴과 기초학문으로서의 수학의 입지를 강화할 수 있는 계기를 마련할 수 있을 것으로 여겨진다.

본 연구는 초등 수학사 관련 학습자료에 대한 체계적인 연구·개발이 미흡한 상태에서, 또한 교과서 외의 학습자료 개발의 필요성을 제안하고 있는 연구[57]의 관점에서 연구된 초벌 학습 자료로서의 의미를 갖고 있다. 그러므로, 앞으로 이어지는 후속 연구에서는 제7차 교육과정의 초등수학 교과서와 교사용 지도서의 체계적인 분석을 통하여 일선 학교의 수학 수업시간에 곧 바로 활용할 수 있는 초등수학사 학습자료로 거듭 태어날 것을 기대한다. 아울러 초등교사 양성기관인 교육대학교와 각 시·도 교육청은 연구·개발된 학습자료를, 초등학교 교사들이 연구·개발 취지에 부합되도록 활용하기 위해서 초등학교 교사들을 대상으로 한, 연수프로그램을 개설·운영해야할 것으로 사료된다. 또한, 장차 초등학교에서 수학교과를 담당할 교육대학교 학생들에게도 초등수학사 관련 강좌를 반드시 개설하여 수학의 새로운 모습을 경험해볼 수 있는 기회를 제공해야만 할 것으로 사료된다.

57) 류연수(2001)의 제7차 교육과정에 의한 초등학교 교과서 활용 방법 개선 연구

❖ 참 고 문 헌 ❖

권영환 (1990), 재미있는 이야기 수학, 한국 출판 금고.

권영한 (1998), 재미있는 이야기 수학, 전원문화사, pp. 22-23.

김부윤, 위성미 (1997), 대학수학과 중등수학과의 연계성에 관한 一 考察, 대한수학회 수학교육논총, 15, pp. 121-133.

김용운, 김용국(1997), 재미있는 수학여행-기하의 세계, pp. 27~31, 김영사.

김해규 (2001), 7차 교육과정 1-가 단계 수학교과서 1, 2단원에서 활용 가능한 수학사 학습 자료, 제주교육대학교 논문집 제30집, pp. 147-203.

당상빈 (1999), 수학의 정상이 보인다, 도서출판 예가, pp. 449-459.

류연수 (2001), 제7차 교육과정에 의한 초등학교 교과서 활용 방법 개선 연구, 2001년도 교육과정 후속 지원 연구과제 답신보고용 교육인적자원부 위탁연구과제.

박명전 (2000), 수학 영재의 창의적 문제해결력 신장을 위한 학습자료 개발, 한국교원대학교 석사학위논문, pp. 44-46.

서울교육대학교 수학교육과 수학사연구회(2000), 수학사와 수학이야기, 무지개사, pp. 64-65.

수학아 놀자2, 브라이언 볼트, 푸른 미디어.

수학사랑, 1999년 여름 17호, pp. 53~55.

수학사랑, 1999년 가을 17호 pp. 116~117.

수학사랑 (2001. 2 · 3월), 통권 25, pp. 30-33.

이종욱 (2000), 초등학교 수학영재의 확산적 사고 발달을 위한 학습자료 개발 연구, 한국교원대학교 석사학위논문, pp. 48-49.

정내경, 문창룡(1999), 호기심 수학, 교학사, pp. 136-139.

조수남(2002), 수학사의 문제를 통한 접근, 수학사랑 통권 33호, pp. 85-95.

초등학교 수학교과서 및 교사용 지도서, 교육인적자원부.

Eves, 李又英 역(1993), 수학사(고대 · 중세), 京文社, p. 13.

Keith Devlim, 허민, 오혜영 역(1996), 수학: 양식의 과학, 경문사, pp. 351-353.

http://home.hanmir.com/~joeun1009/f2.htm.

http://my.dreamwiz.com/piruks/ 에서 토픽수학사, 하노이 탑

http://pdex.kaist.ac.kr/~jick/egypt.html

http://cce.yonam-c.ac.kr/~kangdy1/sogea2.htm,
http://delta.new21.net/
http://my.dreamwiz.com/lyj1009/main.html
http://school.hongik.ac.kr/~ydhome/yoon/Start.htm : 정윤석의 수학사 이야기
http://user.chollian.net/~badang25/
http://user.chollian.net/~badang25/bdf03.htm
http://user.zzagn.net/hdelta/: 허종운의 홈페이지. 수학자료실의 수학사 요약
http://www.i-together.co.kr/menu3/cb007.asp
http://www.inchon-e.ac.kr/~shsong/
http://www.mathlove.co.kr/
http://www.mathlove.co.kr/pds/materials/stories/creativity/hani-4.html
http://www.mathlove.co.kr/pds/materials/stories/reg_poly.html
http://www.mathlove.com/ 에서 다각형을 검색.
http://www.mathlove.com/ 에서 사각형을 검색.
http://www.mathlove.com/pds/materials/stories/creativity/hani-3.html
http://www.mathlove.or.kr/pds/materials/stories/harmo.html
http://www.mathlove.org/ 에서 '카발리에리'를 검색.
http://www.mathlove.org/에서 소마큐브 검색
http://www.mathstart.org/
http://www.taesan.ms.kr/generaldb/math/1pldz.html
http://www.tgedu.net/student/cho_math/index.htm