제주교육대학교 논문집 (2002)
제31집 pp. 41~60

초등학교 수학교육에서 "유희성"에 관한 연구

현종익* · 한인기**

〈목 차〉

Ⅰ. 서 론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998)에는 '수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다'는 것이 한 목표로 규정되어 있다. 이 목표는 초등학교 수학교육에서 특히 중요한 의미를 가진다. 왜냐하면, 중등학교 수학에서는 엄밀하고 형식화된 수학 내용이 주로 다루어지는 반면, 초등학교 수학 교과는 구체적이고 직관적인 수준에서 다양한 조작과 활동을 통해 수학에 대한 흥미 및 관심을 개발·육성하여 중등학교에서의 체계적인 학습을 준비하는 과정이라고 특징지을 수 있기 때문이다.

초등 학생들에게 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지도록 하는 교수-학습 방법을 모색하는 것은 중요한 수학 교육 분야의 문제이지만, 아직도 체계적인 연구가

* 제주교육대학교 총장
** 경상대학교 사범대학 수학교육과 교수

미진한 상태이다. '수학에 대한 흥미', '수학을 하는 즐거움', '수학의 아름다움에 몰입' 등과 같은 개념은 단지 직관적인 수준에서 이해되어 왔으며, 이러한 측면을 고려한 수학과 교수-학습 방법의 개선을 위한 체계적인 시도가 거의 없었다.

외국의 문헌들을 보면, 'Recreation Mathematics'[1]라고 불리는 독특한 영역이 있는데, recreation mathematics 분야에 관련된 수학 문제나 주제의 특징으로 어떤 수학적 대상에 대해 흥미를 유발시켜 그 대상에 대한 탐구 활동에 몰입할 수 있는 기회를 제공하는 것을 들 수 있다. 특히, 미국의 Baywood Publishing Company에서는 〈The Journal of Recreational Mathematics〉라는 잡지도 발간되고 있다. 한인기 · 유미애(2001)는 recreation mathematics에 관련된 수학 영역을 '유희수학'이라 하였다.

Gardner는 유희수학에 관련된 문제나 탐구 주제들을 포함하는 많은 저술을 남겼는데, 예를 들어 'New mathematical diversions from scientific american(1966)', 'The unexpected hanging and other mathematical diversions(1969)', 'Mathematics, magic and mystery(1956)', 'Penrose tiles to trapdoor ciphers(1989)' 등이 있고, 이들 중에서 몇몇은 국내에도 번역되어 소개되었다. 그리고, 폴란드의 수학자 Steinhaus도 이 분야에서 유명하며, 문제와 숙고(1972), 백 문제(1958) 등의 저술을 남겼고, Golomb(1964)의 'Polyominoes', 그리고 Ball(1973)의 'Mathematical recreations & essays'도 널리 알려져 있다.

러시아에서도 recreation mathematics 분야가 오래 전부터 폭넓게 연구되어 왔는데, 대표적으로 Peleman의 유희수학 시리즈, Kordemski(1965)의 '수학적 민첩성', 그리고 Kordemski & Rusalev(1994)의 '놀라운 정사각형', Boltyanski & Soifer(1991)의 'Geometric etudes in combinatorial mathematics' 등도 널리 알려져 있다.

수학의 유희성에 대한 수학 교육학적 측면에서의 연구로, Gallagher(1980)는 recreation mathematics의 내용을 통해 문제해결력 신장 방안을 모색하였고, Kutrimuratoba(1989)는 유희성을 띄는 몇몇 수학 문제들의 수학 교육학적 의의를 분석하였으며, 한인기 · 유미애(2001)는 polyominoes를 활용한 조작 활동과 논증의 관련성을 탐구하였다. 이밖에도 유희성을 띄는 수학 문제나 퍼즐, 게임 등을 수학 교수-학습에 관련시키려는 몇몇 시도들이 있었다(이경언, 2002; 황선욱, 2000; 김수환, 1999; 신현용 · 한인기, 2001 등).

---

1) 유사한 개념으로 'mathematical puzzle', '수학적 민첩성 문제(**задачи на смекалку**)' 등이 있음.

살펴본 연구들은 유희수학의 새로운 주제나 문제들을 소개하거나 몇몇 유희수학의 자료들을 특정한 교육 목적의 달성을 위해 성공적으로 활용할 수 있음을 보여주고 있지만, 초등학교 수학 교수-학습에서 유희성 개념의 구성 요소들, 유희성을 띄는 교수-학습 자료의 개발 방법 등을 체계적으로 제시하지는 못하였다.

본 연구에서는 초등학교 수학 교수-학습과 관련된 유희성의 다양한 측면들을 고찰하고, 학생들에게 수학에 대한 흥미와 관심을 가지게 하는, 즉 유희성을 띄는 수학 교수-학습 자료 개발 방법을 모색할 것이다.

Ⅱ. 유희성과 수학교육

수학교육에 관련된 유희성을 수학 학습 형태의 측면과 수학 학습 자료의 측면에서 고찰하자. 우선, 수학 학습 형태와 관련된 유희적 측면에 대하여 살펴보자. Shuba(1994)는 수업에서 유희성을 '일상적이지 않고 놀라우며 예기치 못한 요인들을 포함하고, 학생들에게 교과에 대한 흥미를 불러일으키며, 배움에 대해 긍정적인 정서적 분위기를 만들어 내는 수업의 요소들(p. 3)'로 정의하였다. 이로부터, 우리는 수학 학습 자료의 전달 방식, 수업의 구성 방식, 교사와 학생의 의사소통 유형, 그리고 학급의 분위기 등도 유희적 성격을 띈 수학 교수-학습에 영향을 미친다는 것을 알 수 있으며, 수학 학습 형태에 관련된 유희성으로 '수학 학습 형태나 수학 수업의 구성 방식에서 일상적인 틀에서 벗어난 예기치 못했던 요인들을 포함하고, 학생들에게 수학에 대한 흥미를 불러일으키고, 수학에 대한 긍정적인 태도의 형성에 영향을 주는 수학 학습의 요소들'로 규정할 수 있다.

수학 학습 형태에 관련된 유희성은 수학 교과 내용 자체보다는 수업의 형태, 교사와 학생의 활동, 학생들 사이의 활동, 그리고 학습 환경을 어떻게 조직하는가에 의존하게 된다. 예를 들어, 일정한 양과 수준의 수학 문제를 풀면 상응하는 보상을 제공함으로써 수학 학습이나 수학적 활동에 대한 긍정적인 태도를 가지게 하는 것도 수학과 교수-학습 형태에 관련된 유희적 요소라 할 수 있다.

수학 학습 형태에 관련된 중요한 유희적 요소로는 학생들 사이의 경쟁적 관계를 유발시키는 것으로, 이것은 특히 초등학교 학생들에게 의미가 있다. 한인기(2001a)는 팀별 수학 경시대회인 "수학전쟁"의 운영 규칙, 평가 방법, 그리고 팀별 경시대회의 의

의를 고찰하였는데, 이 수학전쟁의 운영 방식은 경시대회 뿐만 아니라 초등학교 수학 학습 과정에서도 학습 내용을 반복·정리하면서 수학적 지식의 확고한 정착, 수학적 지식의 활용, 문제해결 능력 신장, 그리고 수학적 의사소통의 활성화 가능성을 제시하면서 높은 수준의 유희적 요소를 포함할 것으로 기대된다.

수학 학습 자료에 관련된 유희성의 요소들을 살펴보자. Kordemski(1958)는 '수학 문제의 유희성은 학생들의 주의를 집중시키고, 사고를 활성화시키고, 대상에 대한 흥미를 불러일으키며, 대상에 몰입하게 만든다. 그리고 유희성을 통해 수학의 아름다움에 대한 생각을 가지게 된다(p. 74)'고 주장하였다. Kordemski의 주장으로부터 유희적 성격을 띈 수학 학습 자료의 특성으로 ① 학생들의 주의집중, ② 사고 조작의 활성화, ③ 수학적 대상에 대한 흥미 유발, ④ 대상에 대한 몰입, ⑤ 수학의 아름다움 인식 등을 생각할 수 있다. 한 가지 예를 살펴보자.

예제 1. 24 + 13를 구하여라.

예제 2. 24, 13, 37의 관계를 구하여라.

예제 2는 전형적인 학습 문제인 예제 1과 유사한 수학적 내용을 포함하고 있지만, 유희성이라는 측면에서 보면 예제 1과 다른 성격을 가진다. 예제 2에서는 예제 1보다 학생들에게 수 24, 13, 37의 특성에 대한 주의집중을 요구하며, 예제 1에서와 같은 종합적 사고 이외에 분석적 사고 활동도 요구한다. 예제 2는 Kordemski가 주장한 유희성의 요소들 중에서 주의집중, 사고 조작의 활성화라는 측면에서 예제 1보다 유희적 성향을 강하게 띈다고 할 수 있다.

유희성을 띄는 학습 자료는 수학 교육과정에 직접적으로 관련된 학습 자료, 수학 교육과정과 직접적인 연관성은 적지만 학생들의 다양한 사고 활동을 유발시킬 수 있는 학습 자료로 나눌 수 있다. 수학교육의 목표로써 수학적 지식의 형성 뿐만 아니라 학생들의 사고력 개발 및 신장도 매우 중요하기 때문에, 두 번째 유형의 학습 자료도 수학교육에서 간과해서는 안될 것이다. 본 연구에서는 이 두 가지 유형의 학습 자료 개발에 대해 상세히 고찰할 것이다.

한편, Kutrimuratoba(1989)는 '수학 수업에서 유희적 문제의 해결은 사고의 유연성의 형성, 그리고 비정형적이고 어려운 수학 문제상황의 고찰을 준비시키며, 그러한 고

찰 능력의 육성에도 관련된다'(p. 136)고 하였다. Kutrimuratoba의 주장으로부터, 학생들의 유희적 수학 학습 자료에 대한 활동을 통해, 유연한 사고의 형성이나 비정형적 문제상황에 대처하고 문제를 해결하는 능력의 형성과 같은 중요한 수학교육의 문제에 접근할 수 있음을 알 수 있다.

Ⅲ. 유희성의 구성 요소

Kordemski가 주장한 유희성의 요소인 주의 집중, 사고 조작의 활성화, 수학적 대상에 대한 흥미 유발, 수학적 대상에 대한 몰입, 수학의 아름다움 인식 등을 좀더 구체적으로 살펴보고, 이에 관련된 몇몇 학습 자료들을 살펴보자.

(1) 주의(注意) 집중

국어 사전(야후, 2002)에 보면, 주의(注意)는 '대상 중에서 어떤 것을 특히 인지(認知)하려는 노력'으로 정의되어 있다. 우리는 주변 환경으로부터 특정한 어떤 것들을 지각하고, 특정한 어떤 것들을 다양하게 고찰하고, 특정한 어떤 것들에 대해 어떤 일정한 방향으로 깊이 생각한다. 앎의 과정에서 이러한 선별적이고 유향적 특성은 인식 주체의 '주의'와 관련하여 설명될 수 있다. Pirogova(1986, p. 231)는 '주의의 특성으로 유향성과 집중성을 추출할 수 있는데, 이들은 개인의 감각적, 지적, 그리고 동적인 활동성 수준의 향상에 관련된다'고 했다.

주의와 관련하여 한 가지 주목할 것은 '주의'가 가지는 상대적 특성이다. '주의'의 생성에서 대조가 중요한 의미를 가지며, 상대적으로 새롭거나 상대적으로 강렬한 자극은 더 높은 수준의 주의를 유발시킨다.

한편, 주의는 의도적 주의와 자발적 주의로 나눌 수 있다. 자발적 주의는 주체의 의도적 노력이나 목적 설정에 관계없이 발생되어 지속되며, 의도적 주의는 의식적으로 방향이 설정되고 조절되는 집중성에 관련된다.

모든 일상적이지 않은 것들은 '주의'를 불러일으키기 때문에, 자발적 주의가 발생하는 중요한 조건 중의 하나로 '새로움'을 들 수 있다. 이 '새로움'에는 ① 이전에는 사용되지 않았던 대상이나 방법; ② 기존 대상의 물리적 특성이나 상황적 의미가 변화된 경우; ③ 기존 대상들이 결합되는 경우 등이 관련된다. 다음 예제를 살펴보자.

예제 3. 엄지손가락은 1, 검지는 2, 중지에 3, 약지는 4, 새끼손가락은 5, 이제 거꾸로 약지는 6, 중지는 7, 검지는 8, 엄지는 9, 다시금 검지는 10 등과 같은 방법으로 수를 헤아려 보자. 이때, 수 2002는 어느 손가락에 해당하는가?

예제 3은 손가락을 이용하여 새로운 방법으로 수를 세도록 요구하고 있다. 이것은 기존의 대상에 대한 수학적 수세기 활동을 변화시켜 학생들에게 새로움을 주고 있기 때문에, 학생들에게 높은 수준의 주의를 발생시키고 유지시킬 수 있다. 이러한 높은 수준의 새로움은 문제의 유희적 성격에 영향을 준다.

의도적 주의는 주체가 어떤 대상에 대한 특정한 문제나 목적의 설정을 통해 생성되며, 그 주의의 대상도 대부분 협소하게 규정된다. 의도적 주의는 가장 새롭거나 가장 흥미로운 요소에 관련되기보다는 목적 달성에 필요하거나 중요한 것에 관련되기 때문에, 이를 발생시키거나 지속시키기 위해선 의도된 노력이 필요로 한다.

한 가지 유형의 주의를 더 살펴보자. 목적 달성을 위한 활동에서 결과 뿐만 아니라 활동 과정 자체나 내용이 주체에게 흥미롭고 가치로운 경우에, 이때 발생되는 주의를 의도적 주의로만 귀착시킬 수는 없다. 처음에는 의도적으로 설정된 목적 달성에 관련되기 때문에, 의도적 주의라 할 수 있지만, 그 이후에는 활동 과정 자체나 내용이 흥미로워 주의의 지속을 위해 의도적인 노력이 더 이상 필요하지 않기 때문에, 이러한 측면은 의도적 주의라고 할 수 없다. Pirogova(1986)는 이러한 주의를 '의도 후발 주의'라고 하였다.

초등학교 학생들은 의도적인 집중성이 빈약한 경우가 많기 때문에, 수학교육의 효율성 향상을 위해 자발적 주의의 역할이 특히 중요하다. 그러나, 교수-학습 과정 전체를 자발적 주의에 바탕을 두고 구성하는 것은 쉬운 일도 아니며, 항상 바람직하지 않을 수도 있다. 한편, 의도적인 노력만으로 주의를 계속 유지시키는 것은 아동들에게 지나치게 커다란 부담과 육체적·정신적 피로를 유발시키게 된다. 그러므로, 교육의 과정에서 자발적 주의, 의도적 주의, 그리고 의도 후발 주의를 적절히 조화시키는 것이 중요하며, 흥미로운 소재나 활동을 통해 의도 후발 주의를 발생시키고 유지하는 방안을 모색하는 것은 매우 중요하다.

한편, 교수-학습에서 학생들의 주의는 학습 내용과 학습 내용의 전달 방법에 많은 영향을 받는다. 예를 들어, 학생들이 접근 가능한 자료나 내용에 대한 생생하고 명료하고 역동적이고 순차적이고 논리적으로 잘 구성된 학습 자료는 교수-학습에서 학생

들의 주의를 발생시키고 유지시키는데 중요한 조건이 된다. 역동적이고 논리적으로 잘 구성된 학습 자료의 예를 살펴보자.

예제 4. 세 개의 동전들 중에서 두 개는 진짜 동전이고, 하나는 가짜 동전으로 진짜보다는 가볍지만, 외형상으로는 구별되지 않는다고 한다. 추가 없는 양팔저울을 한번만 사용하여 위조 동전을 찾아낼 수 있는가?

예제 5. 네 개의 동전들 중에서 세 개는 진짜이고, 하나는 위조 동전인데, 외형상으로는 구별되지 않고, 위조 동전이 진짜보다 무겁다고 한다. 추가 없는 양팔 저울을 두 번 사용해 위조 동전을 어떻게 찾을 수 있는가? 양팔 저울을 한 번만 이용해서는 찾을 수 없는가?

예제 6. 9개의 동전들 중에 8개는 진짜이고, 하나는 위조 동전인데, 외형상으로는 구별되지 않고, 위조 동전이 진짜보다 무겁다고 한다. 추가 없는 양팔 저울을 최소한 몇 번 사용해야 위조 동전을 찾을 수 있는가?

예제 7. 10개의 동전들 중에 9개는 진짜이고, 하나는 위조 동전인데, 외형상으로는 구별되지 않고, 위조 동전이 진짜보다 가볍다고 한다. 추가 없는 양팔 저울을 최소한 몇 번 사용해야 위조 동전을 찾을 수 있는가?

예제 8. (1) 27, (2) 28개의 반지가 있는데, 이들 중에서는 하나의 가벼운 위조 반지가 있다. 추가 없는 양팔 저울로 위조 반지를 찾으려면, 저울을 최소한 몇 번 사용해야 하는가?

예제 9. k개의 부품들 중에서 k-1개는 합격품이고, 하나는 불량품인데, 외형상으로는 구별되지 않고 불량품이 더 가볍다고 한다. 추가 없는 양팔 저울로 불합격품을 찾아내려면, 양팔 저울을 최소한 몇 번 사용해야 하는가?

예제 4의 접근 방법과 문제해결에서 얻은 지식을 이용하여 예제 5의 문제해결에 효율적으로 접근할 수 있으며, 예제 4와 5에서의 문제해결 경험을 통해 문제 6, 7, 8에

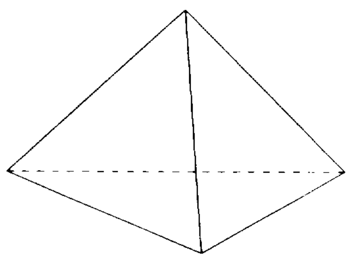
효율적으로 접근할 수 있으며, 예제 4~8까지의 문제해결 경험을 예제 9를 통해 일반화할 수 있다. 그러므로, 예제 4~9는 학생들이 접근 가능하도록 순차적이며 논리적으로 잘 구성된 학습 자료라 할 수 있다. 이러한 학습 자료를 통한 학습에 학생들은 높은 수준의 주의를 기울이게 되는데, 이러한 경우는 특히 의도 후발 주의에 깊이 관련된다.

(2) 사고 조작의 활성화

학생들의 수학적 활동에 관련된 사고 조작의 유형에 대해서는 많은 학자들이 다양한 조작들을 추출하였다. 현종익 · 한인기(1998)는 창의적 사고 형성을 위해 바탕이 되는 사고 조작의 유형으로 분석과 종합, 비교와 유추, 일반화와 유목화, 추상화와 구체화를 추출하고, 이들 사고 조작의 본질 및 특성, 그리고 관련된 수학 교수-학습 자료들을 상세히 제시하였다. 이 자료들은 학생들의 사고 조작을 활성화시키며 높은 수준에서 유희성을 띄고 있다.

이제, 학생들의 사고 조작을 활성화시킬 수 있는 몇몇 체계화된 자료를 더 살펴보기로 하자.

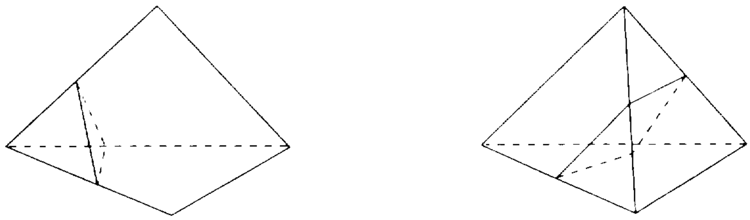
예제 10. 평면을 이용하여 주어진 삼각뿔을 자르면, 그 단면으로 어떤 도형들을 얻을 수 있는가? 이때, 각 도형을 얻기 위해 어떻게 잘라야 하는가를 설명하여라.



이 문제의 해결 과정에서 학생들은 삼각뿔에 대해 분석해야 한다. 즉, 삼각뿔은 밑면과 세 개의 옆면으로 이루어졌고, 꼭지점과 밑면을 세 개의 선분이 연결하고 있다는 것, 밑면이 삼각형이라는 것 등등.

이제, 삼각뿔을 절단하는 평면과 삼각뿔의 모서리들을 종합해야 한다. 이러한 종합을 통해, 절단 평면이 꼭지점에서 내린 한 모서리를 지나는 경우, 절단 평면이 꼭지점에서

내린 두 모서리를 지나는 경우, 절단 평면이 꼭지점에서 내린 세 모서리를 지나는 경우에 대해 고찰해야 한다. 이를 통해, 학생은 다음과 같은 절단면을 얻을 수 있다.



〈절단면이 삼각형〉 〈절단면이 사각형〉

예제 11. 평면을 이용하여 사각뿔을 자르면, 그 단면으로 어떤 도형들을 얻을 수 있는가? 이때, 각 도형을 얻기 위해 어떻게 잘라야 하는가를 설명하여라.

예제 12. 평면을 이용하여 오각뿔을 자르면, 그 단면으로 어떤 도형들을 얻을 수 있는가? 이때, 각 도형을 얻기 위해 어떻게 잘라야 하는가를 설명하여라.

예제 13. 평면을 이용하여 n각뿔을 자르면, 그 단면으로 어떤 도형들을 얻을 수 있는가? 이때, 각 도형을 얻기 위해 어떻게 잘라야 하는가를 설명하여라.

살펴본 것과 같이 예제 10～13의 각각을 해결하는 과정에서 분석과 종합이 중요한 역할을 하며, 예제들을 해결하는 과정에서 다음과 같은 일반화를 얻을 수 있다: 평면을 이용하여 각뿔을 자르면, 그 단면은 삼각형, 사각형, 오각형, …, n+1각형을 얻을 수 있다. 살펴본 예제 10～13은 잘 구성된 체계화된 자료로써, 다양한 인지 조작을 경험하도록 하며 높은 수준의 유희성을 띄고 있다.

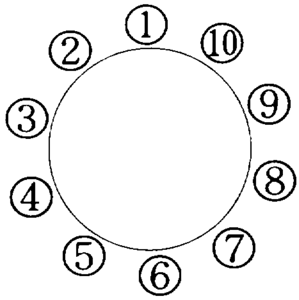
(3) 흥미의 개발 및 육성

어떤 수학적 대상이나 문제에 대해 흥미를 유발시키는 것은 중요한 교육적 의의를 가지며, 흥미로운 대상은 상당히 강력한 집중성을 유발시키기 때문에, 특히 자발적 주의의 발생 및 유지에서 흥미는 중요한 역할을 한다.

신현용 외(2001)에 의하면, 학습 과제에 대해 '흥미로움'을 유발하는 요인들로 학습

과제의 새로움, 학습 과제와 관련된 소재의 다양성, 직접적인 활동 가능성 여부, 실생활 문제 상황과의 관련성 등을 들고 있다. 특히, 시각적 매체의 적절한 이용, 즉 그림, 표, 구체물 등을 사용하여 시범을 보이거나 학생 스스로 실험할 수 있는 기회를 제공하는 것은 초등 학생들에게 흥미를 유발시키고 유지하는데 중요한 의미를 가진다.

예제 14. 영수와 태우가 길을 걷다가 그림과 같은 코스모스 꽃을 발견했다. 영수와 태우는 번갈아 가며 꽃잎을 따는데, 한 번에 하나 또는 이웃하는 두 개의 꽃잎을 딸 수 있다. 영수와 태우가 번갈아 꽃잎을 딸 때, 마지막 꽃잎을 따는 사람이 이긴다. 누가 항상 이길 수 있는가?



예제 14의 활동은 일상 생활에서 발생하는 문제상황으로 학생들에게 흥미로운 탐구 소재가 될 수 있으며, 학생들은 실제로 구체물을 이용하여 실험할 수 있는 기회를 가질 수 있다. 예제 14의 이러한 특성들은 문제의 유희적 성격에 커다란 영향을 미친다.

한편, Sadihov(1982)는 문제해결을 통한 수학 학습에 대한 흥미 육성 방법으로, ① 다양한 방법으로 문제를 해결하기; ② 한 문제를 다른 유형의 문제들을 해결하는데 사용하기; ③ 복잡한 문제를 이전에 배운 간단한 문제들의 결합을 통해 해결하기 등을 들고 있다.

다양한 방법으로 해결할 수 있는 문제나 다양한 결론을 가지는 문제들에 대한 교육학적 연구는 'open-ended approach' 라는 고유한 연구 영역을 구축하였고, 지금도 학생들의 창의적 문제해결에 관련하여 활발하게 연구되고 있다. open-ended approach에 관련된 수학 교수-학습 자료는 학생들의 장기적인 의도 후발 주의의 유지에도 큰 역할을 하며, 높은 수준의 유희성을 가지고 있다고 할 수 있다.

한편, '한 문제를 다른 유형의 문제들을 해결하는데 사용하기' 나 '복잡한 문제를 이

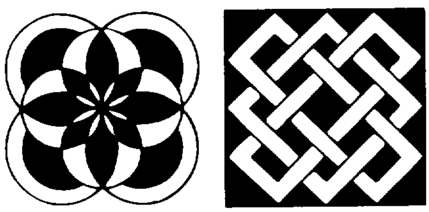
전에 배운 간단한 문제들의 결합을 통해 해결하기' 등은 순차적이며 논리적으로 잘 구성된 문제들을 통해 수학 교수-학습 과정에서 구체화될 수 있으며, 학생들의 수학에 대한 흥미를 개발·육성하는데 중요한 역할을 한다.

(4) 수학의 아름다움

'아름다움'이란 개념은 주관적인 측면이 매우 강하지만, 수학 분야에서 '아름다운 문제', '아름다운 풀이', '우아한 풀이', 그리고 '아름다운 결론' 등은 일반적으로 수용되는 개념들이다. 수학 분야에서 아름다움은 무엇보다도 합목적성과 관련된다. 즉, 최종적인 목적에 귀착되지 못하는 고찰이나 필요보다 긴 논증은 '아름답다' 또는 '우아하다'는 개념과는 거리가 있다. 간결하면서 뚜렷한 수학적 아이디어를 포함하는 문제들은 상당히 높은 수준에서 유희성을 띄지만, 이러한 문제들은 수학자들의 수학 연구에 관련되는 경우가 많다.

초등학교 수학에 관련된 '아름다운 수학 문제'에 대해 좀더 살펴보자. Loshina(1997, p. 4)에 의하면, '학생들이 기하학 문제의 아름다움을 지각하는 것은 문제의 조건과 그림으로부터 시작된다. 그러므로, 조건의 내용은 학생들의 흥미를 불러 일으켜야 한다'고 주장하면서, 다음과 같은 문제가 학생들에게 흥미로운 그림을 포함하고 있다고 했다.

예제 15. 컴퍼스와 자를 이용하여, 아래 그림에 제시된 도형들을 작도하여라.



한편, 수학에 대한 아름다움을 느끼도록 하는 문제들은 문제 자체나 풀이에서 흥미로운 사실이나 예상치 못했던 사실들을 포함해야 하며, 높은 수준에서 일반화되어야 한다. 일반화가 가능하다는 측면에서 예제 4~9, 예제 10~13, 예제 14는 학생들에게 수학에 대한 아름다움을 경험할 수 있는 기회를 제공하는 문제들이다.

Ⅳ. 유희성을 띄는 수학 학습 자료 개발

수학 학습 자료 개발에 관련하여 수학 문제 제작 또는 problem posing 등과 같은 몇몇 연구들이 있었는데, 본 연구에서는 특히 유희성을 띄는 수학 학습 자료를 개발하는 구체적인 몇몇 대표적인 방법에 대해 살펴보자.

(1) 문제의 외적 구조를 변화시키기

수학 문제의 외적 구조를 구성하는 요소를 한인기(2001b)는 다음과 같이 규정하였다:

A : 수학 문제에서 주어진 것들, 가정들

B : 풀이에 대해 근거가 되는 개념들, 명제들, 공리들

C : 풀이에 포함된 결론을 유도하는 절차들, 알고리즘들

D : 결론들, 구하는 답들.

어떤 문제에서 알려지지 않은 요소를 x, y, z등과 같은 문자들로 나타내면, 각각의 수학 문제들은 ABCD, AxCD, ABxD, ABCx, AxyD, … 등과 같은 외적 구조를 가지게 된다. 이때, 주어진 문제의 외적 구조를 변화시키면 유희성을 띈, 즉 예기치 못한 요인들을 포함하고, 정형적인 틀에서 벗어난 수학 문제를 만들 수 있다. 다음 예제를 살펴보자.

예제 16. 64 - 48= 을 구하여라.

예제 16의 외적 구조를 추출하자. 학생들에게 예제 16과 유사한, 두 자리 수들 사이의 차를 구하는 방법과 그 배경 지식이 이미 지도되었다면, 이 문제는 주어진 것(A)인 피감수와 감수가 주어졌고, 뺄셈에 관련된 수의 성질(B), 계산 알고리즘(C)이 이미 학생들에게 알려져 있으나 64-48= 의 결과를 구해야 하므로, 이 문제는 ABCx인 구조를 가진다. 이 문제의 구조를 xBCD로 바꾸어 다음과 같은 새로운 문제를 만들 수 있다.

예제 17. 차가 16인 두 수를 구하여라.

예제 16과 마찬가지로, 학생들은 이미 두 자리 수들 사이의 차를 구하는 방법과 그 배경 지식을 알고 있다고 하면, 이 문제는 뺄셈에 관련된 수의 성질(B), 계산 알고리즘(C), 그리고 뺄셈의 결과(D)가 학생들에게 알려져 있고, 뺄셈의 두 요소인 피감수와 감수(A)를 구해야 한다. 그러므로, 이 문제는 xBCD의 구조를 가진다.

예제 17은 예제 16에 비해 새로우며, 예제 16에 비해 높은 수준의 분석적 사고 활동을 요구하므로, 더 높은 수준의 유희성을 띈다고 할 수 있다. 다른 문제를 하나 더 살펴보자.

예제 18. 23+31-5-11+8 을 계산하여라.

예제 18은 교과서나 참고 서적에 제시되는 전형적인 계산 문제로써, 이 문제는 ABCx의 외적 구조를 가진다. 이 문제에서는 잘 정의된 주어진 것들에 대해 제시된 연산을 순차적으로 수행하면 구하는 답을 얻을 수 있다.

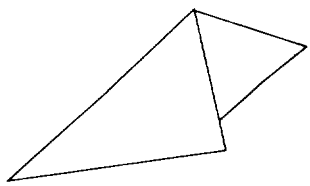
예제 16에서는, 그 외적 구조를 예제 17의 xBCD로 변형시키기 위해 연산은 그대로 두고 적당한 피감수와 감수를 찾도록 하였다. 그러나, 상응하는 감수, 피감수, 가수 등은 그대로 두고 적당한 연산을 선택하도록 변형시킴으로써 문제의 외적구조를 변형시킬 수도 있다. 예를 들어, 이와 같은 방법으로 예제 18을 외적구조로 xBCD를 가지는 예제 19로 변형시킬 수 있다.

예제 19. 다음 식이 성립하도록 별표 대신에 +나 -를 넣어라.

$$23 * 31 * 5 * 11 * 8 = 46$$

예제 19는 문제 자체의 비정형성이나 관련된 사고 활동 조작의 다양성으로 인하여 예제 18에 비해 높은 수준의 유희성을 띈다.

예제 20. 다음 그림에서 삼각형은 몇 개인가?



예제 20에서는 그림이 주어져 있고(A) 결론(삼각형의 개수, D)을 구하는 문제이므로, ABCx의 유형이 된다. 그러나, 예제 20에서 문제의 구조를 변형하여 외적 구조로 xByD을 가지는 예제 21을 만들 수 있다.

예제 21. 두 삼각형을 겹치지 않게 붙여놓아 5각형을 만들려고 한다. 어떤 두 삼각형을 어떻게 붙여야 하는가?

예제 21에서는 오각형을 만들기 위해 어떤 삼각형을 가지고(A), 어떻게 붙여야 하는가(C)를 묻는 문제로, 예제 20에 비해 유희성이 강한 문제라 할 수 있다.

(2) 문제 구성 요소 일부의 특성을 변화시키기

수학 문제 구성 요소의 일부 특성을 변화시켜 흥미로운 결과를 얻을 수 있다. 예를 들어, 예제 5의 문제에서 '위조 동전이 진짜 동전보다 무겁다'는 것을 '위조 동전이 진짜 동전과 무게가 차이가 있다'고 바꾸면, 다음과 같은 문제를 얻을 수 있다.

예제 22. 4개의 동전들 중에서 세 개는 진짜이고 하나는 가짜인데, 외형상으로는 구별되지 않고 무게에서 차이가 난다. 추가 없는 양팔 저울로 위조 동전을 찾아내려면, 양팔 저울을 최소한 몇 번 사용해야 하는가?

예제 5에서는 양팔 저울을 두 번 사용하여 위조 동전을 찾을 수 있다. 각각의 동전에 ①②③④의 번호를 붙이자. 양팔 저울의 접시에 ①②와 ③④를 함께 놓았을 때, 무거운 쪽에 위조 동전이 있다. 그러므로, 위조 동전이 있는 쪽의 두 동전 각각을 다시 양팔 저울에 올려 무게를 측정하면, 위조 동전을 찾을 수 있다.

한편, 예제 22에서는 예제 5와 같은 접근을 취할 수 없다. ①②와 ③④의 동전을 양팔 저울에 놓아 저울이 한 쪽으로 기운다고 해서, 위조 동전이 어느 쪽에 있는지를 알 수 없기 때문이다. 예제 22를 풀기 위해, 다음 두 경우를 살펴보자: (1) 저울에 ①과 ②의 동전을 놓아 균형을 이루는 경우; (2) 균형을 이루지 않는 경우. (1)의 경우에는 ③이나 ④의 동전이 위조 동전이다. 그러므로, 동전 ②를 제거하고 ③의 동전을 놓았을 때, 균형을 이루면 동전 ④가 위조이며, 균형을 이루지 않으면 동전 ③이 위조 동전이 된다. 한편, (2)의 경우에 가령 동전 ①이 동전 ②보다 무겁다고 하자. 동전 ②대

신에 동전 ③을 놓았을 때 균형을 이루면 동전 ②가 위조 동전이고, 그렇지 않으면 동전 ①이 위조 동전이 된다.

살펴본 바와 같이, 예제 22는 예제 5와 같이 저울을 2번 사용하면 위조 동전을 찾을 수 있었다. 그러나, 동전의 전체 개수를 5개로 했을 때의 다음 문제를 살펴보자.

예제 23. 5개의 동전들 중에서 세 개는 진짜이고 하나는 가짜인데, 외형상으로는 구별되지 않고 무게에서 차이가 난다. 추가 없는 양팔 저울로 위조 동전을 찾아내려면, 양팔 저울을 최소한 몇 번 사용해야 하는가?

예제 5와 같은 경우에는 전체 동전의 개수를 5개로 해도 저울을 2번만 사용하면 되지만, 예제 23에서는 예제 22와 같은 방법을 이용하여 저울을 3번 사용해야 된다. 이와 같이, 문제 구성 요소의 특성(여기서는 위조 동전 무게의 특성)을 약간 변화시키면, 문제해결을 위한 새로운 접근 방법을 모색해야 하며, 예기치 않았던 새로운 결론을 얻을 수 있다.

예제 4~8인 경우에 대한 다음과 같은 일반화를 얻을 수 있다: 위조 동전이 진짜 동전보다 무겁거나 혹은 가볍다는 것이 알려졌다면, 양팔 저울을 n번 사용하여 $3^{n-1} < k \le 3^n$인 개의 전체 동전으로부터 위조 동전 하나를 찾을 수 있다. 한편, 예제 22~23의 경우로부터는, '위조 동전과 진짜 동전이 무게에서 차이가 있다는 것만을 안다면, 양팔 저울을 번 사용하여 $\frac{3^{n-1}-3}{2} < k \le \frac{3^n-3}{2}$인 k개의 전체 동전으로부터 위조 동전 하나를 찾을 수 있다'와 같은 일반화를 얻을 수 있다.

살펴본 바와 같이, 문제 구성 요소 일부의 특성을 변화시켜 예기치 못했던 새로운 결과와 새로운 일반화를 얻을 수 있는 유희성을 띈 수학 문제를 얻을 수 있다.

(3) 문제의 형태를 바꾸기

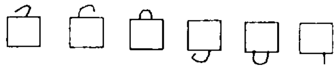
전형적인 수학 문제의 형태를 퍼즐이나 경쟁적인 형태로 바꾸어 더 높은 수준의 유희성을 가진 문제를 만들 수 있다. 다음 예제를 살펴보자.

예제 24. $(1+2)\times 3=$ 을 계산하여라.

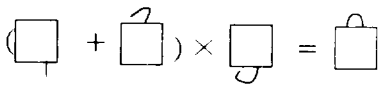
예제 24는 수학 교과서나 수업 시간에 접할 수 있는 전형적인 연습 문제이다. 이 문

제를 다음과 같이 흥미로운 문제로 형태를 변화시킬 수 있다.

예제 25. 네모 칸 안에 숫자를 쓰는데, 숫자를 크게 써서 네모 칸 밖으로 나왔다. 네모 칸 안에 있는 숫자를 지우고 나니, 다음과 같은 재미있는 모양을 얻었다.



은 , , 등이 쓰였던 자리이고, 은 숫자 2, 3이, 은 숫자 6이, 은 숫자 8, 9, 0이, 은 숫자 3, 5, 9이, 은 숫자 6, 8이 쓰여졌던 자리이다. 다음 그림에 적당한 숫자를 넣어 식으로 완성하여라.



예제 25의 식은 $(1+2)\times3=9$로 예제 24와 같은 결과이지만, 예제 25는 비정형적인 퍼즐 유형의 문제로, 문제해결을 위해 다양한 추측 활동을 요구하는 높은 수준의 유희성을 띄는 문제이다.

(4) 다양한 활동 자료들을 활용하기

다양한 소재를 활용한 학습 자료 개발은 학생들에게 수학 학습에 대한 '새로움'을 주는데 그 효과가 크다. 예를 들어, 다음 두 문제를 살펴보자.

예제 26. 정육면체 모양의 주사위를 던졌을 때, 3의 배수인 눈이 나올 확률을 구하여라.

예제 27. 정 12면체 모양인 주사위가 주어졌다. 이때, 4의 배수인 눈이 나올 확률을 구하여라. 단, 주사위를 던졌을 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자를 주사위를 던져 얻은 수라 하자.

보통 정육면체로 된 주사위를 가지고 다양한 활동을 하는데, 정육면체 외에 정다각형으로 정사면체, 정 8면체, 정 12면체, 정 20면체가 있으므로, 이들을 이용한 활동을 해보는 것도 매우 유익할 것이다. 특히, 다면체에 대한 구체적인 활동은 학생들의 공간 지각력 개발 및 육성에 매우 큰 의의를 가질 것이다.

V. 결 론

본 연구는 초등학교 수학 교수-학습과 관련된 유희성의 다양한 측면들을 고찰하고, 학생들에게 수학에 대한 흥미와 관심을 가지게 하는 유희성을 띠는 수학 교수-학습 자료 개발 방법을 모색하기 위한 기초 연구이다. 이를 위해, 본 연구에서는 유희성의 본질, 유희성을 구성하는 요소들, 유희성을 띠는 학습 자료 개발을 위한 대표적인 방법 등이 체계적으로 고찰되었다.

수학교육에 관련된 유희성을 수학 학습 형태의 측면과 수학 학습 자료의 측면에서 생각할 수 있다. 수학 학습 형태에 관련된 유희성을 '수학 학습 형태나 수학 수업의 구성 방식에서 일상적인 틀에서 벗어난 예기치 못했던 요인들을 포함하고, 학생들에게 수학에 대한 흥미를 불러일으키고, 수학에 대한 긍정적인 태도의 형성에 영향을 주는 수학 학습의 요소들'로 규정하였다. 이러한 수학 학습 형태에 관련된 유희성은 수업의 형태, 교사와 학생의 활동, 학생들 사이의 활동, 그리고 학습 환경을 어떻게 조직하는가에 의존하게 된다.

한편, 수학 학습 자료에 관련된 유희성의 요소들로는 주의집중, 사고 조작의 활성화, 수학적 대상에 대한 흥미 유발, 수학의 아름다움 인식 등을 추출하였다. 주의(注意)는 대상 중에서 어떤 것을 특히 인지하려는 노력으로, '주의'는 상대적인 특성을 가진다. '주의'의 생성에서 대조가 중요한 의미를 가지며, 상대적으로 새롭거나 상대적으로 강렬한 자극은 더 높은 수준의 주의를 유발시킨다. 주의는 의도적 주의, 자발적 주의, 의도 후발 주의로 나눌 수 있는데, 자발적 주의는 주체의 의도적 노력이나 목적 설정에 관계없이 발생되어 지속되며, 의도적 주의는 의식적으로 방향이 설정되고 조절되는 집중성에 관련된다. 의도 후발 주의는 목적 달성을 위한 활동에서 결과 뿐만 아니라 활동 과정 자체나 내용이 주체에게 흥미롭고 가치로운 경우에 발생되고 유지되는 주의를 의미한다.

자발적 주의가 발생하는 중요한 조건으로 '새로움'을 들으며, 의도적 주의는 주체가 어떤 대상에 대한 특정한 문제나 목적의 설정을 통해 생성되며, 이를 지속시키기 위해선 의도된 노력이 필요로 한다. 초등학교 수학교육에서는 자발적 주의, 의도적 주의, 그리고 의도 후발 주의를 적절히 조화시키는 것이 중요하며, 흥미로운 소재나 활동을 통해 의도 후발 주의를 발생시키고 유지하는 방안을 모색하는 것이 중요하다.

한편, 학생들의 수학적 활동에 관련된 사고 조작의 유형으로는 분석과 종합, 비교와

유추, 일반화와 유목화, 추상화와 구체화를 중심으로, 이러한 사고 조작을 활성화시킬 수 있는 몇몇 유희적 성격을 띈 학습 자료들을 체계화하여 제시하였다.

수학교육에서 흥미로움을 유발하는 요인들로는 학습 과제의 새로움, 학습 과제와 관련된 소재의 다양성, 직접적인 활동 가능성 여부, 실생활 문제 상황과의 관련성 등을 들 수 있다. 특히, 시각적 매체의 적절한 이용, 즉 그림, 표, 구체물 등을 사용하여 시범을 보이거나 학생 스스로 실험할 수 있는 기회를 제공하는 것은 초등 학생들에게 흥미를 유발시키고 유지하는데 중요한 의미를 가진다.

초등학교 수학에 관련된 '아름다운 수학 문제'로, 문제의 조건과 그림이 학생들의 흥미를 불러일으키는 문제들을 살펴보았으며, 문제 자체나 풀이에서 흥미로운 사실이나 예상치 못했던 사실들을 포함하고, 높은 수준에서 일반화될 수 있는 문제가 아름다운 문제임을 주장하였다.

유희성을 띄는 수학 학습 자료 개발에 관련하여 문제의 외적 구조를 변화시키기, 문제 구성 요소 일부의 특성을 변화시키기, 문제의 형태를 바꾸기, 다양한 활동 자료들을 활용하기 등과 같은 대표적인 방법들을 제시하고, 상응하는 구체적인 학습 자료를 체계화하여 소개하였다.

❖ 참 고 문 헌 ❖

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

김수환 (1999). 수학 영재캠프 활동 사례: 하노이 탑과 후속과제 풀이. 수학교육학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 김원경 · 신인선 · 한인기 (2001). 영재교육에서 창의성 신장을 위한 수학 수업 모형. 청람수학교육 제 9집. 충북: 한국교원대학교 수학교육연구소.

신현용 · 한인기 (2001). 중학교 학생들의 창의적 성향 활성화를 위한 수학 학습 자료 개발에 관한 연구. 수학교육논문집 제 12집. 서울: 한국수학교육학회.

야후 (2002). 국어사전. 웹사이트: http://kr.kordic.yahoo.com

이경언 (2002). 창의성 신장을 위한 수학 게임 자료 개발 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

한인기 (2001a). 팀별 수학경시대회 "수학전쟁"에 관한 연구. 수학교육학술지 제 6집. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2001b). 수학 문제의 구조 규명에 관한 연구. 수학교육논문집 제 11집. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 유미애 (2001). Polynominoes를 활용한 조작활동과 논증의 관련성 탐구. 수학교육학술지 제 6집. 서울: 한국수학교육학회.

현종익 · 한인기 (1998). 창의적 사고 형성을 위한 기본적인 사고 활동 유형. 한국초등수학교육학회지 제 2호. 서울: 한국초등수학교육학회.

황선욱 (2000). 교구 활용을 통한 수학 영재의 창의력 신장. 수학교육학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

〈외국문헌〉

Ball R. (1973). Mathematical recreations & essays. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Boltyanski V. & Soifer A. (1991). Geometric etudes in combinatorial mathematics. Colorado: Center for Excellence in Mathematical Education.

Gallagher K. (1980). Problem solving through recreational mathematics. Virginia: NCTM.

Gardner M. (1956). Mathematics, magic and mystery. New York: Dover Pub. Inc.

Gardner M. (1966). New mathematical diversions from scientific american. New York: Simon and Schuster.

Gardner M. (1969). The unexpected hanging and other mathematical diversions. New York: Simon and Schuster.

Gardner M. (1989). Penrose tiles to trapdoor ciphers. New York: Freeman and Company.

Golomb S.W. (1964). Polyominoes. New York: Scribner's.

Kordemski B.A. & Rusalev N.V. (1994). 놀라운 정사각형. 모스크바: 백년출판사.

Kordemski B.A. (1958). 수학적 민첩성 문제에 대한 개괄. 모스크바: 교육출판사.

Kordemski B.A. (1965). 수학적 민첩성. 모스크바: 과학출판사.

Kutrimuratoba S. (1989). 유희적 문제의 교수학적 기능. Ed. Gleizer G.D. 학교에서 수

학교육의 효율성. 모스크바: 교육출판사.

Loshina N.L. (1997). 기하 문제해결에서 학생들의 심미적 성향 육성에 대해. 학교에서 수학. 1997년 №2. 모스크바: Shkola Press.

Pirogova E.B. (1986). 주의. Ed. Petrovski A.V. 일반 심리학. 모스크바: 교육출판사.

Sadihov S.N. (1982). 수학 학습에 대한 흥미 육성의 도구로써 기하 문제. 편집: Bokovnev O.A. 학교에서 기하와 대수의 지도. 모스크바: 교육출판사.

Shuba M. Yu. (1994). 수학교육에서 유희적 과제. 모스크바: 교육출판사.

Steinhaus H. (1958) / Boyarski G.F. & Boyarski B.V. 역 (1976). 백문제. 모스크바: 과학출판사.

Steinhaus H. (1972) / Danilov Yu. A. 역 (1974). 문제와 숙고. 모스크바: 평화출판사.

〈Abstract〉

A study on the diversion in mathematics education of elementary school

Hyun, Jong-Ik, & Han, InKi

The purpose of this paper is to make theoretical foundation of the concept 'mathematical diversion' in mathematics education. In this study we define mathematical diversion in elementary school mathematics, characterize its various aspects, and extract constituent elements of the concept. Corresponding to extracted constituent elements we suggest some material series of mathematical diversion, concrete didactical methods developing mathematical diversion materials.